Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 23 luglio 2014

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (5 punti)

Sia $f(z)$ una funzione analitica nel dominio $D = \{z : z \notin (x_0, \infty), x_0 > 0\}$, con $f(z) \in \mathbb{R}$, $\forall z \in D \cap \mathbb{R}$ e $f(z) = o(|z|)$ per $z \to \infty$. Si dimostrino le seguenti identità

$$\begin{aligned} \ln[f(z)] &= \frac{\sqrt{x_0 - z}}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\sqrt{x - x_0}(x - z)} dx\,, && \forall z \in D\,, \\ \arg[f(z)] &= -\frac{\sqrt{z - x_0}}{\pi} \Pr\!\int_{x_0}^{\infty} \frac{\ln|f(x)|}{\sqrt{x - x_0}(x - z)} dx\,, && \text{con: } z = x + i\epsilon\,,\ x > x_0\,,\ \epsilon \to 0^+\,. \end{aligned}$$

Suggerimento. Si consideri la relazione di dispersione per la funzione

$$\phi(z) = \frac{\ln[f(z)]}{\sqrt{x_0 - z}}\,.$$

Soluzione 1

La funzione $\phi(z)$ può essere rappresentata in termini della relazione di dispersione per la parte immaginaria, ovvero

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[\phi(x)]}{x - z} dx\,, \qquad z \notin (x_0, \infty)\,.$$

Per valori di z che tendono al bordo superiore del taglio si ha la relazione di dispersione per la parte reale

$$\mathrm{Re}[\phi(x)] = \frac{1}{\pi} \Pr\!\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}[\phi(x')]}{x' - x} dx'\,, \qquad x \in (x_0, \infty)\,.$$

Per calcolare la parte immaginaria di $\phi(z)$ sopra il taglio, osserviamo che la fase della variabile z varia nell'intervallo $(0, 2\pi)$, affinché il taglio sia (x_0, ∞). Ciò significa che la fase della funzione sotto radice, $x_0 - z$, poiché in essa la variabile z compare con il segno meno, varierà in $(-\pi, \pi)$ con, inoltre, valore negativo sopra il taglio, dove la parte immaginaria viene valutata. Alla luce di ciò, per $z = x + i\,\epsilon$, con: $x > x_0$ ed $\epsilon \to 0^+$, si ha

$$\phi(x + i\epsilon) = \frac{\ln|f(x)| + i \arg[f(x)]}{e^{-i\pi/2}\sqrt{x - x_0}} = \frac{i\,\ln|f(x)| - \arg[f(x)]}{\sqrt{x - x_0}}\,,$$

quindi, sopra il taglio ($x > x_0$):

$$\mathrm{Im}[\phi(x)] = \frac{\ln|f(x)|}{\sqrt{x - x_0}}\,, \qquad \mathrm{Re}[\phi(x)] = -\frac{\arg[f(x)]}{\sqrt{x - x_0}}\,.$$

Usando queste espressioni nelle relazioni di dispersione per la $\phi(z)$ si ottengono le formule cercate.

Esercizio 2 (7 punti)

Si verifichi la prima delle identità dell'esercizio 1 per la funzione

$$f(z) = \left(x_0 - z\right)^{1/n}\,, \qquad \text{con: } x_0 > 0,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

SOLUZIONE 2

Dobbiamo calcolare l'integrale

$$I = \frac{\sqrt{x_0 - z}}{n\pi} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\ln(x - x_0)}{\sqrt{x - x_0}(x - z)} dx = \frac{\sqrt{x_0 - z}}{n\pi} A,$$

e quindi verificare che $I = \ln(x_0 - z)$.
Procediamo facendo la sostituzione $w = \ln(x - x_0)$, ovvero: $x = e^w + x_0$ e $dx = e^w\, dw$. L'integrale A diventa

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w e^{w/2}}{e^w + x_0 - z} dw\,.$$

L'integranda ha un insieme di poli semplici $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ nel piano complesso w, con

$$w_k = \ln(z - x_0) + 2ik\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Poiché $z \in D$, ovvero $z \notin (x_0, \infty)$, consideriamo due casi esclusivi: $z \in (-\infty, x_0)$ e $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. Nel primo caso, z è reale e minore di x_0, quindi

$$\mathrm{Re}(w_k) = \ln(x_0 - x)\,, \qquad \mathrm{Im}(w_k) = (2k+1)i\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

in particolare

$$w_0 = \ln(x_0 - x) + i\pi\,.$$

Nel secondo caso, z ha parte immaginaria non nulla, poniamo: $z = x + i\,y$ con $y \neq 0$ e avremo

$$\ln(z - x_0) = \ln|z - x_0| + i\arg(z - x_0) = \frac{1}{2}\ln\left[(x - x_0)^2 + y^2\right] + i\,\arctan\left(\frac{y}{x - x_0}\right)\,,$$

e, avendo $y \neq 0$

$$0 < \arctan\left(\frac{y}{x - x_0}\right) < \pi\,.$$

Ne consegue che, in ogni caso, si ha un solo polo con parte immaginaria strettamente compresa tra 0 e 2π, il primo: $w_0 = \ln(z - x_0)$.
Alla luce di ciò, definiamo nel piano complesso w un cammino di integrazione rettangolare, Γ_R, di altezza 2π e con un lato sull'asse reale, cioè

$$\Gamma_R = S[-R;R] \cup S[R;R+2i\pi] \cup S[R+2i\pi;-R+2i\pi] \cup S[-R+2i\pi;-R]\,,$$

dove $S[z_1;z_2]$ rappresenta il segmento rettilineo che unisce i punti z_1 e z_2, orientato dal primo verso il secondo. Per quanto precedentemente discusso, all'interno di tale rettangolo cade il solo polo w_0. Integrando la funzione dell'integrale A su Γ_R e facendo il limite $R \to \infty$ si ha

$$\begin{aligned}
2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{w e^{w/2}}{e^w + x_0 - z}, w_0\right] &= \oint_{\Gamma_R} \frac{w e^{w/2}}{e^w + x_0 - z} dw = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{w e^{w/2}}{e^w + x_0 - z} dw + \int_{R}^{-R} \frac{-(w+2i\pi)e^{w/2}}{e^w + x_0 - z} dw\right] \\
&= 2A + 2i\pi \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{w/2}}{e^w + x_0 - z} dw}_{B} = 2A + 2i\pi B\,.
\end{aligned}$$

Per l'integrale B usiamo lo stesso metodo

$$2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{w/2}}{e^w+x_0-z},w_0\right]=\oint_{\Gamma_R}\frac{e^{w/2}}{e^w+x_0-z}dw\;=\;\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}\frac{e^{w/2}}{e^w+x_0-z}dw+\int_{R}^{-R}\frac{-e^{w/2}}{e^w+x_0-z}dw\right]=2B\,.$$

Quindi, sostituendo i residui

$$\mathrm{Res}\left[\frac{w\,e^{w/2}}{e^w+x_0-z},w_0\right]\;=\;\lim_{w\to w_0}\frac{we^{w/2}}{e^w+x_0-z}(w-w_0)=w_0e^{w_0/2}\lim_{w\to w_0}\frac{w-w_0}{e^w+x_0-z}=w_0e^{-w_0/2}=\frac{\ln(z-x_0)}{\sqrt{z-x_0}}\,,$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{w/2}}{e^w+x_0-z},w_0\right]\;=\;\lim_{w\to w_0}\frac{e^{w/2}}{e^w+x_0-z}(w-w_0)=e^{w_0/2}\lim_{w\to w_0}\frac{w-w_0}{e^w+x_0-z}=e^{-w_0/2}=\frac{1}{\sqrt{z-x_0}}\,,$$

e avendo che: $x_0-z=(z-x_0)e^{-i\pi}$, si ottiene

$$A=\frac{i\pi}{\sqrt{z-x_0}}\left[\ln(z-x_0)-i\pi\right]=\frac{\pi}{-i\sqrt{z-x_0}}\ln(x_0-z)=\frac{\pi}{\sqrt{x_0-z}}\ln(x_0-z)\,.$$

Con questo risultato per A si calcola l'integrale iniziale, infatti

$$I=\frac{\sqrt{x_0-z}}{n\pi}A=\frac{\sqrt{x_0-z}}{n\pi}\frac{\pi}{\sqrt{x_0-z}}\ln(x_0-z)=\ln\left[(x_0-z)^{1/n}\right]=\ln[f(z)]\,,$$

ovvero si ha il logaritmo della funzione desiderata, la relazione di dispersione è quindi verificata.

Esercizio 3 (6 punti)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z)=\frac{\mathrm{sen}^2(z)}{z^2[\cos^2(z)-\cos^2(\alpha)]}\,,$$

con $\alpha\in\mathbb{R}$ e $0<|\alpha|<\pi$.

Soluzione 3

La funzione è meromorfa essendo rapporto di funzioni intere ed ha poli semplici per quei valori di z tali da verificare l'identità: $\cos(z)=\pm\cos(\alpha)$. Definiamo due insiemi di poli $\{p_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\{d_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ come

$$p_k^{\pm}=\pm\alpha+2k\pi,\qquad d_k^{\pm}=\pm\alpha+2(k-1)\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}\,,$$

con: $\cos(p_k^{\pm})=\cos(\alpha)$ e $\cos(d_k^{\pm})=-\cos(\alpha)$. L'unione di questi insiemi, $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, avrà come elementi

$$z_k^{\pm}=\pm\alpha+k\pi\,,\qquad k\in\mathbb{Z}\,.$$

La singolarità nell'origine è ovviamente eliminabile.
I residui dei poli sono

$$R_k^{\pm}\;=\;\frac{\mathrm{sen}^2(z_k^{\pm})}{(z_k^{\pm})^2}\frac{1}{-2\cos(z_k^{\pm})\mathrm{sen}(z_k^{\pm})}=\mp\frac{\tan(\alpha)}{2(\alpha\pm k\pi)^2}\,,$$

e quindi lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$
\begin{aligned}
f(z) &= g(z)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{R_k^+}{z-z_k^+}+\frac{R_k^-}{z-z_k^-}\right) \\
&= g(z)-\frac{\tan(\alpha)}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{(\alpha+k\pi)^2(z-\alpha-k\pi)}-\frac{1}{(\alpha-k\pi)^2(z+\alpha-k\pi)}\right),
\end{aligned}
$$

dove la funzione $g(z)$ rappresenta la parte intera che ha lo stesso comportamento asitotico della $f(z)$. Nel termine negativo della somma possiamo sostituire k con $-k$ grazie alla simmetria dell'intervallo di somma e alla convergenza della stessa, si ha allora

$$
f(z) = g(z)-\tan(\alpha)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k\pi)\left[z^2-(\alpha+k\pi)^2\right]}.
$$

Infine, consideriamo la successione $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, con $a_j = \alpha+\delta+(2j-1)\pi/2$, con $0<\delta<\pi/2$, per determinare il comportamento asintotico e quindi la funzione $g(z)$. Si ha, infatti,

$$
\lim_{j\to\infty} f(a_j) = \lim_{j\to\infty}\frac{\cos^2(\alpha+\delta)}{a_j^2[\operatorname{sen}^2(\alpha+\delta)-\cos^2(\alpha)]} = 0,
$$

essendo $[\operatorname{sen}^2(\alpha+\delta)-\cos^2(\alpha)]\neq 0$. Ne consegue che la funzione $g(z)$ è identicamente nulla e lo sviluppo di Mittag-Leffler si riduce a

$$
f(z) = -\tan(\alpha)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+k\pi)\left[z^2-(\alpha+k\pi)^2\right]}.
$$

Esercizio 4 (5 punti)

Sapendo che la trasformata di Fourier conserva la parità delle funzioni, si dimostrino le seguenti identità:

$$
\begin{aligned}
f(x)*g(x) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left[\tilde{f}(2\alpha)\cos(2\alpha x)+\tilde{f}(0)\right] && \text{per } f(x) \text{ pari,} \\
f(x)*g(x) &= \frac{i\sqrt{2\pi}}{2}\tilde{f}(2\alpha)\operatorname{sen}(2\alpha x) && \text{per } f(x) \text{ dispari,}
\end{aligned}
$$

dove il simbolo "$*$" indica il prodotto di convoluzione, la funzione $g(z)$ è

$$
g(x) = \cos^2(\alpha x), \qquad \text{con: } \alpha > 0,
$$

e $\tilde{f}(k)$ è la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$.

Soluzione 4

Partendo dal teorema di convoluzione nella forma

$$
\mathscr{F}_k[f*g] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[f]\cdot\mathscr{F}_k[g] = \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)\,\tilde{g}(k),
$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni opportunamente regolari, è possibile ottenere la convoluzione $(f*g)(x)$ come anti-trasformata di Fourier del prodotto delle trasformate, ovvero

$$
(f*g)(x) = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_{-k}\left[\tilde{f}\cdot\tilde{g}\right].
$$

La trasformata di Fourier della funzione $g(x)$ è

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\alpha x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\alpha x)+1}{2} e^{-ikx} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left[\delta(k-2\alpha)+\delta(k+2\alpha)+2\,\delta(k)\right],$$

quindi, per la convoluzione si ha:

$$\begin{aligned}(f*g)(x) = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_{-k}\left[\tilde{f}\cdot\tilde{g}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left[\delta(k-2\alpha)+\delta(k+2\alpha)+2\,\delta(k)\right] e^{ikx} dk \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \left[\tilde{f}(2\alpha)\, e^{2i\alpha x} + \tilde{f}(-2\alpha)\, e^{-2i\alpha x} + 2\tilde{f}(0)\right].\end{aligned}$$

Se $f(x)$ è una funzione pari, cioè tale per cui: $f(x) = f(-x)$, allora è pari anche la sua trasformata di Fourier, cioè $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(-k)$. In questo caso la convoluzione può essere scritta come

$$(f*g)(x) = \; = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left[\tilde{f}(2\alpha)\cos(2\alpha x) + \tilde{f}(0)\right].$$

Se, invece, $f(x)$ e quindi la sua trasformata di Fourier sono dispari, cioè $\tilde{f}(k) = -\tilde{f}(-k)$, ma anche $\tilde{f}(0) = 0$, avremo

$$(f*g)(x) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{2} \tilde{f}(2\alpha)\,\mathrm{sen}(2\alpha x).$$

Esercizio 5 (6 punti)

Sia $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^3$ una base ortonormale dello spazio vettoriale E_3 ed $\hat{U}$ un operatore lineare definito dalle relazioni

$$\begin{aligned}\hat{U}|a_1\rangle &= |a_2\rangle + \alpha|a_3\rangle, \\ \hat{U}|a_2\rangle &= \frac{1}{\beta}|a_3\rangle + \gamma|a_1\rangle, \\ \hat{U}|a_3\rangle &= \frac{1}{\delta}|a_1\rangle + \rho|a_2\rangle.\end{aligned}$$

Si trovino i valori, finiti, dei coefficienti α, β, γ, δ e ρ per i quali: l'operatore $\hat{U}$ è unitario, ammette come autovalore l'unità e l'autovettore corrispondente ha, rispetto alla base $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^3$, la seguente rappresentazione

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Si determinino, quindi, gli altri autovalori ed autovettori.

Soluzione 5

Affiché sia unitario, l'operatore deve conservare il prodotto, ovvero i tre vettori a secondo membro nelle definizioni precedenti devono essere ortonormali. Quindi, dalle condizioni di ortogonalità si hanno

$$\begin{aligned} 0 = \left(\langle a_2| + \alpha^*\langle a_3|\right)\left(\frac{1}{\beta}|a_3\rangle + \gamma|a_1\rangle\right) = \frac{\alpha^*}{\beta} \qquad &\Longrightarrow \qquad \alpha = 0, \\ 0 = \left(\langle a_2| + \alpha^*\langle a_3|\right)\left(\frac{1}{\delta}|a_1\rangle + \rho|a_2\rangle\right) = \rho \qquad &\Longrightarrow \qquad \rho = 0, \\ 0 = \left(\frac{1}{\beta}\langle a_3| + \gamma^*\langle a_1|\right)\left(\frac{1}{\delta}|a_1\rangle + \rho|a_2\rangle\right) = \frac{\gamma^*}{\delta} \qquad &\Longrightarrow \qquad \gamma = 0, \end{aligned}$$

mentre dalle (due) normalizzazioni si ottengono le condizioni: $|\beta| = |\delta| = 1$. Ne consegue che i due coefficienti rimasti sono delle fasi pure e potremmo definirli in termini di due angoli reali arbitrari come

$$\beta = e^{i\theta_1}\,, \qquad \delta = e^{i\theta_2}\,.$$

La rappresentazione dell'operatore rispetto alla base data è

$$U = \begin{pmatrix} \langle a_1|\hat{U}|a_1\rangle & \langle a_1|\hat{U}|a_2\rangle & \langle a_1|\hat{U}|a_3\rangle \\ \langle a_2|\hat{U}|a_1\rangle & \langle a_2|\hat{U}|a_2\rangle & \langle a_2|\hat{U}|a_3\rangle \\ \langle a_3|\hat{U}|a_1\rangle & \langle a_3|\hat{U}|a_2\rangle & \langle a_3|\hat{U}|a_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-i\theta_2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & e^{-i\theta_2} \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ -\lambda^3 + e^{-i(\theta_1+\theta_2)} &= 0 \\ \lambda_k &= e^{-i(\theta_1+\theta_2-2k\pi)/3}\,, \qquad k = -1, 0, 1\,. \end{aligned}$$

Affinché uno dei tre sia l'unità, scegliendo per le fasi la determinazione principale $(-\pi, \pi)$, è necessario che si abbia: $\theta_1 + \theta_2 = 0$. Infatti, in questo caso, i tre autovalori sono

$$\lambda_{-1} = e^{-2i\pi/3}\,, \qquad \lambda_0 = 1\,, \qquad \lambda_1 = e^{2i\pi/3}\,.$$

L'equazione agli autovalori per $\lambda_0 = 1$, usando la forma data per l'autovettore corrispondente, è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-i\theta_2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},$$

da cui si hanno le condizioni equivalenti

$$ie^{-i\theta_2} = 1\,, \qquad e^{-i\theta_1} = i\,,$$

ovvero: $-\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$. La forma definitiva della matrice U è

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli altri due autovettori, relativi agli autovalori $\lambda_{-1} \equiv \lambda_-$ e $\lambda_1 \equiv \lambda_+$, si ottengono dall'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \\ z_\pm \end{pmatrix} = e^{\pm 2i\pi/3} \begin{pmatrix} x_\pm \\ y_\pm \\ z_\pm \end{pmatrix},$$

posto $x_\pm = 1$, si hanno

$$y_\pm = e^{\mp 2i\pi/3}\,, \qquad z_+ = e^{-5i\pi/6}\,, \qquad z_- = e^{-i\pi/6}\,,$$

quindi, con l'opportuna normalizzazione,

$$u_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2i\pi/3} \\ e^{-i\pi/6} \end{pmatrix}, \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2i\pi/3} \\ e^{-5i\pi/6} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6 (6 punti)

Sia $\hat{D}$ l'operatore differenziale

$$\hat{D} = i\frac{d}{dx} + x\,,$$

definito in $L^2(0,a)$, con $a > 0$, ovvero la classe delle funzioni a quadrato sommabili in $(0,a)$ e, inoltre, tali che $f(0) = f(a)$. Si trovi una sistema ortonormale, $\{f_k(x)\} \subset L^2(0,a)$, rispetto al quale la rappresentazione di $\hat{D}$ sia diagonale.

Soluzione 6

Scriviamo l'equazione agli autovalori per l'operatore $\hat{D}$

$$\hat{D}\,f(x) = \lambda\,f(x)\,,$$

con $f(x) \in L^2(0,a)$. Si può integrare direttamente

$$i\,f'(x) + x\,f(x) = \lambda\,f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int_{f(0)}^{f(x)} f\;df = i\int_0^x (x' - \lambda)dx' \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = f(0)\,e^{i(x^2/2 - \lambda x)}\,.$$

La soluzione ottenuta non appartiene alla classe $L^2(0,a)$, infatti non verifica la condizione $f(0) = f(a)$. Possiamo però imporla usando il grado di libertà rappresentato dall'autovalore λ, ovvero

$$f(a) = f(0) \qquad \Rightarrow \qquad e^{i(a^2/2 - \lambda a)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad (a^2/2 - \lambda a) = -2k\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

il segno meno nell'ultima identità è stato messo per comodità. Gli autovalori e le autofunzioni sono quindi

$$\lambda_k = \frac{a}{2} + \frac{2k\pi}{a}\,, \qquad f_k(x) = f(0)\,\exp\left[ix\left(\frac{x-a}{2} - \frac{2k\pi}{a}\right)\right]\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Verifichiamo l'ortogonalità, con $m \neq k$:

$$(f_m, f_k) = |f(0)|^2 \int_0^a e^{2ix(m-k)\pi/a} dx = |f(0)|^2\,\frac{e^{2i(m-k)\pi} - 1}{2i(m-k)\pi/a} = 0\,.$$

La normalizzazione, invece, si ottiene fissando il valore $f(0)$, ovvero

$$1 = (f_k, f_k) = |f(0)|^2 \int_0^a dx = |f(0)|^2\,a\,,$$

da cui, a meno di una fase arbitraria, $f(0) = \sqrt{a}$. Infine le autofunzioni sono

$$f_k(x) = \sqrt{a}\,\exp\left[ix\left(\frac{x-a}{2} - \frac{2k\pi}{a}\right)\right]\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ovviamente la matrice infinito-dimensionale D, che rappresenta l'operatore rispetto a queste funzioni, è diagonale, per costruzione. L'elemento (k,m) si ottiene dal prodotto scalare

$$D_{km} = (f_k, \hat{D} f_m) = \lambda_m\,.(f_k, f_m) = \lambda_m\,\delta_{km} = \left(\frac{a}{2} + \frac{2m\pi}{a}\right)\,\delta_{km}\,.$$