Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 24 luglio 2013

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{\ln(2\pi)+\ln(n)} e^{x+ie^{ie^x}} dx\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$

. . . .

Soluzione
Si fa prima la sostituzione $\theta = e^x$, con: $d\theta = e^x dx$,

$$I = \int_0^{2n\pi} e^{ie^{i\theta}} d\theta\,.$$

quindi basta porre $z = e^{i\theta}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$, per ottenere la soluzione come

$$I = n \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz}}{iz} dz = 2ni\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{iz}, z=0\right] = 2n\pi\,.$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$J = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\cosh(x)}\,.$$

. . . .

Soluzione
Consideriamo il percorso chiuso

$$\Gamma_R = \{[-R,R] \cup [R, R+i\pi] \cup (-[R+i\pi, -R+i\pi]) \cup (-[-R, -R+i\pi])\}\,,$$

all'interno del quale l'integranda ha una sola singolarità polare in $z_1 = i\pi/2$. Si ha quindi

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^2 dz}{\cosh(z)} = 2i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{z^2}{\cosh(z)}, z=z_1\right] = 2i\pi(-i)(i\pi/2)^2 = -\frac{\pi^3}{2}\,.$$

L'integrale su Γ_R, nel limite $R \to \infty$, può essere anche scritto come

$$\begin{aligned} -\frac{\pi^3}{2} = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{z^2 dz}{\cosh(z)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh(x)} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+i\pi)^2 dx}{\cosh(x)} \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh(x)} - \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh(x)}\,, \end{aligned}$$

da cui

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh(x)} = \frac{\pi^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh(x)} - \frac{\pi^3}{8}\,.$$

L'integrale a secondo membro si calcola con lo stesso metodo, infatti integrando sul percorso Γ_R si ha

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{\cosh(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh(x)} = i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{1}{\cosh(z)}, i\pi/2\right] = \pi\,.$$

Sostituendo questo risultato nella precedente relazione

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{\cosh(x)} = \frac{\pi^3}{8}\,.$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Si calcoli lo sviluppo di Laurent in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\int_0^z a^{x^2} dx\,, \qquad a > 1$$

e se ne determini la regione di convergenza.

. . . .

Soluzione
Si considera lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\int_0^z e^{x^2 \ln(a)} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k(a)}{k!}\int_0^z x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k(a) z^{2k-1}}{k!(2k+1)} = \sum_{n=-1}^{\infty} C_n z^n\,,$$

con

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{\ln^{\frac{n-1}{2}}(a)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\, n} & n \,\text{dispari e}\, n \geq 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,.$$

Il raggio di convergenza è

$$R = \left[\limsup_{n\to\infty} |C_n|^{1/n}\right]^{-1} = \infty\,.$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2}\,,$$

con $a, b > 0$.

. . . .

Soluzione
La funzione può essere interpretata come il prodotto del coseno e una funzione razionale

$$f(x) = \cos(bx)\frac{1}{x^2 + a^2}$$

e quindi sfruttiamo la proprietà delle trasformate di Fourier per cui

$$\mathcal{F}_k[f_1 f_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}_k[f_1] * \mathcal{F}_k[f_2]\,.$$

La trasformata di Fourier del coseno è

$$\mathcal{F}_k[\cos(bx)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}e^{-ikx}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(k-b) + \delta(k+b)\right],$$

mentre quella della funzione $1/(x^2 + a^2)$

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{1}{x^2 + a^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|k|}}{a}\,.$$

La convoluzione dà il risultato

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|k-k'|}\left[\delta(k'-b) + \delta(k'+b)\right]dk' = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2a}\left(e^{-a|k-b|} + e^{-a|k+b|}\right)\,.$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Data la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

- si classifichi la matrice A e si calcolino autovalori e autovettori;
- si calcoli, se possibile la matrice $B = f(A)$, dove $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$ e la si classifichi;
- A e B sono invertibili?

. . . .

Soluzione
La matrice A è anti-hermitiana, $A^\dagger = -A$, è quindi normale e ammette autovettori ortonormali. Gli autovalori si ottengono come radici dell'equazione secolare, ovvero

$$\begin{aligned}\det(A - \alpha I) &= 0\\ \det\begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ -1 & -\alpha & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix} &= 0\\ -\alpha(\alpha^2+1) - \alpha &= 0\\ \alpha(\alpha^2+2) &= 0\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = i\sqrt{2}\,, \qquad \alpha_2 = -i\sqrt{2}\,, \qquad \alpha_3 = 0\,.$$

Gli autovettori sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -i/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ i/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria che diagonalizza A è quindi

$$U = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La funzione $f(z)$ ha un polo semplice in $z = -1$, poiché nessuno degli autovalori è pari a -1 la matrice B esiste e ha rappresentazione diagonale

$$B_d = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\alpha_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+2i\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+2i\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, otteniamo la rappresentazione rispetto alla base canonica

$$\begin{aligned}
B &= U B_d U^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1+2i\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+2i\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & i/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/2 & -i/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+2i\sqrt{2}}{6} & \frac{1-2i\sqrt{2}}{6} & 1/\sqrt{2} \\ \frac{i-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} & \frac{-i-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1+2i\sqrt{2}}{6} & \frac{-1+2i\sqrt{2}}{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & i/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/2 & -i/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La matrice B è unitaria, può essere scritta come $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ ovvero $B = (I+A)^{-1}(I-A)$, infatti:

- $I + A$ è invertibile ed ha autovalori $\lambda_j = 1 - \alpha_j$, cioè: $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2}$, $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}$, e $\lambda_3 = 1$, gli autovettori sono quelli di A, ovvero

$$(I + A)u_j = \lambda_j u_j\,, \qquad j = 1, 2, 3\,.$$

- La matrice inversa $(I + A)^{-1}$ ha gli stessi autovettori e autovalori inversi

$$(I + A)^{-1}u_j = \lambda_j^{-1} u_j\,, \qquad j = 1, 2, 3\,.$$

  Le due matrici $(I + A)$ e $(I + A)^{-1}$ sono diagonalizzabili simultaneamente e quindi commutano.

In base a questo si dimostra che B è unitaria ovvero che

$$
\begin{aligned}
B^\dagger B &= \left[(I-A)(I+A)^{-1}\right]^\dagger (I-A)(I+A)^{-1} \\
&= \left[(I+A)^{-1}\right]^\dagger (I-A^\dagger)(I-A)(I+A)^{-1} \\
&= \left[(I+A)^{-1}\right]^\dagger (I-A)(I+A)(I+A)^{-1} \\
&= \left[(I+A)^{-1}\right]^\dagger (I-A) \\
&= \left[(I-A)^\dagger(I+A)^{-1}\right]^\dagger \\
&= \left[(I+A)(I+A)^{-1}\right]^\dagger = I^\dagger = I\,,
\end{aligned}
$$

e anche

$$
\begin{aligned}
BB^\dagger &= (I+A)^{-1}(I-A)\left[(I+A)^{-1}(I-A)\right]^\dagger \\
&= (I+A)^{-1}(I-A)(I+A)\left[(I+A)^{-1}\right]^\dagger \\
&= (I+A)^{-1}(I+A)(I-A)\left[(I+A)^{-1}\right]^\dagger \\
&= (I-A)\left[(I+A)^{-1}\right]^\dagger \\
&= \left[(I+A)^{-1}(I-A)^\dagger\right]^\dagger \\
&= \left[(I+A)^{-1}(I+A)\right]^\dagger = I^\dagger = I\,.
\end{aligned}
$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Con il metodo delle trasformate di Fourier si risolva l'equazione

$$
\frac{d^4 f(x)}{dx^4} - 2a^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + a^4 f(x) = \frac{d\delta(x)}{dx}\,,
$$

con $a > 0$.

. . . .

Soluzione
La trasformata di Fourier dell'equazione è

$$
\begin{aligned}
k^4 \tilde{f}(k) + 2a^2k^2\tilde{f}(k) + a^4\tilde{f}(k) &= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \\
(k^2+a^2)^2\tilde{f}(k) &= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \\
\tilde{f}(k) &= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\,\frac{2k}{(k^2+a^2)^2} \\
\tilde{f}(k) &= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\,\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{k^2+a^2}\right)\,.
\end{aligned}
$$

l'antitrasformata dà la funzione $f(x)$ come

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}_{-x}\left[\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{k^2+a^2}\right)\right] \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\,(-ix)\mathcal{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2+a^2}\right] \\
&= -\frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\,(-ix)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-a|x|}}{a} \\
&= -\frac{xe^{-a|x|}}{4a}\,.
\end{aligned}
$$