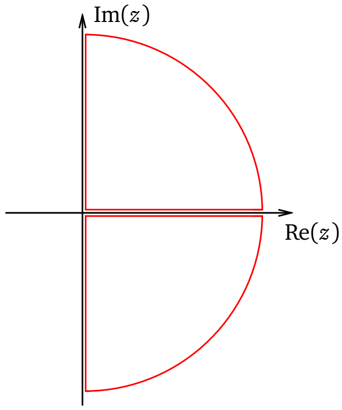
Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 24 febbraio 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (punteggio: 6/30)



Si calcoli l'integrale

$$K = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \,.$$

Suggerimento: Si usino i percorsi di integrazione mostrati nella figura accanto.

Soluzione 1

Riscriviamo l'integrale come

$$K = \int_0^\infty \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{K^+ + K^-}{2} \,,$$

con

$$K_\pm = \int_0^\infty \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{x}} dx \,.$$

L'integranda è una funzione polidroma, definiamo, quindi, un taglio lungo il semiasse reale negativo e consideriamo i percorsi chiusi, contenuti nel primo e nel quarto quadrante del piano complesso, $\Gamma_R^\pm = [0,R] \cup \gamma_R^\pm \cup L_R^\pm$, dove, $\gamma_R^\pm$ e $L_R^\pm$ sono gli archi ed i segmenti così definiti

$$\begin{aligned} \gamma_R^+ &= \{z : |z| = R,\ \arg(z) \in [0, \pi/2]\} \\ \gamma_R^- &= \{z : |z| = R,\ \arg(z) \in [-\pi/2, 0]\} \end{aligned} \,, \qquad \begin{aligned} L_R^+ &= \{z : z = iy,\ y \in [0, R]\} \\ L_R^- &= \{z : z = iy,\ y \in [-R, 0]\} \end{aligned} \,.$$

Per il teorema dei residui

$$0 = \oint_{\Gamma_R^\pm} \frac{e^{\pm iz}}{\sqrt{z}} dz \,,$$

e, considerando i contributi dei singoli tratti, si ha

$$0 = \oint_{\Gamma_R^\pm} \frac{e^{\pm iz}}{\sqrt{z}} dz = \int_0^R \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{x}} dx + \int_{\pm\gamma_R^\pm} \frac{e^{\pm iz}}{\sqrt{z}} dz \pm i \int_{\pm R}^0 \frac{e^{\mp y}}{\sqrt{iy}} dy \,.$$

Nel limite $R \to \infty$, gli integrali sugli archi $\gamma_R^\pm$ si annullano, infatti

$$\left| \int_{\gamma_R^\pm} \frac{e^{\pm iz}}{\sqrt{z}} dz \right| = \left| \int_0^{\pm\pi/2} \frac{e^{\pm iRe^{i\theta}}}{\sqrt{Re^{i\theta}}} Rie^{i\theta} d\theta \right| \le \sqrt{R} \int_0^{\pi/2} e^{-R\,\mathrm{sen}(\theta)} d\theta \le \sqrt{R} \int_0^{\pi/2} e^{-R2\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{-R}}{\sqrt{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \,.$$

Ne consegue che, facendo il limite $R \to \infty$, si ottiene il valore di $K_\pm$, ovvero

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R^\pm} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} dz = K_\pm - \sqrt{\pm i} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \qquad \Rightarrow \qquad K_\pm = \sqrt{\pm i} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \,.$$

Per calcolare l'integrale in dy, consideriamo la sostituzione: $w^2 = y$, così da ottenere una gaussiana, infatti

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = 2\int_0^{\infty} e^{-w^2} dw = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}\,,$$

da cui segue che $K_{\pm} = \sqrt{\pm i\pi} = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4}$.
In definitiva, sommando i due valori $K_{\pm}$, si ottiene l'integrale completo

$$K = \frac{K_+ + K_-}{2} = \sqrt{\pi}\,\cos(\pi/4) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Esercizio 2 (punteggio 6/30)

Si calcolino gli integrali

$$W_C = \int_C |z+1| dz\,, \qquad W_Q = \int_Q |z+1| dz\,,$$

sulla circonferenza unitaria C e sul quadrato unitario Q. In particolare, C è la circonferenza centrata nell'origine e di raggio pari ad 1, Q è il perimetro del quadrato ad essa circoscritto con i lati paralleli agli assi, reale ed immaginario. Si discuta, brevemente, la non applicabilità del teorema di Cauchy.

Soluzione 2

Per ciò che riguarda l'integrale sulla circonferenza, poniamo $z = e^{it}$, con $t \in [-\pi, \pi]$, quindi si ha

$$\begin{aligned} W_C &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{[1+\cos(t)]^2 + \operatorname{sen}^2(t)}\, e^{it}\, i\, dt = i\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2+2\cos(t)}\, e^{it}\, dt = 2i\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t/2)|\, e^{it}\, dt \\ &= 2i\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t/2) e^{it}\, dt = i\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{3it/2} + e^{it/2}\right) dt = \frac{-i-i}{3/2} + \frac{i+i}{1/2} = \frac{8i}{3}\,. \end{aligned}$$

Scomponiamo il perimetro del quadrato, Q, nei quattro lati paralleli agli assi, si hanno quindi quattro contributi. Quelli relativi ai tratti orizzontali (in dx) si cancellano, in particolare si ha

$$\begin{aligned} W_Q &= \int_{-1}^{1} |1+x-i| dx - \int_{-1}^{1} |1+x+i| dx + i\int_{-1}^{1} |2+iy| dy - i\int_{-1}^{1} |iy| dy = i\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{4+y^2} - |y|\right) dy \\ &= 2i\int_0^1 \left(\sqrt{4+y^2} - y\right) dy = 8i\int_0^1 \sqrt{1+y^2/4}\, dy/2 - 2i = 8i\int_0^{1/2} \sqrt{1+w^2}\, dw - i\,. \end{aligned}$$

Posto $w = \sinh(\alpha)$, per sfruttare la relazione iperbolica dell'espressione sotto radice, otteniamo il risultato finale

$$\begin{aligned} W_Q &= 8i\int_0^{\operatorname{arcsenh}(1/2)} \cosh^2(\alpha)\, d\alpha - i = 2i\int_0^{\operatorname{arcsenh}(1/2)} \left(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2\right) d\alpha - i \\ &= i\left[e^{\operatorname{arcsenh}(1/2)} + e^{-\operatorname{arcsenh}(1/2)} + 4\operatorname{arcsenh}(1/2) - 1\right] = i\left[2\sqrt{1+1/4} + 4\operatorname{arcsenh}(1/2) - 1\right] \\ &= i\left[\sqrt{5} + 4\operatorname{arcsenh}(1/2) - 1\right]. \end{aligned}$$

Esercizio 3 (punteggio 6/30)

Si dimostri che il prodotti infiniti

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + ik^{-1}\right), \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \left|1 + ik^{-1}\right|,$$

sono, rispettivamente, non convergente e convergente.

Soluzione 3

Il secondo prodotto è il modulo del primo, quindi la sua non convergenza è dovuta a quella della sua fase. Verifichiamo la convergenza del secondo prodotto semplicemente riscrivendo il modulo dei fattori come

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left|1+ik^{-1}\right| = \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1+k^{-2}} = \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}(1+k^{-2})}\,,$$

il prodotto sotto radice converge in quanto i termini k^{-2} sono reali positivi, la cui serie converge, infatti si ha il ben noto risultato

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Per ciò che riguarda il primo prodotto, passiamo al logaritmo e quindi alle serie per la parte reale ed immaginaria, ovvero

$$\ln\left[\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+ik^{-1}\right)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|1+ik^{-1}\right| + i\sum_{k=1}^{\infty}\arg\left(1+ik^{-1}\right)\,.$$

Da quanto appena dimostrato si ha che la prima serie converge al logaritmo del prodotto dei moduli. Per la seconda serie si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}\arg\left(1+ik^{-1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\arctan\left(k^{-1}\right)\,.$$

Il termine $\arctan\left(k^{-1}\right)$ si comporta asintoticamente come $1/k$, in particolare si ha la limitazione

$$\arctan\left(k^{-1}\right) > \frac{1}{2k}\,, \qquad \forall\, k \geq 1\,.$$

Ne consegue che la serie diverge essendo limitata inferiormente dalla serie divergente di termine $1/k$, si ha cioè

$$\sum_{k=1}^{\infty}\arctan\left(k^{-1}\right) > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1} = \infty\,.$$

Esercizio 4 (punteggio 6/30)

Sia $\hat{A}$ un operatore hermitiano, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, e rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}\,.$$

Si calcoli la norma di $\hat{A}$.
Si determini, inoltre, l'operatore $\hat{B}$, anch'esso definito in E_3, che verifica la condizione

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{B}\,,$$

definendone l'azione sulla base costituita dagli autovettori di $\hat{A}$.

Soluzione 4

La norma dell'operatore è data dal modulo massimo dei sui autovalori, come dimostrato nella soluzione dell'esercizio numero 6. Calcoliamo gli autovalori di $\hat{A}$. L'equazione secolare è

$$\det \begin{pmatrix} 3/2-\alpha & 0 & -1/2 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2-\alpha \end{pmatrix} = -\alpha(3/2-\alpha)^2 + \alpha/4 = -\alpha\left[(3/2-\alpha)^2 - 1/4\right] = 0\,,$$

le cui soluzioni, ovvero gli autovalori di $\hat{A}$, sono

$$\alpha_0 = 0\,, \qquad \alpha_1 = 1\,, \qquad \alpha_2 = 2\,.$$

Ne consegue che la norma dell'operatore è

$$\|\hat{A}\| = 2\,.$$

Gli autovettori sono

$$u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

In forma operatoriale, indicando con $|u_k\rangle$, il vettore rappresentato dal vettore colonna u_k, con $k = 0, 1, 2$, l'equazione agli autovalori in forma operatoriale è

$$\hat{A}|u_k\rangle = k|u_k\rangle\,.$$

Consideriamo l'azione del commutatore, ovvero

$$\begin{gathered}[\hat{A}, \hat{B}]\,|u_k\rangle = \hat{B}|u_k\rangle \\ \hat{A}\hat{B}|u_k\rangle - k\hat{B}|u_k\rangle = \hat{B}|u_k\rangle\,,\end{gathered}$$

quindi

$$\hat{A}\hat{B}|u_k\rangle = (k+1)\hat{B}|u_k\rangle\,.$$

I vettori $\hat{B}|u_k\rangle$ sono autovettori di $\hat{A}$ con autovalori $k+1$, $k = 0, 1, 2$, ne consegue che, per i primi due, si hanno

$$\hat{B}|u_0\rangle = |u_1\rangle\,, \qquad \hat{B}|u_1\rangle = |u_2\rangle\,,$$

mentre, $\hat{B}|u_2\rangle$ dovrebbe essere un autovettore di $\hat{A}$ con autovalore 3, tale autovalore, però, non appartiene allo spettro di $\hat{A}$. D'altra parte l'equazione

$$\hat{A}\hat{B}|u_2\rangle = 3\hat{B}|u_2\rangle\,,$$

sarebbe verificata nel caso in cui $\hat{B}|u_2\rangle$ fosse il vettore nullo, richiediamo cioè

$$\hat{B}|u_2\rangle = |0\rangle\,.$$

Abbiamo quindi definito l'operatore $\hat{B}$, infatti è completamente determinata la sua azione su un qualsiasi vettore. Lo si vede facilmente, considerando che, $\forall|b\rangle \in E_3$, si ha la decomposizione rispetto alla base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=0}^{2}$ ($\hat{A}$ è hermitiano e non degenere),

$$|b\rangle = b^k|u_k\rangle\,,$$

dove i numeri b^k sono le componenti, l'azione di $\hat{B}$ è data da

$$\hat{B}|b\rangle = b^k\hat{B}|u_k\rangle = b^0|u_1\rangle + b^1|u_2\rangle\,.$$

Il vettore ottenuto è sempre ortogonale a $|u_0\rangle$, ma $\hat{B}$ non è un proiettore perché "mescola" le componenti.

Esercizio 5 (punteggio 6/30)

Si risolva l'equazione differenziale

$$\hat{O}_x^n u(x) = f(x)\,,$$

dove: $\hat{O}_x$ è l'operatore differenziale lineare e a coefficienti costanti

$$\hat{O}_x = \frac{d}{dx} + 1\,,$$

$n \in \mathbb{N}$ e la funzione $f(x)$ è tale da avere trasformata di Fourier intera.
Si determini anche la funzione di Green dell'operatore $\hat{O}_x^n$.

Soluzione 5

L'n-esima potenza dell'operatore è

$$\left(\frac{d}{dx} + 1\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} \frac{d^j}{dx^j}\,,$$

e, facendo la trasformata di Fourier dell'equazione, si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} \frac{d^j}{dx^j} u(x)\right] &= \mathscr{F}_k\left[f(x)\right] \\
\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{n} (ik)^j \tilde{u}(k) &= \tilde{f}(k) \\
(1+ik)^n\,\tilde{u}(k) &= \tilde{f}(k) \\
\tilde{u}(k) &= \frac{\tilde{f}(k)}{(1+ik)^n}\,.
\end{aligned}$$

La soluzione in x si ottiene facendo l'antitrasformata di $\tilde{u}(k)$, ovvero

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(k) e^{ikx}}{(1+ik)^n} dk\,.$$

Se $\tilde{f}(k)$ è una funzione intera, l'unico polo dell'integranda è $k = i$ ed è di ordine n. Quindi, usando il lemma di Jordan, possiamo chiudere il percorso di integrazione con un arco infinito e applicare il teorema dei residui o la formula integrale di Cauchy, per risolvere l'integrale. Poiché l'unico polo appartiene al semipiano delle parti immaginarie positive, l'integrale è nullo per valori negativi di x, consideriamo questa eventualità con la funzione di Heaviside. In definitiva si ha

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{\theta(x)}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i\pi(-i)^n}{(n-1)!} \left.\frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}} \tilde{f}(k) e^{ikx}\right|_{k=i} \\
&= \frac{i\theta(x)\sqrt{2\pi}(-i)^n}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{n-1} \frac{d^j}{dk^j} e^{ikx} \left.\frac{d^{n-1-j}}{dk^{n-1-j}} \tilde{f}(k)\right|_{k=i} \\
&= \frac{i\theta(x)\sqrt{2\pi}(-i)^n}{(n-1)!} e^{-x} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{n-1} (ix)^j \left.\frac{d^{n-1-j}}{dk^{n-1-j}} \tilde{f}(k)\right|_{k=i}\,.
\end{aligned}$$

La funzione di Green, $u_0(x)$, si ottiene usando una funzione d'ingresso impulsiva, cioè: $f(x) = \delta(x)$, quindi $\tilde{f}(k) = 1/\sqrt{2\pi}$ e l'unica derivata non nulla è la deriva zero, dalla precedente si ha

$$u_0(x) = \frac{\theta(x)}{(n-1)!} e^{-x} x^{n-1} .$$

Esercizio 6 (6 punti)

Si dimostri che l'operatore

$$\hat{Q} = \exp\left(\hat{P}\right) ,$$

dove $\hat{P}$ è un operatore normale definito nello spazio di Hilbert di dimensione finita E_n, è una contrazione se e solo se gli autovalori $\hat{P}$ hanno tutti parte reale negativa.

Soluzione 6

Un operatore lineare è una contrazione quando la sua norma e minore di uno. Essendo l'operatore normale, l'insieme dei suoi autovettori, $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{n}$, è una base ortonormale dello spazio E_n. Si hanno l'equazione agli autovalori e la condizione di ortonormalità

$$\hat{O}|e_k\rangle = \rho_k |e_k\rangle , \qquad \langle e_k|e_m\rangle = \delta_{km} , \qquad k, m = 1, 2, \ldots n .$$

La norma dell'operatore si ottiene come

$$\|\hat{O}\| = \sup_{|v\rangle} \frac{\|\hat{O}|v\rangle\|}{\|v\|} .$$

Si dimostra che, nel caso in esame

$$\|\hat{O}\| = \max_k \{|\rho_k|\} ,$$

ovvero la norma coincide con il modulo massimo degli autovalori. Infatti, scomponendo il vettore generico $|v\rangle$ rispetto alla base di autovettori, si ha

$$|v\rangle = v^k |e_k\rangle ,$$

quindi

$$\hat{O}|v\rangle = v^k \hat{O}|e_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} v^k \rho_k |e_k\rangle .$$

La norma di questo vettore divisa per la norma di $|v\rangle$ in termini dei coefficienti è

$$\frac{\|\hat{O}|v\rangle\|}{\|v\|} = \frac{\left\|\sum_{k=1}^{n} v^k \rho_k |e_k\rangle\right\|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v^k|^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} |v^k|^2 |\rho_k|^2}{\sum_{k=1}^{n} |v^k|^2}} \leq \sqrt{\max_k \{|\rho_k|^2\}} = \max_k \{|\rho_k|\} .$$

Poichè la norma dell'operatore è l'estremo superiore di tale quantità si ha

$$\|\hat{O}\| = \max_k |\rho_k| .$$

Nel caso in considerazione, abbiamo che, essendo $\hat{P}$ normale anche $\hat{Q} = e^{\hat{P}}$ lo è, infatti ha lo stesso insieme di autovettori ortonormali. Gli autovalori di $\hat{Q}$ saranno gli esponenziali di quelli di $\hat{P}$, ovvero avremo le due equazioni:

$$\hat{P}|u_k\rangle = \lambda_k |u_k\rangle , \qquad \hat{Q}|u_k\rangle = e^{\hat{P}}|u_k\rangle = e^{\lambda_k}|u_k\rangle , \qquad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Ne consegue che la norma di $\hat{Q}$ è

$$\|\hat{Q}\| = \max_k \left\{ \left| e^{\lambda_k} \right| \right\} = \exp\left[\max_k \left\{ \mathrm{Re}(\lambda_k) \right\} \right] ,$$

se tutte le parti reali sono negative si ha che la norma di $\hat{Q}$ è minore di uno e quindi l'asserto. Infatti in questo caso, abbiamo la definizione di contrazione, cioè: $\forall |a\rangle, |b\rangle \in E_n$

$$\left\| \hat{Q}|a\rangle + \hat{Q}|b\rangle \right\| = \left\| \hat{Q}\left(|a\rangle + |b\rangle \right) \right\| \leq \left\| \hat{Q} \right\| \, \|a + b\| < \|a + b\| \, .$$