Metodi Matematici per la Fisica

Prova parziale del 23 luglio 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che soltanto due problemi, uno dei primi tre e uno degli ultimi tre, che il candidato sceglierà prima della chiusura della prova, saranno oggetto di valutazione. A ciascun problema è assegnato un punteggio che varia nell'intervallo $[0, 15/30]$ ed è stabilito in base ai seguenti criteri:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;

Inoltre, al fine di favorire una preparazione che copra il maggior numero di argomenti del programma, verranno valutati i contributi relativi, premiando i casi in cui il modulo della differenza tra i punteggi dei due problemi sia minimo.

Primo problema (punteggio massimo: 15/30)

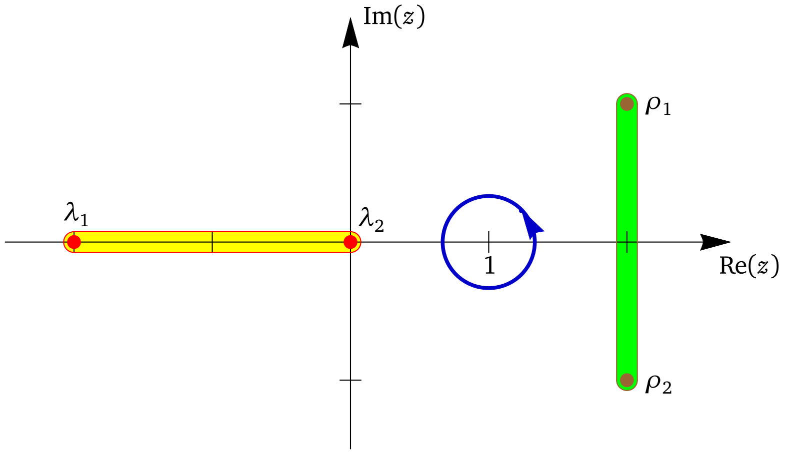
Si calcoli l'integrale

$$L_1 = \oint_{3|z-1|=1} \frac{\exp\left[\operatorname{sen}\left(\log\left(z^2+2z\right)\right)\right]}{(1-\cos(z-1))\sqrt{z^2-4z+5}}\, dz\,.$$

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è polidroma, ci sono due sorgenti di polidromia: le funzioni logaritmo e radice quadrata. Gli zeri dei polinomi che ne rappresentano gli argomenti, entrambi di secondo grado, sono i punti di diramazione. Indicando con $\lambda_{1,2}$ e $\rho_{1,2}$ i due punti di diramazione, rispettivamente, della funzione logaritmo, mostrati come dischi rossi in figura, e radice quadrata, dischi marroni, si hanno

$$\lambda_1 = -2\,, \quad \lambda_2 = 0\,; \qquad \rho_1 = 2-i\,, \quad \rho_2 = 2+i\,.$$



Possiamo scegliere le fasi dei polinomi in modo tale che i tagli, ovvero le regioni di discontinuità coincidano con

i segmenti che hanno per estremi le due coppie di punti di diramazione, cioè: $[\lambda_1, \lambda_2]$ e $[\rho_1, \rho_2]$, evidenziati in figura, rispettivamente, in giallo e in verde.
Il percorso d'integrazione, di equazione $3|z-1| = 1$, è la circonferenza centrata in $z = 1$ di raggio $1/3$, $C_{1/3}(1)$, rappresenta in figura in blu, ovvero

$$C_{1/3}(1) = \left\{ z : z = 1 + e^{i\theta}/3,\ \theta \in [0, 2\pi] \right\} .$$

La scelta dei tagli è stata fatta in modo tale che questo percorso sia immerso nella regione di analiticità della funzione integranda, è quindi possibile calcolare l'integrale usando il teorema dei residui. Le singolarità dell'integranda corrispondono agli zeri della funzione $(1 - \cos(z-1))$ che si trova a denominatore. Tali singolarità sono poli doppi, sono infiniti in quanto la funzione è periodica e coincidono con i valori di z per i quali la funzione $\cos(z-1)$ assume valore unitario, ovvero i punti dell'insieme

$$\{ z_k = 1 + 2k\pi \}_{k \in \mathbb{Z}} .$$

Il fatto che siano dei poli doppi si evince dal valore limite

$$\lim_{z \to z_k} \frac{(z-z_k)^2}{1 - \cos(1-z)} = \lim_{z \to z_k} \frac{(z-z_k)^2}{(z-z_k)^2/2! - (z-z_k)^4/4! + O\left((z-z_k)^6 \right)} = 2, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

L'unico polo avvolto dal percorso d'integrazione è $z_0 = 1$, ne consegue che l'integrale può essere espresso come

$$L_1 = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\exp\left[\operatorname{sen}\left(\log\left(z^2 + 2z \right) \right) \right]}{(1-\cos(z-1))\sqrt{z^2 - 4z + 5}}, z = 1 \right] = 2i\pi \left. \frac{d}{dz} \frac{\exp\left[\operatorname{sen}\left(\log\left(z^2 + 2z \right) \right) \right]}{\sqrt{z^2 - 4z + 5}} \frac{(z-1)^2}{1 - \cos(z-1)} \right|_{z=1} .$$

Per calcolare la derivata scriviamo la funzione come prodotto delle tre funzioni

$$f_1(z) = \exp\left[\operatorname{sen}\left(\log\left(z^2 + 2z \right) \right) \right], \qquad f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4z + 5}}, \qquad f_3(z) = \frac{(z-1)^2}{1 - \cos(z-1)},$$

per cui si ha

$$\left. \frac{d}{dz} \frac{\exp\left[\operatorname{sen}\left(\log\left(z^2 + 2z \right) \right) \right]}{\sqrt{z^2 - 4z + 5}} \frac{(z-1)^2}{1 - \cos(z-1)} \right|_{z=1} = f_1'(1) f_2(1) f_3(1) + f_1(1) f_2'(1) f_3(1) + f_1(1) f_2(1) f_3'(1).$$

I valori in $z = 1$ delle funzioni sono

$$f_1(1) = e^{\operatorname{sen}\left(\log(3) \right)}, \qquad f_2(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad f_3(1) = 2.$$

Consideriamo le derivate prime, per le funzioni $f_1(z)$ e $f_2(z)$ si hanno i seguenti valori

$$f_1'(1) = \left. \frac{2z+2}{z^2+2z} \cos\left(\log\left(z^2 + 2z \right) \right) e^{\operatorname{sen}\left(\log\left(z^2+2z \right) \right)} \right|_{z=1} = \frac{4}{3} \cos\left(\log(3) \right) e^{\operatorname{sen}\left(\log(3) \right)};$$
$$f_2'(1) = -\frac{1}{2} \left. \frac{2z-4}{\left(z^2 - 4z + 5 \right)^{3/2}} \right|_{z=1} = \frac{1}{(2)^{3/2}} .$$

Infine, per calcolare la derivata prima della terza funzione nel punto $z = 1$, in cui la funzione presenta una singolarità eliminabile, usiamo lo sviluppo in serie di Taylor del denominatore nel punto $z = 1$ e la somma della serie geometrica, avremo

$$\begin{aligned} f_3(z) &= \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2/2! - (z-1)^4/4! + O\left((z-1)^6 \right)} = \frac{2}{1 - 2(z-1)^2/4! + O\left((z-1)^4 \right)} \\ &= 2\left[1 + \left(\frac{2(z-1)^2}{4!} + O\left((z-1)^4 \right) \right) + \left(\frac{2(z-1)^2}{4!} + O\left((z-1)^4 \right) \right)^2 + \cdots \right], \end{aligned}$$

raccogliendo i termini nelle stesse potenze del termine di sviluppo $(z-1)$, otteniamo

$$f_3(z) = 2 + \frac{1}{6}(z-1)^2 + O\left((z-2)^4 \right) .$$

Il coefficiente della prima potenza del termine $(z-1)$ è nullo, infatti esso non è presente, ne consegue che la derivata prima della funzione $f_3(z)$ in $z=1$ è nulla, cioè $f_3'(1)=0$.
Abbiamo quindi ottenuto tutti termini per calcolare il residuo nel punto $z=1$ e di conseguenza l'integrale cercato, per il quale si ha

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2i\pi\left(f_1'(1)f_2(1)f_3(1)+f_1(1)f_2'(1)f_3(1)+f_1(1)f_2(1)f_3'(1)\right)\\
&= 2i\pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\cos\left(\log(3)\right)e^{\mathrm{sen}\left(\log(3)\right)}+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{sen}\left(\log(3)\right)}\right)\\
&= \sqrt{2}i\pi e^{\mathrm{sen}\left(\log(3)\right)}\left(\frac{8}{3}\cos\left(\log(3)\right)]+1\right).
\end{aligned}$$

Secondo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli l'integrale

$$L_2=\oint_{|z|=1}\frac{z^8\,\mathrm{sen}(1/z)}{1-2z}dz\,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda ha un polo semplice in $z=1/2$ e una singolarità essenziale nell'origine, il percorso d'integrazione, ovvero la circonferenza unitaria, avvolge entrambe le singolarità e usando il teorema dei residui si ha

$$L_2=2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{z^8\mathrm{sen}(1/z)}{1-2z},z=\frac{1}{2}\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^8\mathrm{sen}(1/z)}{1-2z},z=0\right]\right).$$

Il residuo nel punto $z=1/2$ vale

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^8\mathrm{sen}(1/z)}{1-2z},z=\frac{1}{2}\right]=\lim_{z\to1/2}\frac{z^8\mathrm{sen}(1/z)}{1-2z}(z-1/2)=-2^{-9}\,\mathrm{sen}(2)\,.$$

Il residuo nella singolarità essenziale che si trova nell'origine può essere ottenuto come il coefficiente della potenza z^{-1} della serie di Laurent centrata nell'origine della funzione integranda. Otteniamo il coefficiente cercato determinando i coefficienti di Laurent delle prime potenze, quelle più vicine alla costante. A tal fine sfruttiamo le serie di potenze note, in particolare, lo sviluppo in serie di Taylor della funzione seno e la serie di geometrica, per cui si ha

$$\frac{z^8\mathrm{sen}(1/z)}{1-2z}=z^8\sum_{j,k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^jz^{j-2k-1}}{(2k+1)!}=\sum_{j,k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^jz^{j-2k+7}}{(2k+1)!}\,,$$

dove la serie geometrica è stata usata per esprimere il fattore razionale $1/(1-2z)$, cioè

$$\frac{1}{1-2z}=\sum_{j=0}^{\infty}2^jz^j\,,\qquad\forall\,z,\ \text{tale che:}\ |z|<1/2\,.$$

Il residuo nell'origine, dato dal coefficiente della potenza z^{-1}, vale

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^8\mathrm{sen}(1/z)}{1-2z},z=0\right]=\sum_{j,k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^j}{(2k+1)!}\delta_{j-2k+7,-1}\,.$$

La condizione imposta dalla delta di Kronecker è $j=2k-8$ e poiché l'indice j è maggiore o uguale a zero, il limite inferiore per l'indice k è tale che $2k-8\geq0$, da cui $k\geq4$, quindi possiamo calcolare il residuo sommando la serie privata dei primi quattro termini, cioè

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{z^8\operatorname{sen}(1/z)}{1-2z}, z=0\right] &= \sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k-8}}{(2k+1)!} = 2^{-9}\sum_{k=4}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= 2^{-9}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\ &= 2^{-9}\left(\operatorname{sen}(2) - 2 + \frac{2^3}{3!} - \frac{2^5}{5!} + \frac{2^7}{7!}\right).\end{aligned}$$

In definitiva si ha

$$\begin{aligned}L_2 &= 2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{z^8\operatorname{sen}(1/z)}{1-2z}, z=\frac{1}{2}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^8\operatorname{sen}(1/z)}{1-2z}, z=0\right]\right)\\ &= 2i\pi\left[-2^{-9}\operatorname{sen}(2) + 2^{-9}\left(\operatorname{sen}(2) - 2 + \frac{2^3}{3!} - \frac{2^5}{5!} + \frac{2^7}{7!}\right)\right]\\ &= -\frac{i\pi}{2^7}\left(1 - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^4}{5!} - \frac{2^6}{7!}\right).\end{aligned}$$

Terzo problema (punteggio massimo: 15/30)

Si calcoli l'integrale

$$L_3 = \oint_{|z|=1} z^8\operatorname{Re}(\operatorname{sen}(z))\,dz\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione integranda non è analitica, in quanto contiene la funzione valore reale, d'altro canto il valore reale della funzione seno si ottiene come

$$\operatorname{Re}(\operatorname{sen}(z)) = \frac{\operatorname{sen}(z) + \operatorname{sen}(z)^*}{2}\,.$$

Usando il principio di riflessione di Schwarz, per cui si ha: $\operatorname{sen}(z)^* = \operatorname{sen}(z^*)$ e anche il fatto che sul percorso d'integrazione, la circonferenza unitaria, il complesso coniugato della variabile z coincide con il suo inverso, cioè $z^* = 1/z$, $\forall\, z$, tale $|z| = 1$, il valore reale della funzione seno può essere scritto come

$$\operatorname{Re}(\operatorname{sen}(z)) = \frac{\operatorname{sen}(z) + \operatorname{sen}(z)^*}{2} = \frac{\operatorname{sen}(z) + \operatorname{sen}(z^*)}{2} = \frac{\operatorname{sen}(z) + \operatorname{sen}(1/z)}{2}\,.$$

Sostituendo questa espressione nella funzione integranda, l'integrale assume la forma

$$L_3 = \oint_{|z|=1} z^8\operatorname{Re}(\operatorname{sen}(z))\,dz = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\left(z^8\operatorname{sen}(z) + z^8\operatorname{sen}(1/z)\right)dz\,,$$

ovvero la funzione integranda è la somma di due funzioni, la prima è intera, in quanto prodotto di funzioni intere e quindi, per il teorema di Cauchy, il suo integrale è nullo; la seconda ha solo una singolarità essenziale nell'origine. Calcoliamo l'integrale con il teorema dei residui e si ha

$$L_3 = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} z^8\operatorname{sen}(1/z)\,dz = i\pi\operatorname{Res}\left[\, z^8\operatorname{sen}(1/z), z=0\right].$$

Il residuo può essere calcolato come il coefficiente della potenza z^{-1} della serie di Laurent della funzione integranda centrata nell'origine. La serie di Laurent si ottiene a partire dalla serie di Taylor della funzione seno, avremo

$$z^8\operatorname{sen}(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{-2k+7}}{(2k+1)!} = z^7 - \frac{1}{3!}z^5 + \frac{1}{5!}z^3 - \frac{1}{7!}z^1 + \frac{1}{9!}z^{-1} + \cdots,$$

da cui il residuo

$$\operatorname{Res}\left[\, z^8 \operatorname{sen}(1/z), z=0 \right] = \frac{1}{9!}\,.$$

L'integrale cercato vale

$$L_3 = \oint_{|z|=1} z^8 \operatorname{Re}\left(\operatorname{sen}(z)\right) dz = \frac{i\pi}{9!}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 15/30)

L'operatore hermitiano e non degenere $\hat{A}$, definito nello spazio di Hilbert a quattro dimensioni E_4, verifica la relazione

$$\hat{A}^4 + 4\hat{I} = 5\hat{A}^2\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità.
Si determinino il minimo e il massimo valore di aspettazione normalizzato, ovvero il minimo e il massimo della quantità

$$V_x = \frac{\langle x|\hat{A}|x\rangle}{\langle x|x\rangle}\,, \qquad \text{con: } |x\rangle \in E_4 \backslash \{|0\rangle\}\,.$$

Si ottengano, infine, la matrice 4×4 A e i vettori colonna 4×1 $x_{\min}$ e $x_{\max}$, che rappresentano rispettivamente l'operatore $\hat{A}$, e i vettori $|x_{\min}\rangle$ e $|x_{\max}\rangle$, in corrispondenza dei quali si hanno il minimo e il massimo del valore di aspettazione normalizzato, cioè

$$V_{x_{\min}} = \min_{|x\rangle\neq|0\rangle}\left\{\frac{\langle x|\hat{A}|x\rangle}{\langle x|x\rangle}\right\} = \frac{\langle x_{\min}|\hat{A}|x_{\min}\rangle}{\langle x_{\min}|x_{\min}\rangle}\,, \qquad V_{x_{\max}} = \max_{|x\rangle\neq|0\rangle}\left\{\frac{\langle x|\hat{A}|x\rangle}{\langle x|x\rangle}\right\} = \frac{\langle x_{\max}|\hat{A}|x_{\max}\rangle}{\langle x_{\max}|x_{\max}\rangle}\,,$$

rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$, tale che

$$\hat{B} = 2^{\hat{A}} \quad \overset{e}{\hookleftarrow} \quad B = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 0 & i/8 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -i/8 & 0 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quarto problema

L'operatore $\hat{A}$ è normale in quanto hermitiano, ammette quindi un insieme ortonormale di autovettori, che indichiamo con $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^4$. Esso rappresenta una base dello spazio vettoriale E_4, cosicché, per un generico vettore $|x\rangle \in E_4$ si ha la rappresentazione

$$|x\rangle = x^k |a_k\rangle\,, \qquad a^k = \langle a_k|x\rangle\,,$$

dove x^k è la k-esima componente contro-variante del vettore $|x\rangle$ rispetto alla base ortonormale degli autovettori dell'operatore $\hat{A}$. Indicandone con $\{\alpha_k\}_{k=1}^4 \subset \mathbb{R}$ lo spettro discreto, che, per l'hermitianità dell'operatore, contiene solo numeri reali, si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k |a_k\rangle\,, \qquad k = 1,2,3,4\,.$$

Come già ribadito, gli autovalori sono reali e l'operatore non è degenere, ne consegue che gli stessi autovalori sono tutti distinti, ciò permette di definire in modo non ambiguo il minimo e il massimo dello spettro. In particolare, disponendo in ordine strettamente crescente gli autovalori, cioè facendo in modo che: $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ con $j = 1,2,3$, avremo

$$\alpha_{\min} = \min_{k\in\{1,2,3,4\}}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\} = \alpha_1\,, \qquad \alpha_{\max} = \max_{k\in\{1,2,3,4\}}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\} = \alpha_4\,.$$

Sfruttando la rappresentazione rispetto alla base di autovettori e le equazioni agli autovalori, il valore di aspettazione dell'operatore $\hat{A}$ rispetto al generico vettore $|x\rangle \neq |0\rangle$, V_x, può essere espresso in funzione degli autovalori dell'operatore e delle componenti del vettore rispetto alla base degli autovettori come

$$V_x = \frac{\langle x|\hat{A}|x\rangle}{\langle x|x\rangle} = \frac{\langle x|\hat{A}\, x^j|a_j\rangle}{\sum_{k=1}^4 |x^k|^2} = \frac{\alpha_j\, x^j \langle x|a_j\rangle}{\sum_{k=1}^4 |x^k|^2} = \frac{\sum_{j=1}^4 \alpha_j\, x^j (x^j)^*}{\sum_{k=1}^4 |x^k|^2} = \frac{\sum_{j=1}^4 \alpha_j\, |x^j|^2}{\sum_{k=1}^4 |x^k|^2}\,.$$

Dalla condizione $\alpha_{\min} = \alpha_1 \leq \alpha_j \leq \alpha_4 = \alpha_{\max}$, $\forall\, j \in \{1,2,3,4\}$, segue che il minimo e il massimo del valore di aspettazione verificano le limitazioni

$$\begin{aligned}
\min_{|x\rangle\neq|0\rangle} \{V_x\} &= \min_{|x\rangle\neq|0\rangle} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^4 \alpha_j\, |x^j|^2}{\sum_{k=1}^4 |x^k|^2} \right\} \geq \min_{|x\rangle\neq|0\rangle} \left\{ \alpha_1 \frac{\sum_{j=1}^4 |x^j|^2}{\sum_{k=1}^4 |x^k|^2} \right\} = \alpha_1\,,\\
\max_{|x\rangle\neq|0\rangle} \{V_x\} &= \max_{|x\rangle\neq|0\rangle} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^4 \alpha_j\, |x^j|^2}{\sum_{k=1}^4 |x^k|^2} \right\} \leq \max_{|x\rangle\neq|0\rangle} \left\{ \alpha_4 \frac{\sum_{j=1}^4 |x^j|^2}{\sum_{k=1}^4 |x^k|^2} \right\} = \alpha_4\,.
\end{aligned}$$

Infine si osserva che entrambe le disuguaglianze possono essere verificate come identità nei casi in cui si abbiano, rispettivamente per il minimo e il massimo, i vettori $|x\rangle = |x_{\min}\rangle \equiv |a_1\rangle$ e $|x\rangle = |x_{\max}\rangle \equiv |a_4\rangle$, cioè gli autovettori corrispondenti all'autovalore minimo e a quello massimo. Abbiamo, quindi, che il minimo ed il massimo del valore di aspettazione V_x sono

$$\min_{|x\rangle\neq|0\rangle} \{V_x\} = V_{a_1} = \alpha_1\,, \qquad \max_{|x\rangle\neq|0\rangle} \{V_x\} = V_{a_4} = \alpha_4\,.$$

Gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono entrambi hermitiani, quindi normali, e poiché commutano, sono diagonalizzabili simultaneamente, ovvero ammettono lo stesso insieme ortonormale di autovettori. Inoltre, indicando con $\{\beta_k\}_{k=1}^4$ lo spettro discreto dell'operatore $\hat{B}$, per il teorema spettrale si ha la relazione

$$\beta_k = 2^{\alpha_k}\,, \qquad k = 1,2,3,4\,,$$

dove, come già indicato, l'insieme $\{\alpha_k\}_{k=1}^4$ rappresenta lo spettro dell'operatore $\hat{A}$. La funzione potenza di 2, che lega gli autovalori dei due operatori, è strettamente monotona crescente, ne consegue che la gerarchia $\alpha_j < \alpha_{j+1}$, con $j = 1,2,3$, è ereditata anche dagli autovalori dell'operatore $\hat{B}$, cioè: $\beta_j < \beta_{j+1}$, con $j = 1,2,3$. Questi autovalori si ottengono come zeri dell'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det\left(\hat{B} - \beta\hat{I}\right) &= 0\\
\begin{pmatrix} 3/8-\beta & 0 & 0 & i/8 \\ 0 & 3-\beta & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3-\beta & 0 \\ -i/8 & 0 & 0 & 3/8-\beta \end{pmatrix} &= 0\\
\left(\frac{3}{8}-\beta\right)\left[(3-\beta)^2\left(\frac{3}{8}-\beta\right) - \left(\frac{3}{8}-\beta\right)\right] - \frac{i}{8}\left[-(3-\beta)^2\frac{i}{8} + \frac{i}{8}\right] &= 0\\
\left(\frac{3}{8}-\beta\right)^2\left[(3-\beta)^2 - 1\right] - \frac{1}{64}\left[(3-\beta)^2 - 1\right] &= 0\\
\left[\left(\frac{3}{8}-\beta\right)^2 - \frac{1}{64}\right]\left[(3-\beta)^2 - 1\right] &= 0\,.
\end{aligned}$$

Le quattro soluzioni, disposte in ordine strettamente crescente, sono

$$\beta_{1,2} = \frac{3}{8} \mp \frac{1}{8}\,, \quad \beta_{3,4} = 3 \mp 1\,, \quad \to \quad \beta_1 = \frac{1}{4}\,, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}\,, \quad \beta_3 = 2\,, \quad \beta_4 = 4\,.$$

Gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ si ottengono come logaritmo in base due di quelli dell'operatore $\hat{B}$ e sono

$$\alpha_1 = \log_2(\beta_1) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2\,, \qquad \alpha_2 = \log_2(\beta_2) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1\,,$$

$$\alpha_3 = \log_2(\beta_3) = \log_2(2) = 1\,, \qquad \alpha_4 = \log_2(\beta_4) = \log_2(4) = 2\,.$$

Le componenti contro-varianti degli autovettori $a_{(j)}$, con $j = 1,2,3,4$, che rappresentano i vettori dell'insieme $\left\{|a_j\rangle\right\}_{j=1}^4$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$, sono le soluzioni dei quattro sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 3/8-\beta_j & 0 & 0 & i/8 \\ 0 & 3-\beta_j & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3-\beta_j & 0 \\ -i/8 & 0 & 0 & 3/8-\beta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_{(j)} \\ a^2_{(j)} \\ a^3_{(j)} \\ a^4_{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1,2,3,4,$$

dove $a^k_{(j)}$ rappresenta la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, $k, j = 1,2,3,4$. Possiamo scomporre ciascun sistema in due sotto-sistemi disgiunti, il primo per la prima e la quarta componente, il secondo per la seconda e la terza, ovvero

$$\begin{pmatrix} 3/8-\beta_j & i/8 \\ -i/8 & 3/8-\beta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_{(j)} \\ a^4_{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3-\beta_j & -1 \\ -1 & 3-\beta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2_{(j)} \\ a^3_{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,3,4.$$

Risolvendo i due sistemi si ottengono le seguenti relazioni tra le corrispondenti coppie di componenti

$$a^4_{(j)} = i\left(3-8\beta_j\right) a^1_{(j)}, \quad a^4_{(j)} = \frac{i}{3-8\beta_j} a^1_{(j)}; \qquad a^3_{(j)} = \left(3-\beta_j\right) a^2_{(j)}, \quad a^3_{(j)} = \frac{1}{3-\beta_j} a^2_{(j)}.$$

Poiché i quattro valori di $3-8\beta_j$ e $3-\beta_j$, con $j = 1,2,3,4$, sono

$$3-8\beta_j = \begin{cases} 1 & j=1,\ \beta_1 = 1/4 \\ -1 & j=2,\ \beta_2 = 1/2 \\ -13 & j=3,\ \beta_3 = 2 \\ -29 & j=4,\ \beta_4 = 4 \end{cases}, \qquad 3-\beta_j = \begin{cases} 11/4 & j=1,\ \beta_1 = 1/4 \\ 7/2 & j=2,\ \beta_2 = 1/2 \\ -1 & j=3,\ \beta_3 = 2 \\ 1 & j=4,\ \beta_4 = 4 \end{cases},$$

si hanno gli autovettori

$$a_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad a_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \quad a_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo posto $a^1_{(1)} = a^1_{(4)} = a^2_{(2)} = a^2_{(3)} = 1/\sqrt{2}$.
Il primo e il quarto autovettore sono anche i vettori in corrispondenza dei quali si ottengono rispettivamente il minimo e il massimo del valore di aspettazione V_x, cioè

$$x_{\min} = a_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad x_{\max} = a_{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante U ha per elementi le componenti degli autovettori, cioè $U^k_j = a^k_{(j)}$, con $j, k = 1,2,3,4$, ovvero

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ i & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice diagonalizza simultaneamente le matrici A e B che rappresentano gli omologhi operatori rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$, in particolare si hanno le relazioni

$$A_d = U^\dagger A U = \operatorname{diag}\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right), \qquad B_d = U^\dagger B U = \operatorname{diag}\left(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\right).$$

Dalla prima si ottiene la matrice non diagonale A come

$$
\begin{aligned}
A = U A_d U^\dagger &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ i & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2i & i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & i \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Quinto problema (punteggio massimo: 15/30)

L'operatore $\hat{H}$ definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 è rappresentato dalla matrice

$$
\hat{H} \quad \overset{e}{\hookleftarrow} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$.
Dopo aver dimostrato che l'operatore $\hat{H}$ non è diagonalizzabile, si ottenga la matrice che rappresenta rispetto alla stessa base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$ l'operatore

$$
\hat{K} = \mathrm{sen}\left(\hat{H}\right)\left(2\hat{I} + \hat{H}^2\right)^{-2},
$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità.

Soluzione del quinto problema

Per dimostrare che l'operatore $\hat{H}$ non è diagonalizzabile è sufficiente mostrare che non ammette un insieme di autovettori linearmente indipendenti. Calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione caratteristica

$$
\begin{gathered}
\det\left(H - \eta I\right) = 0 \\
\det\begin{pmatrix} 1-\eta & 0 & 0 \\ 1 & 1-\eta & 1 \\ 0 & 0 & 1-\eta \end{pmatrix} = 0 \\
(1-\eta)^3 = 0,
\end{gathered}
$$

si ha massima degenerazione, infatti c'è un unico autovalore $\eta = 1$, che ha molteplicità algebrica pari a 3. Indicando con $\left\{v_{(k)}\right\}_{k=1}^3$ l'insieme dei vettori colonna 3×1 che rappresentano gli autovettori, le loro componenti si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$
\begin{pmatrix} 1-\eta & 0 & 0 \\ 1 & 1-\eta & 1 \\ 0 & 0 & 1-\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1_{(k)} \\ v^2_{(k)} \\ v^3_{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3,
$$

anch'essi degeneri, ovvero coincidenti ad un unico sistema. Le equazioni ottenute dal primo e dall'ultimo elemento non impongono alcun vicolo, sono infatti nulle perché $1 - \eta = 0$, mentre quella che si ottiene dal secondo elemento è

$$
v^1_{(k)} + v^3_{(k)} = 0.
$$

Non ci sono vincoli sulla seconda componente che porremo alternativamente uguale a zero e uguale ad uno, lo stesso faremo con la prima componente. Quindi, per il primo autovettore scegliamo la combinazione: $v^1_{(k)} = 1$ e $v^2_{(k)} = 0$, da cui $v^3_{(k)} = -1$; per il secondo: $v^1_{(k)} = 0$ e $v^3_{(k)} = 1$, da cui $v^2_{(k)} = 0$; per il terzo: $v^1_{(k)} = 0$ e $v^2_{(k)} = 0$, da cui $v^3_{(k)} = 0$. Avremo

$$v_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La presenza dell'autovettore nullo implica la non diagonalizzabilità dell'operatore. La molteplicità geometrica dell'unico autovalore $\eta = 1$ è pari a 2, è infatti questo il numero di autovettori linearmente indipendenti, ovvero la dimensione del sotto-spazio di E_3 di cui sono generatori. Il teorema spettrale non può essere applicato in quanto l'operatore non è diagonalizzabile. Per ottenere la matrice che rappresenta l'operatore

$$\hat{K} = \operatorname{sen}\left(\hat{H}\right) \left(2I + \hat{H}^2\right)^{-2},$$

usiamo gli sviluppi in serie delle funzioni corrispondenti, in particolare lo sviluppo in serie di Taylor centrato nell'origine della funzione seno e la serie geometrica. Infatti, considerando la funzione $f(z) = \operatorname{sen}(z)\left(2 + z^2\right)^{-2}$, possiamo definire $\hat{K}$, come l'operatore che si ottiene valutando la funzione $f(z)$ sull'operatore $\hat{H}$, cioè $\hat{K} = \hat{f}\left(\hat{H}\right)$. I due fattori della funzione $f(z)$ hanno i seguenti sviluppi in serie

$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\frac{1}{\left(2+z^2\right)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+z^2/2\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz^2}\frac{1}{1+z^2/2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz^2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j \left(z^2\right)^j = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j j\, z^{2j-2}.$$

L'operatore $\hat{K}$ e di conseguenza la matrice K che la rappresenta possono essere espressi nelle forme

$$\hat{K} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\hat{H}^{2k+1}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j j\hat{H}^{2j-2} \quad \overset{e}{\hookleftarrow} \quad K = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}H^{2k+1}\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j jH^{2j-2},$$

è quindi necessario ottenere le matrici che rappresentano le potenze intere della matrice H. Ricaviamo una legge generale per induzione, consideriamo innanzitutto il quadrato e il cubo

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si evince che la potenza k-esima, con $k \in \mathbb{N}$, ha la forma

$$H^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Come anticipato, lo proviamo per induzione, ai passi due e tre la relazione è verificata, la assumiamo al passo k e calcoliamo la potenza $(k+1)$-esima,

$$H^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ne consegue che l'espressione generale è verificata.
La serie della funzione seno in termini della matrice H è

$$\operatorname{sen}(H) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}H^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2k+1 & 1 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

questa matrice ha solo due elementi distinti, uno che si ripete tre volte lungo la diagonale principale, un altro che compare due volte e rappresenta gli elementi non diagonali della seconda riga, si tratta rispettivamente delle due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \operatorname{sen}(1) , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \cos(1) ,$$

da cui si ottiene l'espressione esplicita della matrice $\operatorname{sen}(H)$,

$$\operatorname{sen}(H) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(1) & 0 & 0 \\ \cos(1) & \operatorname{sen}(1) & \cos(1) \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(1) \end{pmatrix} .$$

La serie che definisce la matrice $\left(2I + H^2\right)^{-2}$, cioè

$$\left(2I + H^2\right)^{-2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j jH^{2j-2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2j-2 & 1 & 2j-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ha per elementi non nulli, che si ripetono uguali a se stessi nelle stesse posizioni dei soli due elementi distinti della matrice $\operatorname{sen}(H)$, le due serie

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j j , \qquad -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j j(2j-2) = -\sum_{j=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j j(j-1) .$$

Le somme di queste serie possono essere calcolate considerando rispettivamente la derivata prima e seconda rispetto alla variabile x, valutata in $x = 1$, della serie geometrica di ragione $-x/2$

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j x^j = \frac{1}{1 + x/2} ,$$

in particolare, avremo

$$\left.\frac{ds}{dx}\right|_{x=1} = \left.\sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j jx^{j-1}\right|_{x=1} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j j = -\left.\frac{1/2}{(1 + x/2)^2}\right|_{x=1} = -\frac{2}{9} ,$$

$$\left.\frac{d^2s}{dx^2}\right|_{x=1} = \left.\sum_{j=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j j(j-1)x^{j-2}\right|_{x=1} = \sum_{j=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j j(j-1) = \left.\frac{1/2}{(1 + x/2)^3}\right|_{x=1} = \frac{4}{27} .$$

Usando questi risultati si ottengono i valori numerici degli elementi della matrice $\left(2I + H^2\right)^{-2}$, che ha la forma seguente

$$\left(2I + H^2\right)^{-2} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j jH^{2j-2} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

In definitiva la matrice K, richiesta dal problema, non è altro che il prodotto delle precedenti, ovvero

$$K = \operatorname{sen}(H) \left(2I + H^2\right)^{-2} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(1) & 0 & 0 \\ \cos(1) & \operatorname{sen}(1) & \cos(1) \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(1) & 0 & 0 \\ \cos(1) - 4\operatorname{sen}(1)/3 & \operatorname{sen}(1) & \cos(1) - 4\operatorname{sen}(1)/3 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(1) \end{pmatrix} .$$

Sesto problema (punteggio massimo: 15/30)

Si ottengano gli insiemi dei coefficienti $\left\{a_j\right\}_{j=0}^{3} \subset \mathbb{C}$ che rappresentano gli operatori

$$\hat{A} = a_0 \hat{I} + \sum_{j=1}^{3} a_j \hat{\sigma}_j \,,$$

rispetto alla base dello spazio degli operatori $\{\hat{I}\} \cup \left\{\hat{\sigma}_j\right\}_{j=1}^{3}$, costituita dall'operatore identità $\hat{I}$ e dall'insieme degli operatori di Pauli $\left\{\hat{\sigma}_j\right\}_{j=1}^{3}$, che verificano l'equazione

$$e^{\hat{A}} = \left(3\hat{I} - \hat{\sigma}_2\right)^{-4} .$$

Soluzione del sesto Problema

Usando le regole dell'algebra degli operatori possiamo esprimere la potenza -4 di un operatore come l'inverso della quarta potenza dello stesso operatore, che calcoliamo direttamente. A tal fine sfruttiamo le proprietà degli operatori di Pauli che, essendo hermitiani e unitari, hanno quadrato uguale all'operatore identità. Ne consegue che l'operatore a secondo membro dell'equazione data può essere scritto come

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}} &= \left(\left(3\hat{I} - \hat{\sigma}_2\right)^4\right)^{-1} = \left(\left(\left(3\hat{I} - \hat{\sigma}_2\right)^2\right)^2\right)^{-1} = \left(\left(10\hat{I} - 6\hat{\sigma}_2\right)^2\right)^{-1} = \left(4\left(5\hat{I} - 3\hat{\sigma}_2\right)^2\right)^{-1} \\ &= \left(4\left(34\hat{I} - 30\hat{\sigma}_2\right)\right)^{-1} = \left(136\left(\hat{I} - \frac{15}{17}\hat{\sigma}_2\right)\right)^{-1} = \frac{1}{136}\left(\hat{I} - \frac{15}{17}\hat{\sigma}_2\right)^{-1} . \end{aligned}$$

Passando al logaritmo e omettendo per ora la determinazione, si ottiene

$$\hat{A} = \ln\left(\frac{1}{136}\left(\hat{I} - \frac{15}{17}\hat{\sigma}_2\right)^{-1}\right) = -\hat{I}\ln(136) - \ln\left(\hat{I} - \frac{15}{17}\hat{\sigma}_2\right) .$$

Per esprimere il logaritmo, usiamo lo sviluppo in serie di Taylor noto della funzione logaritmo, centrato nell'origine,

$$\ln(1 \pm z) = \pm \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \,, \qquad |z| < 1 \,.$$

Possiamo applicarlo al logaritmo dell'operatore e ottenere una serie convergente in quanto si ha limitazione

$$\left\| \frac{15}{17}\hat{\sigma}_2 \right\| = \frac{15}{17}\left\|\hat{\sigma}_2\right\| = \frac{15}{17} < 1 \,,$$

dove abbiamo sfruttato la norma unitaria degli operatori di Pauli, che segue dalla succitata proprietà $\hat{\sigma}_j^2 = \hat{I}$, con $j = 1, 2, 3$. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \hat{A} &= -\hat{I}\ln(136) - \ln\left(\hat{I} - \frac{15}{17}\hat{\sigma}_2\right) = -\hat{I}\ln(136) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{15}{17}\hat{\sigma}_2\right)^k = -\hat{I}\ln(136) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{15}{17}\right)^k \hat{\sigma}_2^k \\ &= -\hat{I}\ln(136) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\frac{15}{17}\right)^{2k}\hat{\sigma}_2^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{15}{17}\right)^{2k+1}\hat{\sigma}_2^{2k+1} \\ &= -\hat{I}\ln(136) + \hat{I}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\frac{15}{17}\right)^{2k} + \hat{\sigma}_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{15}{17}\right)^{2k+1} , \end{aligned}$$

in cui abbiamo separato i termini pari e dispari, e usato le identità

$$\hat{\sigma}_j^{2n} = \hat{I} \,, \qquad \hat{\sigma}_j^{2n+1} = \hat{\sigma}_j \,, \qquad \text{con: } j = 1, 2, 3 \text{ e } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Per ciò che riguarda le due serie pari e dispari della relazione precedente si hanno i seguenti risultati

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z^2)^k}{k} = \frac{1}{2}\ln\left(1 + z^2\right) , \\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{2k} = \ln(1+z) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + z^2\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) , \end{aligned}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\hat{A} &= -\hat{I}\ln(136) + \hat{I}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\left(\frac{15}{17}\right)^{2k} + \hat{\sigma}_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{15}{17}\right)^{2k+1}\\
&= -\hat{I}\ln(136) - \hat{I}\frac{1}{2}\ln\left(1-\left(\frac{15}{17}\right)^2\right) + \hat{\sigma}_2\frac{1}{2}\ln\left(\frac{32}{2}\right)\\
&= -\hat{I}\ln\left(\frac{8\cdot 136}{17}\right) + 2\hat{\sigma}_2\ln(2)\\
&= -6\hat{I}\ln(2) + 2\hat{\sigma}_2\ln(2)\,.
\end{aligned}
$$

Infine, considerando la periodicità della funzione esponenziale e quindi le possibili determinazioni descritte in termini del parametro $k\in\mathbb{Z}$, le soluzioni hanno la forma

$$
\hat{A}_k = \Big(-6\ln(2) + 2ik\pi\Big)\hat{I} + 2\ln(2)\hat{\sigma}_2\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,,
$$

ovvero l'insieme dei coefficienti richiesto è

$$
a_0^{(k)} = -6\ln(2) + 2ik\,, \qquad a_2 = 2\ln(2)\,, \qquad a_1 = a_3 = 0\,, \qquad k\in\mathbb{Z}\,,
$$

solo il primo dipende dalla determinazione.

UN ALTRO METODO PER RISOLVERE IL SESTO PROBLEMA

Un metodo alternativo per risolvere il problema consiste nel considerare la rappresentazione matriciale dell'equazione operatoriale, che diventa quindi un'equazione matriciale. La scelta della base è ovviamente arbitraria, la più economica dal punto dei vista dei calcoli è la base costituita dagli autovettori dello stesso operatore $\hat{\sigma}_2$, che indichiamo con $\{|y_-\rangle, |y_+\rangle\}$. Le equazioni agli autovalori sono

$$
\hat{\sigma}_2|y_\mp\rangle = \mp|y_\mp\rangle\,,
$$

infatti, come è noto, l'insieme degli autovalori corrispondenti, ovvero lo spettro discreto è $\{-1,1\}$. Le matrici diagonali che rappresentano gli operatori rispetto a questa base sono

$$
\hat{A} \overset{y}{\hookleftarrow} A_d = \mathrm{diag}\left(\alpha_-,\alpha_+\right)\,, \qquad \hat{\sigma}_2 \overset{y}{\hookleftarrow} \sigma_2 = \mathrm{diag}\left(-1,1\right)\,,
$$

dove l'insieme $\{\alpha_-,\alpha_+\}$ è lo spettro dell'operatore $\hat{A}$. Si tratta di matrici diagonali, poiché, come è immediato verificare, l'operatore $\hat{A}$ è hermitiano, essendo tale l'operatore $\hat{\sigma}_2$, e commuta con lo stesso $\hat{\sigma}_2$, i due sono diagonalizzabili simultaneamente. Possiamo usare il teorema spettrale per esprimere gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ in termini degli omologhi autovalori dell'operatore di Pauli, in particolare, avendo $\hat{A} = \hat{f}\left(\hat{\sigma}_2\right)$ con la funzione

$$
f(z) = \ln\left(\frac{1}{(3-z)^4}\right) = -4\ln(3-z)\,,
$$

avremo

$$
\alpha_\mp = -4\ln\left(3-y_\mp\right) = \begin{cases} -4\ln(4) = -8\ln(2) & - \\ -4\ln(2) & + \end{cases}\,.
$$

L'espressione matriciale è

$$
A_d = \begin{pmatrix} -8\ln(2) & 0 \\ 0 & -4\ln(2) \end{pmatrix} = -4\ln(2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_0 I + \sum_{j=1}^{3} a_j\sigma_j\,,
$$

l'ultima identità dà l'espressione generica della matrice A_d come combinazione delle matrici della base dello spazio delle matrici 2×2 a elementi complessi, base ortonormale rispetto al prodotto scalare

$$
(A,B) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(A^\dagger B\right)\,,
$$

per ogni coppia A, B di matrici 2×2 a elementi complessi. I coefficienti dell'insieme $\left\{a_j\right\}_{j=0}^{3}$ si ottengono dai prodotti scalari: $a_0=(I,A_d)$ e $a_j=(\sigma_j,A_d)$ con $j=1,2,3$ e sono

$$
\begin{aligned}
a_0&=(I,A_d)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(A_d\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(-4\ln(2)\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=-6\ln(2)\,,\\
a_1&=(\sigma_1,A_d)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma_1A_d\right)=\frac{1}{2}(\sigma_1)^j_k\delta^k_j(A_d)^k_k=0\,,\\
a_2&=(\sigma_2,A_d)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma_2A_d\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(-4\ln(2)\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=-2\ln(2)\operatorname{Tr}\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}=2\ln(2)\,,\\
a_3&=(\sigma_3,A_d)=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma_3A_d\right)=\frac{1}{2}(\sigma_3)^j_k\delta^k_j(A_d)^k_k=0\,.
\end{aligned}
$$

L'azzeramento dei coefficienti a_1 e a_3 si ha perché le matrici σ_1 e σ_3, che rappresentano gli omologhi operatori di Pauli rispetto alla base di autovettori dell'operatore $\hat{\sigma}_2$ hanno elementi diagonali nulli.
L'espressione della matrice A_d, una volta inserita la determinazione, è

$$
A_d=(-6\ln(2)+2ik\pi)\,I+2\ln(2)\sigma_2\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,,
$$

che banalmente implica l'espressione operatoriale

$$
\hat{A}=(-6\ln(2)+2ik\pi)\,\hat{I}+2\ln(2)\hat{\sigma}_2\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,.
$$