Metodi Matematici per la Fisica

Primo appello estivo - 23 giugno 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\mercury = \Pr\int_{-1}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}\,.$$

Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha un polo semplice nell'origine, infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x - 1}x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1\,.$$

Il valore principale dell'integrale rispetto al polo semplice nell'origine può essere scritto in forma di limite

$$\mercury = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{e^x - 1} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{e^x - 1}\right) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{e^{-x}dx}{1 - e^{-x}} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{e^{-x}dx}{1 - e^{-x}}\right).$$

Integriamo direttamente e si ha

$$\begin{aligned}\mercury &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\ln\left(1 - e^{-x}\right)\Big|_{-1}^{-\epsilon} + \ln\left(1 - e^{-x}\right)\Big|_{\epsilon}^{1}\right) = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\ln\left(\frac{1 - e^{\epsilon}}{1 - e}\right) + \ln\left(\frac{1 - 1/e}{1 - e^{-\epsilon}}\right)\right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \ln\left(\frac{1 - e^{\epsilon}}{1 - e^{-\epsilon}}\right) + \ln\left(\frac{1 - 1/e}{1 - e}\right) = \ln(-1) + \ln\left(-\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right),\end{aligned}$$

da cui

$$\mercury = -1\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\jupiter = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(e^x + 1)}\,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa essendo il rapporto di funzioni intere. I poli coincidono con gli zeri della funzione a denominatore data dal prodotto di un polinomio di secondo grado e la serie di potenze $e^x + 1$. L'insieme dei poli è quindi l'unione degli insiemi degli zeri del polinomio, che sono le due radici quadrate di -1, cioè $z_\pm = \pm i$ e quelli dell'equazione

$$e^{z_k} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \{z_k = (2k+1)i\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}\,.$$

Usando il lemma di Jordan sul percorso chiuso

$$\Gamma_n = [-R,R] \cup \left\{z : z = 2n\pi e^{i\theta}\,, \theta \in [0,\pi]\right\} \equiv [-R,R] \cup \gamma_n^+\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

si ha, per il teorema dei residui,

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{\Gamma_n} \frac{dz}{(z^2+1)(e^z+1)} = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(e^z+1)}, i\right] + \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(e^z+1)}, z_k\right]\right).$$

Nel limite $n \to \infty$, ovvero al divergere del raggio della semicirconferenza γ_n^+, il relativo contributo all'integrale tende a zero. Consideriamo la funzione $1/(e^z + 1)$, questa può essere scritta come somma di una serie geometrica. In generale, per $z \in \gamma_n^+$, distinguiamo tre casi:

- se $|e^z| = e^x = e^{2n\pi\cos(\theta)} < 1$, ovvero se $\theta \in (\pi/2, \pi]$, si ha

$$\left|\frac{1}{e^z+1}\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{zk}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} e^{xk} = \frac{1}{1-e^x} < \infty\,,$$

  la maggiorazione segue dalla condizione $e^x < 1$ e vale $\forall\, z \in \gamma_n^+$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

- se $|e^z| = e^x = e^{2n\pi\cos(\theta)} > 1$, ovvero se $\theta \in [0, \pi/2)$, si ha

$$\left|\frac{1}{e^z+1}\right| = \left|\frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}\right| = \left|e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-zk}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} e^{xk} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x-1} < \infty\,,$$

  anche in questo caso la maggiorazione segue dalla condizione di convergenza $e^x > 1$ e vale $\forall\, z \in \gamma_n^+$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

- se $|e^z| = e^x = 1$, si ha una sola possibilità ovvero $x = 0$, che implica $z = iy = 2in\pi$, cioè $e^z = 1$, da cui

$$\left|\frac{1}{e^z+1}\right| = \frac{1}{2}\,.$$

  In definitiva, esiste un numero reale positivo $M \in (0, \infty)$, tale che

$$\left|\frac{1}{e^z+1}\right| \le M\,, \qquad \forall\, z \in \gamma_n^+\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Ne consegue che

$$\lim_{n\to\infty}\left|\oint_{\gamma_n^+}\frac{dz}{(z^2+1)(e^z+1)}\right| \le \lim_{n\to\infty}\oint_{\gamma_n^+}\frac{|dz|}{|z^2+1|\,|e^z+1|} \le \lim_{n\to\infty}\oint_{\gamma_n^+}\frac{2nM\pi d\theta}{((2n\pi)^2-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2nM\pi^2}{((2n\pi)^2-1)} = 0\,.$$

Alla luce di questo risultato si ha che, al divergere di n, l'integrale su Γ_n^+, tende all'integrale cercato $\mathfrak{I}$, cioè

$$\lim_{n\to\infty}\oint_{\Gamma_n}\frac{dz}{(z^2+1)(e^z+1)} = \lim_{n\to\infty}\int_{-2n\pi}^{2n\pi}\frac{dz}{(z^2+1)(e^z+1)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z^2+1)(e^z+1)} = \mathfrak{I}\,.$$

Usando il valore dello stesso limite ottenuto con il teorema dei residui si ha

$$\mathfrak{I} = 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(e^z+1)}, i\right] + \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(e^z+1)}, z_k\right]\right).$$

Il residuo del polo semplice $z_+ = i$ è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(e^z+1)}, i\right] = \frac{1}{2i\,(e^i+1)} = \frac{e^{-i/2}}{4i\cos(1/2)} = \frac{\cos(1/2) - i\,\mathrm{sen}(1/2)}{4i\cos(1/2)} = -\frac{i}{4} - \frac{\tan(1/2)}{4}\,.$$

Quelli dei poli semplici dell'insieme $\{z_k = (2k+1)i\pi\}_{k\in\mathbb{N}}$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)(e^z+1)}, z_k\right] = \frac{1}{\left(z_k^2+1\right)e^{z_k}} = -\frac{1}{-(2k+1)^2\pi^2+1} = \frac{1}{(2k+1)^2\pi^2-1}\,, \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.$$

L'integrale vale

$$☿ = 2i\pi\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2-1} - \frac{\tan(1/2)}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\,,$$

poiché l'integrare è reale e quindi $☿ = \mathrm{Re}\,(☿)$, non è necessario calcolare la somma della serie, infatti

$$☿ = \mathrm{Re}\,(☿) = \mathrm{Re}\left[2i\pi\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2-1} - \frac{\tan(1/2)}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}\,.$$

Si può usare questo risultato per ottenere la somma della serie, dalla condizione di realtà consegue la nullità della parte immaginaria, cioè

$$0 = \mathrm{Im}\,(☿) = \mathrm{Im}\left[2i\pi\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2-1} - \frac{\tan(1/2)}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2} = 2\pi\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2-1} - \frac{\tan(1/2)}{4}\right),$$

da cui

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\pi^2-1} = \frac{\tan(1/2)}{4}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottengano i primi quattro coefficienti non nulli della serie di Laurent della funzione

$$♅(z) = \frac{1}{e^z+1}\,,$$

con centro in $z = 3i\pi$, convergente nel punto $z_0 = 2i\pi$ e i corrispondenti coefficienti della serie avente lo stesso centro e convergente nell'origine. Che relazione intercorre tra i coefficienti omologhi?

Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa, ha un'infinità di poli semplici nei punti elementi dell'insieme $\{p_k = (2k+1)i\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il centro dello sviluppo trattato dal problema è il polo $p_1 = 3i\pi$. I poli più vicini, simmetrici rispetto ad esso, sono il precedente e il successivo nella numerazione proposta, rispettivamente $p_0 = i\pi$ e $p_2 = 5i\pi$, sono equidistanti dal centro z_1, infatti $|p_0 - p_1| = |p_2 - p_1| = 2\pi$. Ne consegue che le infinite serie di Laurent centrate convergono nella successione di corone circolare concentriche $\{D_k\}_{k=0}^{\infty}$, con

$$D_k = \{z : 2k\pi < |z - 3i\pi| < 2(k+1)\pi\}\,.$$

La prima serie, convergente in $z_0 = 2i\pi$ converge nella prima corona D_0, infatti $0 < |z_0 - 3i\pi| = \pi < 2\pi$, mentre la seconda, convergente nell'origine, è quella definita nella seconda corona D_1, che contiene l'origine, si ha: $2\pi < |0 - 3i\pi| = 3\pi < 4\pi$.
In D_0, moltiplicando numeratore e denominatore della funzione $♅(z)$ per $e^{-p_1} = -1$, sviluppando in serie l'esponen-

ziale a denominatore e usando la somma della serie geometrica, si ha

$$
\begin{aligned}
\mercury(z) &= \frac{e^{-z_1}}{e^{z-p_1}+e^{-p_1}} = \frac{-1}{e^{z-p_1}-1} = \frac{1}{1-e^{z-p_1}} = \frac{1}{-\sum_{k=1}^{\infty}(z-p_1)^k/k!} = -\frac{1}{z-p_1}\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(z-p_1)^k/(k+1)!} \\
&= -\frac{1}{z-p_1}\left(1+\frac{z-p_1}{2!}+\frac{(z-p_1)^2}{3!}+\mathcal{O}\left((z-p_1)^3\right)\right)^{-1} \\
&= -\frac{1}{z-p_1}\Bigg[1-\left(\frac{z-p_1}{2!}+\frac{(z-p_1)^2}{3!}+\mathcal{O}\left((z-p_1)^3\right)\right)+\left(\frac{z-p_1}{2!}+\frac{(z-p_1)^2}{3!}+\mathcal{O}\left((z-p_1)^3\right)\right)^2 \\
&\qquad -\left(\frac{z-p_1}{2!}+\frac{(z-p_1)^2}{3!}+\mathcal{O}\left((z-p_1)^3\right)\right)^3+\ldots\Bigg].
\end{aligned}
$$

Raccogliendo le potenze dello stesso ordine dai termini della serie, e verificando che il coefficiente della seconda potenza è nullo si ha che i primi quattro coefficienti non nulli sono C_{-1}, C_0, C_1 e C_3, infatti

$$
\begin{aligned}
\mercury(z) &= -\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{2}+(z-p_1)\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{(2!)^2}\right)+(z-p_1)^2\left(\frac{1}{4!}-\frac{2}{2!3!}+\frac{1}{(2!)^3}\right)+\cdots \\
&= -\frac{1}{z-p_1}+\frac{1}{2}-(z-p_1)\frac{1}{12}+(z-p_1)^2\frac{1-4+3}{24}+(z-p_1)^3\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{(3!)^2}-\frac{2}{2!4!}+\frac{3}{(2!)^2 3!}-\frac{1}{(2!)^4}\right)+\cdots \\
&= -\frac{1}{z-p_1}+\frac{1}{2}-(z-p_1)\frac{1}{12}+(z-p_1)^3\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{36}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right)+\cdots \\
&= -\frac{1}{z-p_1}+\frac{1}{2}-(z-p_1)\frac{1}{12}+(z-p_1)^3\frac{1}{720}+\cdots,
\end{aligned}
$$

in dettaglio

$$
C_{-1}=-1\,,\qquad C_0=\frac{1}{2}\,,\qquad C_1=-\frac{1}{12}\,,\qquad C_3=\frac{1}{720}\,.
$$

I coefficienti omologhi, che indichiamo con B_j, per $j=-1,0,1,3$, della serie di Laurent convergente nella seconda corona D_1 si ottengono dalla definizione in forma integrale, ovvero

$$
B_j = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-p_1|=3\pi}\frac{dz}{(e^z+1)(z-p_1)^{j+1}}\,,
$$

il percorso d'integrazione è la circonferenza centrata in $z=p_1$ di raggio 3π contenuta nella corona D_1 e tale da avvolgere una sola volta il centro $z=p_1$. Questa circonferenza, come ogni altro percorso chiuso $\gamma\subset D_1$ e tale che $n(p_1,\gamma)=1$, avvolge i poli semplici dell'integranda $p_0=i\pi$ e $p_2=5i\pi$, oltre, naturalmente, al polo $z_1=3i\pi$ di ordine $j+2$, per $j=-1,0,1,3$. Usando il teorema dei residui si ha

$$
B_j = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-p_1|=3\pi}\frac{dz}{(e^z+1)(z-p_1)^{j+1}} = \sum_{k=0}^{2}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z+1)(z-p_1)^{j+1}},p_k\right].
$$

I residui in p_1, centro della serie di Laurent, coincidono con i coefficienti C_j, per $j=-1,0,1,3$, che infatti sono definiti dagli integrali della stessa integranda calcolati, ad esempio, sulla circonferenza centrata in p_1 di raggio π, tale, cioè, da appartenere alla prima corona D_0 e avvolgere una sola volta il centro p_1. In dettaglio

$$
C_j = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z-p_1|=\pi}\frac{dz}{(e^z+1)(z-p_1)^{j+1}} = \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z+1)(z-p_1)^{j+1}},p_1\right],\qquad j=-1,0,1,3\,.
$$

Si ottiene così la relazione richiesta tra le quaterne di coefficienti $\{C_j\}_{j=-1,0,1,3}$ e $\{B_j\}_{j=-1,0,1,3}$. I coefficienti omologhi differiscono per la somma dei residui nei poli semplici p_0 e p_2, cioè

$$
\begin{aligned}
B_j &= C_j+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z+1)(z-p_1)^{j+1}},p_0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(e^z+1)(z-p_1)^{j+1}},p_2\right] \\
&= C_j-\frac{1}{(p_0-p_1)^{j+1}}-\frac{1}{(p_2-p_1)^{j+1}} = C_j-\frac{1}{(2i\pi)^{j+1}}\left((-1)^{j+1}+1\right).
\end{aligned}
$$

Il coefficiente di ordine pari, $j=0$, è lo stesso nei due casi, mentre quelli di ordine dispari, $j=-1,1,3$, differiscono per $-2/(2i\pi)^{j+1}$. In dettaglio

$$B_{-1}=C_{-1}-2=-3\,,\qquad B_0=C_0=\frac{1}{2}\,,\qquad B_1=C_1-\frac{2}{-4\pi^2}=-\frac{1}{12}+\frac{1}{2\pi^2}\,,\qquad B_3=C_3-\frac{2}{16\pi^4}=\frac{1}{720}-\frac{1}{8\pi^4}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Sfruttando l'equazione di Parseval generalizzata per la trasformata di Fourier e assumendo che valga anche per la funzione seno nel caso particolare di questo problema, si calcoli l'integrale

$$\mathbb{O}=\int_{-\infty}^{\infty} x\ \mathrm{sen}(x)e^{-x^2}dx\,.$$

Soluzione del quarto problema

L'equazione di Parseval generalizzata afferma l'identità tra il prodotto scalare di due funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ e quello delle rispettive trasformate di Fourier. In questo caso, potremmo interpretare l'integrale dato come il prodotto scalare (f,g) dove

$$f(x)=\mathrm{sen}(x)\,,\qquad g(x)=xe^{-x^2}\,,$$

delle due funzioni solo $g(x)\in L^2(\mathbb{R})$, ovvero è a quadrato sommabile in $\mathbb{R}$, ma, come richiesto dal problema, assumiamo comunque valide l'equazione di Parseval generalizzata, quindi, per calcolare l'integrale usiamo

$$\mathbb{O}=(f,g)=(\mathscr{F}_k[f],\mathscr{F}_k[g])\,.$$

La trasformata di Fourier della funzione seno è

$$\mathscr{F}_k[\mathrm{sen}(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sen}(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-ix(k-1)}-e^{-ix(k+1)}\right)dx\,,$$

usando la rappresentazione integrale della distribuzione delta di Dirac

$$\delta(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuw}dw\,,$$

si ha

$$\mathscr{F}_k[\mathrm{sen}(x)]=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\Big(2\pi\delta(k-1)-2\pi\delta(k+1)\Big)=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\delta(k+1)-\delta(k-1)\Big).$$

La trasformata di Fourier della funzione xe^{-x^2} è proporzionale a quella della derivata prima della funzione gaussiana, ovvero

$$\mathscr{F}_k\left[xe^{-x^2}\right]=\mathscr{F}_k\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right]=-\frac{ik}{2}\mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right]=-\frac{ik\,e^{-k^2/4}}{2\sqrt{2}}\,.$$

Il prodotto scalare delle trasformate di Fourier e quindi l'integrale cercato vale

$$\begin{aligned}\mathbb{O}&=(f,g)=(\mathscr{F}_k[f],\mathscr{F}_k[g])=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathscr{F}_k[f])^*\,\mathscr{F}_k[g]\,dk=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\delta(k+1)-\delta(k-1)\Big)ke^{-k^2/4}dk\\&=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(-e^{-1/4}-e^{-1/4}\right)=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-e^{-1/4}\right),\end{aligned}$$

da cui

$$\mathbb{O}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\,e^{1/4}}\,.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che dato un generico operatore invertibile $\hat{M}$ definito nello spazio di Hilbert E_N a N dimensioni, esiste sempre una coppia di operatori unitari $\hat{U}$ e $\hat{V}$, tali che l'operatore $\hat{U}^\dagger\hat{M}\hat{V}$ sia normale e quindi diagonalizzabile.

Suggerimento. Potrebbe essere utile sfruttare il fatto che gli operatori $\hat{M}\hat{M}^\dagger$ e $\hat{M}^\dagger\hat{M}$ sono diversi e entrambi hermitiani, quindi normali e diagonalizzabili.

Soluzione del quinto problema

Assumiamo l'esistenza dei due operatori unitari $\hat{U}$ e $\hat{V}$, indichiamo $\hat{M}' = \hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{V}$ e imponiamo la condizione di normalità, ovvero l'annullamento del commutatore

$$\begin{aligned}\left[\hat{M}', \hat{M}'^\dagger\right] &= \hat{M}'\hat{M}'^\dagger - \hat{M}'^\dagger \hat{M}' = \hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{V} \left(\hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{V}\right)^\dagger - \left(\hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{V}\right)^\dagger \hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{V} = \hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{V} \hat{V}^\dagger \hat{M}^\dagger \hat{U} - \hat{V}^\dagger \hat{M}^\dagger \hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{V} \\ &= \hat{U}^\dagger \hat{M} \hat{M}^\dagger \hat{U} - \hat{V}^\dagger \hat{M}^\dagger \hat{M} \hat{V} = 0\,,\end{aligned}$$

che equivale all'equazione matriciale

$$U^\dagger M M^\dagger U = V^\dagger M^\dagger M V\,,$$

dove le matrici U, M e V, rappresentano gli omonimi operatori rispetto a una base canonica. Le matrici dei due membri della precedente equazione possono essere interpretate come le forme diagonalizzate delle matrici $MM^\dagger$ e $M^\dagger M$ che in generale sono diverse. Condizione sufficiente affinché valga l'identità è che le due matrici e quindi i due operatori abbiano lo stesso spettro discreto, ovvero gli stessi autovalori. Consideriamo le due equazioni agli autovalori

$$\hat{M}\hat{M}^\dagger |u_k\rangle = \mu_k |u_k\rangle\,, \qquad \hat{M}^\dagger \hat{M} |v_k\rangle = v_k |v_k\rangle\,, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,,$$

dove $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^N$ sono gli insiemi di autovettori, e $\{\mu_k\}_{k=1}^N$ e $\{v_k\}_{k=1}^N$ quelli degli autovalori dei due operatori. Applicando l'operatore $\hat{M}$ su ambo i membri della seconda si ha

$$\hat{M}\hat{M}^\dagger \hat{M} |v_k\rangle = v_k \hat{M} |v_k\rangle\,, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,,$$

che possiamo leggere come l'equazione agli autovalori per l'operatore $\hat{M}\hat{M}^\dagger$, dove $\left\{\hat{M}|v_k\rangle\right\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovettori e $\{v_k\}_{k=1}^N$ quello degli autovalori, che, quindi coincide con $\{\mu_k\}_{k=1}^N$. Ne consegue che le rappresentazioni diagonali degli operatori $\hat{M}\hat{M}^\dagger$ e $\hat{M}^\dagger \hat{M}$, se pur rispetto a basi ortonormali diverse e quindi fatte con matrici unitarie diverse, coincidono e si hanno

$$U^\dagger M M^\dagger U = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)\,, \qquad V^\dagger M^\dagger M V = \mathrm{diag}(v_1, v_2, \ldots, v_N) = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N)\,,$$

da cui l'annullamento del commutatore cercato.

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si consideri l'operatore prodotto vettoriale per un dato vettore, ovvero l'operatore $\hat{V}$ definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 dall'azione

$$\hat{V}|x\rangle = |y\rangle\,, \qquad \forall\, |x\rangle \in E_3\,,$$

in modo tale che le componenti contro-varianti delle rappresentazioni dei vettori $|x\rangle$ e $|y\rangle$ rispetto a una base canonica verifichino la relazione

$$(y^1, y^2, y^3) = (p^1, p^2, p^3) \times (x^1, x^2, x^3)\,,$$

dove il simbolo "$\times$" indica il prodotto vettoriale come definito in $\mathbb{C}^3$ e p^1, p^2 e p^3 sono le componenti contro-varianti del vettore dato e fissato. Si ottenga la matrice V che rappresenta l'operatore rispetto alla base canonica considerata e si calcolino gli autovalori nel caso generale. Inoltre, nel caso particolare in cui $p^1 = p^2 = p^3 = 1$, si ricavino anche le rappresentazioni degli autovettori.

Soluzione del sesto Problema

Le componenti del prodotto vettoriale possono essere scritte in termini del tensore di Levi-Civita ϵ_{jkm}, con $j, k, m \in \{1, 2, 3\}$, come

$$y^j = \epsilon^j_{\ km} p^k x^m\,, \qquad \forall\, j \in \{1, 2, 3\}\,.$$

Questa relazione e, in particolare, la contrazione a secondo membro può essere posta in forma matriciale, dove gli indici j e m sono rispettivamente quelli di riga e colonna, mentre si somma sull'indice k, ovvero sulle componenti del vettore fissato p, si ha

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon^1{}_{k1}p^k & \epsilon^1{}_{k2}p^k & \epsilon^1{}_{k3}p^k \\ \epsilon^2{}_{k1}p^k & \epsilon^2{}_{k2}p^k & \epsilon^2{}_{k3}p^k \\ \epsilon^3{}_{k1}p^k & \epsilon^3{}_{k2}p^k & \epsilon^3{}_{k3}p^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^1{}_{32}p^3 & \epsilon^1{}_{23}p^2 \\ \epsilon^2{}_{31}p^3 & 0 & \epsilon^2{}_{13}p^1 \\ \epsilon^3{}_{21}p^2 & \epsilon^3{}_{12}p^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -p^3 & p^2 \\ p^3 & 0 & -p^1 \\ -p^2 & p^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Ne consegue che quella che compare nell'ultimo membro è la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{V}$, cioè

$$\hat{V} \hookleftarrow V = \begin{pmatrix} 0 & -p^3 & p^2 \\ p^3 & 0 & -p^1 \\ -p^2 & p^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori dell'operatore $\hat{V}$ si ottengono come zeri dell'equazione secolare

$$\det(V - \lambda I) = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -p^3 & p^2 \\ p^3 & -\lambda & -p^1 \\ -p^2 & p^1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$-\lambda\left(\lambda^2 + \left(p^1\right)^2 + \left(p^2\right)^2 + \left(p^3\right)^2\right) = 0,$$

le soluzioni e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_\pm = \pm i\sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}.$$

Nel caso particolare indicato dal problema, ovvero considerando le componenti $p^1 = p^2 = p^3 = 1$, gli autovalori sono

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_\pm = \pm i\sqrt{3}.$$

Le componenti contro-varianti dell'autovettore $|v_0\rangle$ relativo all'autovalore $\lambda_0 = 0$ si ottengono come soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^1 \\ v_0^2 \\ v_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posto $v_0^1 = v$ si hanno $v_0^2 = v_0^3 = v$, quindi, normalizzando

$$|v_0\rangle \hookleftarrow v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allo stesso modo, le componenti contro-varianti degli autovettori $|v_\pm\rangle$ relativi agli autovalori $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{3}$ si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} \mp i\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & \mp i\sqrt{3} & -1 \\ -1 & 1 & \mp i\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\pm^1 \\ v_\pm^2 \\ v_\pm^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Anche in questo caso poniamo $v_\pm^1 = v$, dalla prima e terza riga si ottengono le equazioni

$$v_\pm^2 = v_\pm^3 \mp iv\sqrt{3}, \qquad v_\pm^2 = v \pm iv_\pm^3\sqrt{3},$$

da cui le espressioni in termini di v delle terze e seconde componenti contro-varianti

$$v_\pm^3 = v\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ve^{\pm 2i\pi/3}, \qquad v_\pm^2 = v\left(-\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ve^{\mp 2i\pi/3}.$$

Le rappresentazioni dei rimanenti autovettori normalizzati sono

$$|v_\pm\rangle \hookleftarrow v_\pm = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\mp 2i\pi/3} \\ e^{\pm 2i\pi/3} \end{pmatrix} .$$