Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 23 luglio 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Con l'ausilio del lemma di Marie Camille Ennemond Jordan si calcoli l'integrale

$$\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\big(x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\big)^2}{x^6}\,dx\,.$$

Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha una singolarità eliminabile nell'origine, infatti in $x=0$, la funzione $\big(x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\big)^2$ a numeratore possiede uno zero di ordine sei, così come il polinomio che ne rappresenta il denominatore, la semplice potenza x^6. Per verificare quanto asserito, considerando gli sviluppi in serie di Taylor nell'origine delle funzioni trigonometriche, otteniamo quello della funzione a numeratore come

$$\begin{aligned}
(x\cos(x)-\operatorname{sen}(x))^2 &= \left(x\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j}}{(2j)!}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^2 = \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{(2j)!}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)^2 \\
&= \left[\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{(2j)!}-\frac{1}{(2j+1)!}\right)x^{2j+1}\right]^2 = \left[\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{2j}{(2j+1)!}\right)x^{2j+1}\right]^2 \\
&= \left(-\frac{2}{3!}x^3+\frac{4}{5!}x^5-\frac{6}{7!}x^7+\mathcal{O}\left(x^9\right)\right)^2 = \frac{1}{9}x^6-\frac{1}{45}x^8+\mathcal{O}\left(x^{10}\right),
\end{aligned}$$

ne consegue che il valore limite nell'origine della funzione integranda è finito, in particolare si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\big(x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\big)^2}{x^6} = \lim_{x\to 0}\frac{x^6/9-x^8/45+\mathcal{O}\left(x^{10}\right)}{x^6} = \frac{1}{9}\,.$$

Deformiamo con continuità il percorso di integrazione, passando dall'asse reale all'asse reale dentato con una semicirconferenza di raggio ϵ, centrata nell'origine, appartenente al semipiano della parti immaginarie positive e orientata in senso orario, cioè negativo, ovvero

$$\mathbb{R}\to\Gamma_\epsilon = (-\infty,-\epsilon]\cup\left(-\left\{z : z=\epsilon e^{i\theta}\,,\theta\in[0,\pi]\right\}\right)\cup[\epsilon,\infty)\,.$$

Inoltre, usando le formule di Eulero per le funzioni trigonometriche, l'integrale assume la forma

$$\begin{aligned}
\Omega &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\big(x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)\big)^2}{x^6}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{\big(z\cos(z)-\operatorname{sen}(z)\big)^2}{z^6}dz \\
&= \frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{\left[z\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)-\left(-ie^{iz}+ie^{-iz}\right)\right]^2}{z^6}dz = \frac{1}{4}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{\left[e^{iz}(z+i)+e^{-iz}(z-i)\right]^2}{z^6}dz \\
&= \frac{1}{4}\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{e^{2iz}(z+i)^2}{z^6}dz+\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{e^{-2iz}(z-i)^2}{z^6}dz+2\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma_\epsilon}\frac{z^2+1}{z^6}dz\right).
\end{aligned}$$

Usiamo il lemma di Jordan per calcolare i tre integrali dell'espressione precedente

$$\Omega = \frac{1}{4}\lim_{R\to\infty}\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma^+_{\epsilon,R}}\frac{e^{2iz}\,(z+i)^2}{z^6}dz + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma^-_{\epsilon,R}}\frac{e^{-2iz}\,(z-i)^2}{z^6}dz + 2\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma^+_{\epsilon,R}}\frac{z^2+1}{z^6}dz\right),$$

dove i percorsi chiusi $\Gamma^{\pm}_{\epsilon,R}$ sono

$$\Gamma^{\pm}_{\epsilon,R} = [-R,-\epsilon]\cup\left(-\left\{z : z=\epsilon e^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\right\}\right)\cup[\epsilon,R]\cup\left\{z : z=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\right\},$$

ovvero le unioni della intersezione $\Gamma_\epsilon \cap \{z : \mathrm{Re}(z)\in[-R,R]\}$, tra il percorso originario e il rettangolo infinito, simmetrico rispetto all'asse immaginario, delle parti reali comprese tra $-R$ ed R, e le semi-circonferenze centrate nell'origine, di raggio $R>\epsilon$, appartenenti al semipiano delle parti immaginarie, rispettivamente, positive e negative. La scelta dell'uno o dell'altro percorso è determinata dal segno del coefficiente dell'unità immaginaria ad esponente dell'esponenziale delle tre funzioni integrande. Mentre per i primi due integrali tale scelta è obbligata, per il terzo, essendo nullo tale coefficiente e uniformemente infinitesima la funzione integranda sulla circonferenza al divergere del raggio, si ha la libertà di usare indifferentemente uno dei due percorsi. L'unica singolarità al finito delle funzioni integrande è il polo di ordine 6 nell'origine, che è avvolto soltanto dal percorso $\Gamma^-_{\epsilon,R}$, ne consegue che i limiti per $R\to\infty$ del primo e del terzo termine sono nulli e si ha

$$\Omega = \frac{1}{4}\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\Gamma^-_{\epsilon,R}}\frac{e^{-2iz}\,(z-i)^2}{z^6}dz = \frac{1}{4}\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\left(\int_{\Gamma^-_{\epsilon,R}}\frac{e^{-2iz}}{z^4}dz - 2i\int_{\Gamma^-_{\epsilon,R}}\frac{e^{-2iz}}{z^5}dz - \int_{\Gamma^-_{\epsilon,R}}\frac{e^{-2iz}}{z^6}dz\right)\right).$$

Usando il teorema dei residui, considerando che il percorso chiuso è orientato in senso negativo e sfruttando l'indipendenza del risultato dai valori di ϵ ed R,

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{4}\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{\Gamma^-_{\epsilon,R}}\frac{e^{-2iz}}{z^4}dz - 2i\int_{\Gamma^-_{\epsilon,R}}\frac{e^{-2iz}}{z^5}dz - \int_{\Gamma^-_{\epsilon,R}}\frac{e^{-2iz}}{z^6}dz\right)\\ &= -\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}e^{-2iz}\bigg|_{z=0} - 2i\,\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}e^{-2iz}\bigg|_{z=0} - \frac{1}{5!}\frac{d^5}{dz^5}e^{-2iz}\bigg|_{z=0}\right)\\ &= -\frac{i\pi}{2}\left(\frac{1}{3!}(-2i)^3 - 2i\frac{1}{4!}(-2i)^4 - \frac{1}{5!}(-2i)^5\right)\\ &= -\frac{i\pi(-2i)^5}{2}\left(-\frac{1}{4!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right),\end{aligned}$$

da cui, con semplici passaggi algebrici, si ottiene il risultato finale

$$\Omega = \frac{2\pi}{15}.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga l'espansione di Karl Theodor Wilhelm Weierstrass della funzione

$$f(z) = e^{5z/3}\frac{\mathrm{sen}^4\left(\sqrt{z}\right)}{z^2}.$$

Soluzione del secondo problema

L'espansione di Weierstrass per una funzione intera $h(z)$ avente zeri nei punti della successione $\{z_k\}_k\subset\mathbb{C}$, le cui molteplicità sono gli elementi omologhi della successione $\{\beta_k\}_k\subset\mathbb{N}$ e assumendo che $0\notin\{z_k\}_k$, è

$$h(z) = h(0)e^{zh'(0)/h(0)}\prod_k\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^{\beta_k}e^{\beta_k z/z_k}.$$

La funzione data è intera, in quanto prodotto di funzioni intere: l'esponenziale $e^{5z/3}$ e $\mathrm{sen}^4\left(\sqrt{z}\right)/z^2$, la prima non ha zeri, quindi l'espansione cercata può essere ottenuta considerando soltanto la seconda funzione. Fattorizziamo come

$$f(z) = f_1(z)f_2(z), \qquad \text{con: } f_1(z) = e^{5z/3},\ f_2(z) = \frac{\mathrm{sen}^4\left(\sqrt{z}\right)}{z^2},$$

calcoliamo l'espansione di Weierstrass della funzione $f_2(z)$

$$f_2(z) = f_2(0)e^{z f_2'(0)/f_2(0)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\beta_k} e^{\beta_k z/z_k}\,,$$

dove $\{z_k\}_k \subset \mathbb{C}$, assumendo che $0 \notin \{z_k\}_k$, è la successione degli zeri della funzione $f_2(z)$ e $\{\beta_k\}_k \subset \mathbb{N}$ è la successione delle molteplicità omologhe, arriviamo così all'espansione completa

$$f(z) = f_1(z) f_2(0)e^{z f_2'(0)/f_2(0)} \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\beta_k} e^{\beta_k z/z_k}\,.$$

Prima di determinare gli zeri della funzione $f_2(z)$, facciamo il cambiamento di variabile $w = \sqrt{z}$, si ha

$$f_2(w) = f_2\left(z\left(w\right)\right) = \frac{\operatorname{sen}^4(w)}{w^4}\,.$$

Questa funzione ha come zeri gli elementi della successione $\{w_k, w_{-k}\}_{k=1}^{\infty}$, con $w_k = k\pi$, è immediato osservare che gli zeri sono tutti di ordine quattro, quindi $\beta_k = 4$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. La singolarità nell'origine è, invece, eliminabile, infatti

$$\lim_{w\to 0} f_2(w) = \lim_{w\to 0} \frac{\operatorname{sen}^4(w)}{w^4} = \lim_{w\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(w)}{w}\right)^4 = 1\,,$$

quindi si ha il valore della funzione nell'origine: $f_2(0) = 1$. Per calcolare il valore della derivata prima della funzione $f_2(z)$ nell'origine possiamo usare lo sviluppo in serie di Taylor che si ottiene a partire da quello noto della funzione seno, si ha

$$\frac{\operatorname{sen}^4(w)}{w^4} = \frac{1}{w^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{w^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)^4 = \left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{w^{2j}}{(2j+1)!}\right)^4 = \left(1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \mathcal{O}\left(w^6\right)\right)^4 = 1 - w^2\frac{4}{3!} + \mathcal{O}\left(w^4\right),$$

da cui, non essendo presenti i termini con potenze dispari, si evince che tutte le derivate di ordine dispari sono nulle nell'origine, ovvero $f_2'(0) = 0$. Alla luce di questi risultati, l'espansione di Weierstrass della funzione $f_2(w)$ è

$$f_2(w) = f_2(0)e^{\frac{w f_2'(0)}{f_2(0)}} \prod_k \left(1 - \frac{w}{w_k}\right)^{\beta_k} e^{\frac{\beta_k z}{w_k}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{w}{k\pi}\right)^4 e^{\frac{4z}{k\pi}} \prod_{k'=1}^{\infty}\left(1 - \frac{w}{-k'\pi}\right)^4 e^{-\frac{4z}{k'\pi}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{w^2}{(k\pi)^2}\right)^4,$$

che riportata nella variabile $z = w^2$ diventa

$$f_2(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^4}{(k\pi)^2}\right)^4,$$

in definitiva l'espansione di Weierstrass è

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) = e^{5z/3} \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{(k\pi)^2}\right)^4.$$

Perché si fattorizza

È interessante osservare che l'espansione di Weierstrass nella forma nota, che chiameremo classica, ovvero quella descritta all'inizio della paragrafo dedicato alla risoluzione di questo problema, sia applicabile sono nei casi in cui la derivata logaritmica della funzione data, che qui indichiamo con $f(z)$, sia regolare all'infinito. Infatti, nella dimostrazione della stessa espressione, si usa lo sviluppo in serie di Mittag-Leffler per la derivata logaritmica $L(z) = f'(z)/f(z)$, assumendo che la parte intera sia costante, ovvero che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f'(w_k)}{f(w_k)} = \text{costante}\,,$$

dove $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una generica successione crescente, cioè: $|w_{k+1}| > |w_k|$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, che si accumula all'infinito, che non contiene zeri della funzione $f(z)$, ovvero singolarità della sua derivata logaritmica $L(z)$. Mentre questa condizione è verificata dalla funzione esponenziale e^{az}, per ogni valore di $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, infatti, per ogni successione crescente $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\lim_{k\to\infty} \left.\frac{de^{az}}{dz}\right|_{z=w_k} \frac{1}{e^{aw_k}} = \lim_{k\to\infty} ae^{aw_k}e^{-aw_k} = a\,,$$

non lo è se ad esponente sono presenti potenze maggiori dell'unità della variabile z. Ad esempio la derivata logaritmica della funzione Gaussiana e^{bz^2}, con $b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, diverge linearmente al divergere di z, in particolare, sempre considerando una successione crescente $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, tale che $w_k \to \infty$ per $k \to \infty$, si ha

$$\lim_{k\to\infty} \left.\frac{de^{bz^2}}{dz}\right|_{z=w_k} e^{-bw_k^2} = \lim_{k\to\infty} 2bw_k e^{bw_k^2}e^{-bw_k^2} = \lim_{k\to\infty} 2bw_k = \infty\,.$$

Alla luce di quanto asserito, nel caso in cui si abbia una funzione intera $f(z)$ proporzionale ad un esponenziale con ad esponente un polinomio della variabile z di grado maggiore o uguale al secondo è necessario fattorizzare. Dovremmo quindi procedere come fatto nel caso del secondo problema. Sia $f(z) = e^{P_n(z)}g(z)$, dove $P_n(z)$ è un polinomio di grado $n \geq 2$ e $g(z)$ è una funzione intera con le proprietà richieste per avere un'espansione di Weierstrass classica, allora l'espansione di Weierstrass della funzione completa può essere scritta come

$$[\text{espansione di Weierstrass di } f(z)] = e^{P_n(z)}\,\mathscr{W}[g]\,,$$

dove il simbolo $\mathscr{W}[g]$ indica, appunto, l'espansione di Weierstrass classica della funzione $g(z)$.
Nel caso in cui, invece, il polinomio $P_n(z)$ fosse di primo grado, $n = 1$, allora si potrebbe procedere seguendo il metodo classico. Come esempio consideriamo la funzione data nel secondo problema.
Tale funzione, come detto, è intera, infatti la singolarità nell'origine è eliminabile, in quanto esiste ed è finito il valore limite. Possiamo considerarne lo sviluppo in serie di Taylor nell'origine, così da ottenere facilmente sia il valore della funzione che quello della sua derivata prima in $z = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^{5z/3}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j z^{(2j+1)/2}/(2j+1)!\right)^4}{z^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(5z/3)^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{z^j}{(2j+1)!}\right)^4 \\
&= \left(1+\frac{5z}{3}+\frac{(5z/3)^2}{2!}+\mathscr{O}\left(z^3\right)\right)\left(1-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}+\mathscr{O}\left(z^3\right)\right)^4 = 1+z\left(\frac{5}{3}-\frac{4}{3!}\right)+\mathscr{O}\left(z^2\right) \\
&= 1+z+\mathscr{O}\left(z^2\right).
\end{aligned}$$

I coefficienti della potenza zero, il termine costante, e della prima potenza della variabile z sono rispettivamente il valore della funzione e della sua derivata prima nell'origine, sono entrambi unitari, cioè: $f(0) = f'(0) = 1$. Riportando quanto ottenuto nella variabile $w = \sqrt{z}$ in quella originaria $z = w^2$, si ha che la funzione ha poli nei punti dell'insieme $\left\{z_k = (k\pi)^2\right\}_{k=1}^{\infty}$.
Si tratta di poli di ordine quattro, come si verifica studiando, al variare di $m \in \mathbb{N}$, il limite

$$\lim_{z\to z_k}\frac{f(z)}{(z-z_k)^m}\,,\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

L'ordine dello zero è dato dal maggiore dei valori di m che permette di ottenere un limite diverso da zero e non divergente. A tal fine è sufficiente considerare la sola quarta potenza della funzione seno che compare a numeratore della funzione data. Infatti, in ogni $z = z_k$, con $k \in \mathbb{N}$, si ha $z \neq 0$, quindi il fattore rimanente $e^{5z/3}/z^2$ non ha in tali punti né poli né zeri e l'azzeramento della funzione è determinato dalla sola funzione seno alla quarta potenza.
Usando l'identità

$$\text{sen}^4\left(\sqrt{z}\right) - = \left((-1)^k\text{sen}\left(\sqrt{z}-k\pi\right)\right)^4 = \text{sen}^4\left(\sqrt{z}-k\pi\right),\qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,,$$

ovvia conseguenza della periodicità della funzione seno, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_k}\frac{\text{sen}^4\left(\sqrt{z}\right)}{(z-z_k)^m} &= \lim_{z\to(k\pi)^2}\frac{\text{sen}^4\left(\sqrt{z}-k\pi\right)}{\left(z-(k\pi)^2\right)^m} = \lim_{z\to(k\pi)^2}\frac{\text{sen}^4\left(\sqrt{z}-k\pi\right)}{\left(\sqrt{z}-k\pi\right)^m\left(\sqrt{z}+k\pi\right)^m} \\
&= \frac{1}{(2k\pi)^m}\lim_{z\to(k\pi)^2}\frac{\text{sen}^4\left(\sqrt{z}-k\pi\right)}{\left(\sqrt{z}-k\pi\right)^m} = \frac{1}{(2k\pi)^m}\left\{\begin{array}{ll} 0 & m<3 \\ 1 & m=4 \\ \infty & m>4 \end{array}\right.\,,
\end{aligned}$$

per cui si ottiene che gli zeri sono tutti di ordine quattro. Gli insiemi degli zeri e delle corrispondenti molteplicità sono rispettivamente $\{z_k = (k\pi)^2\}_{k=1}^{\infty}$ e $\{\beta_k = 4\}_{k=1}^{\infty}$. Ricordando, infine, che $f(0) = f'(0) = 1$, l'espansione di Weierstrass è

$$f(z) = f(0)e^{zf'(0)/f(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\beta_k} e^{\beta_k z/z_k} = e^z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4 e^{4z/(k\pi)^2}.$$

Solo apparentemente quest'ultima espressione non coincide con quella ottenuta con il metodo del cambiamento di variabile e della fattorizzazione, ovvero con

$$f(z) = e^{5z/3} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4.$$

Al fine di verificare la coincidenza delle due espressioni, calcoliamo esplicitamente il prodotto degli esponenziali come esponenziale della somma, cioè

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4 e^{4z/(k\pi)^2} = e^z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4 \prod_{j=1}^{\infty} e^{4z/(j\pi)^2} \\ &= e^z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4 \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4z}{(j\pi)^2}\right) = e^z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4 \exp\left(\frac{4z}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right). \end{aligned}$$

La serie è la ben nota somma dei quadrati degli inversi dei numeri naturali il cui valore è

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione precedente si ottiene

$$f(z) = e^z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4 \exp\left(\frac{4z}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right) = e^z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4 e^{2z/3}.$$

Infine, moltiplicando i due esponenziali, dipendenti solo dalla variabile z e non dall'indice del prodotto, si ha

$$f(z) = e^{5z/3} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{(k\pi^2)}\right)^4,$$

che coincide con l'espressione già ottenuta nella trattazione precedente.

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la parte principale della serie di Pierre Alphonse Laurent centrata in $z = 0$ e convergente in $z = \pi$ della funzione

$$g(z) = \frac{z}{\big(z\cos(z) - \operatorname{sen}(z)\big)^2}.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione ha singolarità in tutti i punti della successione $\{z_k\}_k$ tali che

$$z_k \cos(z_k) - \operatorname{sen}(z_k) = 0.$$

Nell'origine si ha un polo di ordine cinque, infatti, usando le serie di Taylor delle funzioni trigonometriche, si ottiene la serie di Taylor del denominatore come

$$\begin{aligned} \big(z\cos(z) - \operatorname{sen}(z)\big)^2 &= \left(z\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!} - \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)^2 = \left[\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j z^{2j+1}\left(\frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!}\right)\right]^2 \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j z^{2j+1} \frac{2j}{(2j+1)!}\right)^2 = \left(-z^3\frac{1}{3} + z^5\frac{4}{5!} - z^7\frac{6}{7!} + \mathcal{O}\left(z^9\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Poiché, nell'origine, la funzione a denominatore ha uno zero di ordine sei, mentre quella a numeratore ha uno zero di ordine uno, il polo in $z = z_0 = 0$ risulta di ordine cinque.
La singolarità più vicina a quella nell'origine, che indichiamo con z_1, si ottiene, come già anticipato, risolvendo l'equazione $z_1 \cos(z_1) - \mathrm{sen}(z_1) = 0$. Per le parità delle funzioni trigonometriche, per ogni soluzione z_k si ha anche la soluzione opposta $-z_k$. Infatti se z_k è tale che $z_k \cos(z_k) - \mathrm{sen}(z_k) = 0$, allora in $z = -z_k$ si ha

$$-z_k \cos(-z_k) - \mathrm{sen}(-z_k) = -z_k \cos(z_k) + \mathrm{sen}(z_k) = -\big(z_k \cos(z_k) - \mathrm{sen}(z_k)\big) = 0\,.$$

Indichiamo le suddette coppie di soluzioni con i simboli

$$z_k^{\pm} = \pm |z_k|\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Per ottenere una stima di z_1^+ potremmo procedere graficamente, disegnando le due curve $c_1(x) = x\cos(x)$ e $c_2(x) = \mathrm{sen}(x)$. Si osserva agevolmente che nell'intervallo $(0, \pi)$ la funzione $c_1(x)$ risulta sempre strettamente minore della funzione $c_2(x)$, il che implica $z_1^+ > \pi$ e, di conseguenza, $z_1^- = -z_1^+ < -\pi$. Ovvero, dovremo determinare la parte principale della serie di Laurent centrata nell'origine e convergente nella corona circolare, anch'essa centrata in $z = 0$, con raggio interno nullo e raggio esterno z_1^+, cioè l'insieme $C_{0,z_1^+}(0) = \{z : 0 < |z| < z_1^+\}$. Alla luce di questi risultati, sfruttando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione a denominatore e la somma della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{z}{(z\cos(z) - \mathrm{sen}(z))^2} = z\left(-z^3\frac{1}{3} + z^5\frac{4}{5!} - z^7\frac{6}{7!} + \mathcal{O}\left(z^9\right)\right)^{-2} = z\frac{9}{z^6}\left(1 - z^2\frac{12}{5!} + z^4\frac{18}{7!} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^{-2} \\
&= \frac{9}{z^5}\left[1 + z^2\frac{1}{10} - z^4\frac{1}{280} + \mathcal{O}\left(z^6\right) + \left(z^2\frac{1}{10} - z^4\frac{1}{280} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^2 + \cdots\right] \\
&\quad \times \left[1 + z^2\frac{1}{10} - z^4\frac{1}{280} + \mathcal{O}\left(z^6\right) + \left(z^2\frac{1}{10} - z^4\frac{1}{280} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^2 + \cdots\right] \\
&= \frac{9}{z^5}\left[1 + z^2\frac{1}{10} + z^4\left(-\frac{1}{280} + \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right]\left[1 + z^2\frac{1}{10} + z^4\left(-\frac{1}{280} + \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right] \\
&= \frac{9}{z^5}\left(1 + z^2\frac{1}{10} + z^4\frac{9}{1400} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right)\left(1 + z^2\frac{1}{10} + z^4\frac{9}{1400} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right) \\
&= \frac{9}{z^5}\left(1 + z^2\frac{1}{5} + z^4\left(\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 2\frac{9}{1400}\right) + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right) \\
&= \frac{9}{z^5}\left(1 + z^2\frac{1}{5} + z^4\frac{4}{175} + \mathcal{O}\left(z^6\right)\right) \\
&= 9\frac{1}{z^5} + \frac{9}{5}\frac{1}{z^3} + \frac{36}{175}\frac{1}{z} + \mathcal{O}(z)\,.
\end{aligned}$$

Dall'ultima espressione si deducono i coefficienti di Laurent cercati, cioè quelli della parte principale della serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k$$

della funzione $f(z)$, essi sono

$$C_k = 0\,,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}, \text{con: } k < -5\,,\ C_{-4} = C_{-2} = 0\,, \quad C_{-5} = 9\,,\ C_{-3} = \frac{9}{5}\,,\ C_{-1} = \frac{36}{175}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che l'operatore

$$\hat{C} = e^{\hat{A}}\left(e^{\hat{A}^\dagger}\right)^{-1}\,,$$

definito in uno spazio di David Hilbert infinito-dimensionale e separabile E, non è compatto se l'operatore $\hat{A}$, definito, ovviamente, nello stesso spazio E, è normale.
Memorandum. Uno spazio di David Hilbert si definisce separabile se e solo se ammette una base ortonormale costituita, al più, da un'infinità numerabile di vettori.
Consilium. Potrebbe essere di aiuto il prendere in considerazione successioni di vettori ortonormali.

Soluzione del quarto problema

Per dimostrare la non compattezza dell'operatore facciamo vedere come dalla successione che si ottiene dall'azione dello stesso operatore sui vettori di una successione limitata non sia possibile estrarre una sotto-successione convergente.
Usando la normalità dell'operatore $\hat{A}$, ovvero il fatto che esso commuti con il suo aggiunto e la formula di Baker, Campbell e Hausdorff, possiamo scrivere il prodotto degli esponenziali come l'esponenziale della somma, ovvero

$$\hat{C} = e^{\hat{A}} e^{-\hat{A}^\dagger} = e^{\hat{A}-\hat{A}^\dagger} .$$

Poiché l'operatore ad esponente è anti-hermitiano, infatti l'aggiunto coincide con l'opposto, cioè

$$\left(\hat{A}-\hat{A}^\dagger\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger - \hat{A} = -\left(\hat{A}-\hat{A}^\dagger\right) ,$$

si ha che l'operatore $\hat{C}$ è unitario. Si verifica che

$$\hat{C}\hat{C}^\dagger = e^{\hat{A}-\hat{A}^\dagger}\left(e^{\hat{A}-\hat{A}^\dagger}\right)^\dagger = e^{\hat{A}-\hat{A}^\dagger} e^{\hat{A}^\dagger-\hat{A}} = e^{\hat{A}-\hat{A}^\dagger+\hat{A}^\dagger-\hat{A}} = \hat{I} ,$$
$$\hat{C}^\dagger\hat{C} = \left(e^{\hat{A}-\hat{A}^\dagger}\right)^\dagger e^{\hat{A}-\hat{A}^\dagger} = e^{\hat{A}^\dagger-\hat{A}} e^{\hat{A}-\hat{A}^\dagger} = e^{\hat{A}^\dagger-\hat{A}+\hat{A}-\hat{A}^\dagger} = \hat{I} .$$

Essendo unitario, l'operatore $\hat{C}$ conserva il prodotto scalare e quindi trasforma insiemi di vettori ortonormali in altri insiemi di vettori che sono ancora ortonormali.
Consideriamo, nello spazio vettoriale E, la successioni ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, con $\langle u_k|u_j\rangle = \delta_j^k$, $\forall\, k, j \in \mathbb{N}$. Ciò è possibile in quanto lo spazio vettoriale è separabile. La successione è limitata, infatti, per definizione, tutti i vettori hanno norma unitaria e quindi finita, cioè: $\|u_k\| = 1 < \infty$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. La successione che si ottiene facendo agire l'operatore $\hat{C}$ sui vettori di questa è anch'essa ortonormale poiché, come già asserito, l'operatore è unitario e perciò conserva il prodotto scalare. Infatti si ha

$$\left\{|v_k\rangle = \hat{C}|u_k\rangle\right\}_{k=1}^{\infty} , \qquad \langle v_k|v_j\rangle = \langle u_k|\hat{C}^\dagger\hat{C}|u_j\rangle = \langle u_k|u_j\rangle = \delta_j^k , \qquad \forall\, k, j \in \mathbb{N} .$$

Ogni sotto-successione di una successione ortonormale è ancora ortonormale e come tale non è convergente. Sia $\left\{|v_{p_k}\rangle\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \{|v_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ una generica sotto-successione della successione originaria $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, definita dalla successione monotona crescente di numeri naturali $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, con $p_{k+1} > p_k$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
È immediato osservare che questa sotto-successione non è una successione di Cauchy e quindi non converge. A tal fine è sufficiente osservare che il limite per $k \to \infty$ della norma della differenza tra due vettori consecutivi non è nullo, infatti, per l'ortonormalità dei vettori si ha

$$\lim_{k\to\infty}\left\|v_{p_k} - v_{p_{k+1}}\right\| = \lim_{k\to\infty}\left(\langle v_{p_k} - v_{p_{k+1}}|v_{p_k} - v_{p_{k+1}}\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{k\to\infty}\Big(\underbrace{\langle v_{p_k}|v_{p_k}\rangle}_{\left\|v_{p_k}\right\|=1} + \underbrace{\langle v_{p_{k+1}}|v_{p_{k+1}}\rangle}_{\left\|v_{p_{k+1}}\right\|=1} + \underbrace{\langle v_{p_k}|v_{p_{k+1}}\rangle}_{=\delta_{p_{k+1}}^{p_k}=0} + \underbrace{\langle v_{p_{k+1}}|v_{p_k}\rangle}_{=\delta_{p_k}^{p_{k+1}}=0}\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} .$$

Poiché questo risultato si ha $\forall\, \{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, abbiamo dimostrato che dalla successione $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, ottenuta dall'azione dell'operatore $\hat{C}$ sui vettori della successione ortonormale e quindi limitata $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$, con $|v_k\rangle = \hat{C}|u_k\rangle$, $\forall\, | \in\rangle\mathbb{N}$, non è possibile estrarre una sotto-successione convergente il che implica la non compattezza dello stesso operatore $\hat{C}$.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Avvalendosi della trasformata di Jean Baptiste Joseph Fourier, si ottenga una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$f''''(x) - \alpha^4 f(x) = \delta''(x-\beta) ,$$

con: α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluzione del quinto problema

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri dell'equazione, per il primo si ha

$$[\text{primo membro}] = \mathscr{F}_k\left[f'''' - \alpha^4 f\right] = \mathscr{F}_k\left[f''''\right] - \alpha^4\mathscr{F}_k[f] = (ik)^4\mathscr{F}_k[f] - \alpha^4\mathscr{F}_k[f] = \left((ik)^4 - \alpha^4\right)\tilde{f}(k) ,$$

dove si è posto $\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k[f]$. La trasformata di Fourier del secondo membro si ottiene applicando direttamente la definizione e integrando per parti per tre volte, ovvero

$$
\begin{aligned}
[\text{secondo membro}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x-\beta) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(\underbrace{\delta'(x-\beta) e^{-ikx}\big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + ik \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-\beta) e^{-ikx} dx \Big) \\
&= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \Big(\underbrace{\delta(x-\beta) e^{-ikx}\big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + ik \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\beta) e^{-ikx} dx \Big) = \frac{(ik)^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik\beta} .
\end{aligned}
$$

Eguagliando i due risultati si ottiene un'equazione algebrica per la trasformata di Fourier $\tilde{f}(k)$, da cui si ricava la stessa trasformata di Fourier come

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(ik)^2 e^{-ik\beta}}{(ik)^4 - \alpha^4} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ik\beta}}{(ik)^2 - \alpha^2} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ik\beta}}{(ik)^2 + \alpha^2} \\
&= \frac{1}{4\alpha\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-ik\beta}}{ik - \alpha} - \frac{e^{-ik\beta}}{ik + \alpha} \right) + \frac{1}{4i\alpha\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-ik\beta}}{ik - i\alpha} - \frac{e^{-ik\beta}}{ik + i\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{4i\alpha\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-ik\beta}}{k + i\alpha} - \frac{e^{-ik\beta}}{k - i\alpha} \right) + \frac{1}{4\alpha\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-ik\beta}}{k + \alpha} - \frac{e^{-ik\beta}}{k - \alpha} \right) .
\end{aligned}
$$

L'anti-trasformata di Fourier della funzione $\tilde{f}(k)$ dà la soluzione particolare $f(x)$ cercata. Consideriamo singolarmente i quattro contributi, cioè

$$
f(x) = \mathscr{F}_{-x}\big[\tilde{f}\big] = \frac{1}{4i\alpha\sqrt{2\pi}} \left(\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k + i\alpha} \right] - \mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k - i\alpha} \right] \right) + \frac{1}{4\alpha\sqrt{2\pi}} \left(\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k + \alpha} \right] - \mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k - \alpha} \right] \right) .
$$

La prime due anti-trasformate sono

$$
\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k \pm i\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-\beta)}}{k \pm i\alpha} dk ,
$$

usiamo il lemma di Jordan e il teorema dei residui, ovvero

$$
\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k + i\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-\beta)}}{k + i\alpha} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \begin{cases} \displaystyle\oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{ik(x-\beta)}}{k + i\alpha} dk = 0 & x > \beta \\ \displaystyle\oint_{\Gamma_R^-} \frac{e^{ik(x-\beta)}}{k + i\alpha} dk = -2i\pi e^{\alpha(x-\beta)} = -2i\pi e^{-\alpha|x-\beta|} & x < \beta \end{cases} ,
$$

$$
\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k - i\alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-\beta)}}{k - i\alpha} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{R\to\infty} \begin{cases} \displaystyle\oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{ik(x-\beta)}}{k - i\alpha} dk = 2i\pi e^{-\alpha(x-\beta)} = 2i\pi e^{-\alpha|x-\beta|} & x > \beta \\ \displaystyle\oint_{\Gamma_R^-} \frac{e^{ik(x-\beta)}}{k - i\alpha} dk = 0 & x < \beta \end{cases} ,
$$

dove i percorsi chiusi $\Gamma_R^{\pm}$ sono

$$
\Gamma_R^{+} = [-R, R] \cup \left\{ k : k = Re^{\pm i\phi}, \phi \in [0, \pi] \right\} .
$$

La differenza dei precedenti risultati, che è proporzionale al primo termine dell'anti-trasformata di Fourier cercata è

$$
\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k + i\alpha} \right] - \mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k - i\alpha} \right] = -2i\pi\, e^{-\alpha|x-\beta|} .
$$

Per ciò che concerne il secondo termine dell'anti-trasformata di Fourier, si hanno gli integrali in valore principale

$$
\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k \pm \alpha} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-\beta)}}{k \pm \alpha} dk .
$$

Li calcoliamo avvalendoci della formula di Sokhotsky-Plemelj e quindi, come per gli integrali del primo termine, il lemma di Jordan unitamente al teorema dei residui, avremo

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k\pm\alpha}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\beta)}}{k\pm\alpha}dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-\beta)}}{k\pm\alpha+i\epsilon}dk + i\pi e^{\pm i\alpha(x-\beta)}\right)\\ &= \begin{cases} 0+i\pi e^{\mp i\alpha(x-\beta)} = i\pi e^{\mp i\alpha(x-\beta)} & x>\beta\\ -2i\pi e^{\mp i\alpha(x-\beta)} + i\pi e^{\mp i\alpha(x-\beta)} = -i\pi e^{\mp i\alpha(x-\beta)} & x<\beta\end{cases}\\ &= \mathrm{segno}(x-\beta)\, i\pi e^{\mp i\alpha(x-\beta)}\,.\end{aligned}$$

Il secondo termine dell'anti-trasformata di Fourier è proporzionale alla loro differenza

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k+\alpha}\right]-\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{e^{-ik\beta}}{k-\alpha}\right] = \mathrm{segno}(x-\beta)\, i\pi\left(e^{-i\alpha(x-\beta)}-e^{i\alpha(x-\beta)}\right) = \mathrm{segno}(x-\beta)2\pi\,\mathrm{sen}\big(\alpha(x-\beta)\big),$$

Il risultato finale, cioè la soluzione particolare $f(x)$ ha l'espressione

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\alpha}\Big[\mathrm{segno}(x-\beta)\,\mathrm{sen}\big(\alpha(x-\beta)\big) - e^{-\alpha|x-\beta|}\Big].$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore $\hat{S}$ è definito nello spazio di David Hilbert a tre dimensioni E_3 in termini del vettore unitario $|s\rangle \in E_3$ ($\|s\| = 1$), in particolare si ha che la sua azione su un generico vettore $|v\rangle \in E_3$ è descritta dall'espressione

$$\hat{S}|v\rangle = \sum_{j,k,m=1}^{3} \epsilon_{jkm}\langle e_j|s\rangle\langle e_k|v\rangle|e_m\rangle$$

dove ϵ_{jkm} è il simbolo, o tensore anti-simmetrico, di Tullio Levi Civita e l'insieme $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3} \subset E_3$ è una base ortonormale dello stesso spazio vettoriale, tale che $\langle e_k|s\rangle = \langle s|e_k\rangle$, $\forall\, k \in \{1,2,3\}$.
Si determinino lo spettro discreto e gli autovettori dell'operatore $\hat{S}$.

Soluzione del sesto Problema

Sebbene non indispensabile è utile passare per una rappresentazione matriciale dell'operatore $\hat{S}$, ovviamente la si considera rispetto alla base data. Gli elementi della matrice S, che rappresenta l'omonimo operatore, si ottengono sotto forma di prodotti scalari. In dettaglio si ha che l'elemento della l-esima riga e h-esima colonna della matrice S, con $l,h = 1,2,3$, è $S_h^l = \langle e_l|\hat{S}|e_h\rangle$. Considerando l'azione nota dell'operatore $\hat{S}$ su un generico vettore, si ha

$$S_h^l = \sum_{j,k,m=1}^{3}\epsilon_{jkm}\underbrace{\langle e_j|s\rangle}_{s^j}\underbrace{\langle e_k|e_h\rangle}_{\delta_h^k}\underbrace{\langle e_l|e_m\rangle}_{\delta_m^l} = \epsilon_{jhl}s^j\,, \qquad h,l = 1,2,3\,,$$

dove s^j, con $j = 1,2,3$, è la j-esima componente contro-variante del vettore $|s\rangle$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3}$, ne consegue

$$\hat{S} \overset{e}{\longleftrightarrow} S = \begin{pmatrix} 0 & -s^3 & s^2\\ s^3 & 0 & -s^1\\ -s^2 & s^1 & 0\end{pmatrix}.$$

Per quanto dato dal problema si ha inoltre che le componenti contro-varianti del vettore $|s\rangle$ sono reali, cioè $s^k = \langle e_k|s\rangle = \langle s|e_k\rangle$, per cui: $s^k \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \{1,2,3\}$. La matrice S, in quanto reale e anti-simmetrica è anti-hermitiana, così come l'operatore $\hat{S}$ che rappresenta.
Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare $\det(S - I\sigma) = 0$ nella variabile σ, dove I è la

matrice identità 3×3. Esplicitamente abbiamo

$$\begin{aligned}
\det(S - I\sigma) &= 0 \\
\det \begin{pmatrix} -\sigma & -s^3 & s^2 \\ s^3 & -\sigma & -s^1 \\ -s^2 & s^1 & -\sigma \end{pmatrix} &= 0 \\
-\sigma\left(\sigma^2 + (s^1)^2\right) + s^3\left(-s^3\sigma - s^1 s^2\right) + s^2\left(s^1 s^3 - s^2\sigma\right) &= 0 \\
-\sigma\left(\sigma^2 + (s^1)^2 + (s^2)^2 + (s^3)^2\right) &= 0 \\
-\sigma\left(\sigma^2 + \|s\|^2\right) &= 0 \\
-\sigma\left(\sigma^2 + 1\right) &= 0\,,
\end{aligned}$$

dove la somma dei quadrati delle componenti controvarianti è pari all'unità in quanto coincidente con la norma al quadrato del vettore unitario $|s\rangle$, essendo le componenti reali. I tre autovalori sono

$$\sigma_0 = 0\,, \qquad \sigma_\pm = \pm i\,.$$

Le componenti contro-varianti dei vettori 3×1 che rappresentano gli autovettori dell'operatore $\hat{S}$ rispetto alla base data, elementi dell'insieme $\left\{|u_j\rangle\right\}_{k=0,+,-} \overset{e}{\hookleftarrow} \left\{u_j\right\}_{k=0,+,-}$ si ottengono come soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -\sigma_k & -s^3 & s^2 \\ s^3 & -\sigma_k & -s^1 \\ -s^2 & s^1 & -\sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1_{(k)} \\ u^2_{(k)} \\ u^3_{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad k = 0, +, -\,.$$

Le corrispondenti equazioni agli autovalori in forma vettoriale e matriciale sono

$$\hat{S}|u_k\rangle = \sigma_k |u_k\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} S u_k = \sigma_k u_k\,, \quad k = 0, +, -\,.$$

Per i tre autovettori fissiamo la prima componente contro-variante come $u^1_{(0)} = u^1_{(+)} = u^1_{(-)} = u^1 \neq 0$ e consideriamo i tre sistemi 2×2 che si ottengono dalle identità delle prime due righe per ottenere le seconde e terze componenti degli autovettori. Avremo

$$\begin{cases} -s^3 u^2_{(k)} + s^2 u^3_{(k)} = \sigma_k u^1 \\ -\sigma_k u^2_{(k)} - s^1 u^3_{(k)} = -s^3 u^1 \end{cases}\,, \qquad k = 0, +, -\,,$$

da cui

$$u^2_{(k)} = \frac{\det\begin{pmatrix} \sigma_k u^1 & s^2 \\ -s^3 u^1 & -s^1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -s^3 & s^2 \\ -\sigma_k & -s^1 \end{pmatrix}} = u^1 \frac{-\sigma_k s^1 + s^2 s^3}{s^1 s^3 + \sigma_k s^2}\,, \quad u^3_{(k)} = \frac{\det\begin{pmatrix} -s^3 & \sigma_k u^1 \\ -\sigma_k & -s^3 u^1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -s^3 & +s^2 \\ -\sigma_k & -s^1 \end{pmatrix}} = u^1 \frac{(s^3)^2 + \sigma_k^2}{s^1 s^3 + \sigma_k s^2}\,, \qquad k = 0, +, -\,.$$

Il primo autovettore, relativo all'autovalore nullo $\sigma_0 = 0$, coincide con il vettore unitario e quindi normalizzato, s, infatti , posto $u^1 = s^1$, si ha

$$u_0 = u^1 \begin{pmatrix} 1 \\ s^2/s^1 \\ s^3/s^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^1 \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} = s\,.$$

Gli altri due autovettori sono

$$u_\pm = u^1 \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\mp i s^1 + s^2 s^3}{s^1 s^3 \pm i s^2} \\ \dfrac{(s^3)^2 - 1}{s^1 s^3 \pm i s^2} \end{pmatrix}\,, \qquad u^1 = \left(1 + \frac{(s^1)^2 + (s^2 s^3)^2}{(s^1 s^3)^2 + (s^2)^2} + \frac{\left(1 - (s^3)^2\right)^2}{(s^1 s^3)^2 + (s^2)^2}\right)^{-1/2}\,.$$