

# METODI MATEMATICI PER LA FISICA

## PROVA SCRITTA - 23 FEBBRAIO 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

### PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$M = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

### SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

L'integranda è pari, quindi possiamo "simmetrizzare" l'intervallo di integrazione come

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

La funzione integranda, estesa al piano complesso, ha due poli semplici in  $z = \pm i$ . Inoltre, definendo le fasi per le due funzioni, il cui prodotto rappresenta l'argomento della radice quadrata a denominatore, come

$$1 \pm z = |1 \pm z| e^{i\theta_{1,2}}, \quad \begin{aligned} \theta_1 &\in (0, 2\pi) \\ \theta_2 &\in (-\pi, \pi) \end{aligned}.$$

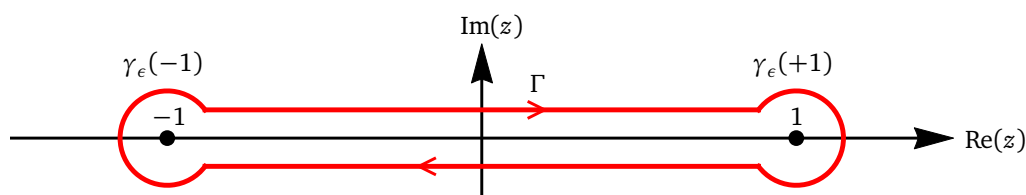
si ha una discontinuità di tipo taglio lungo il segmento  $[0, 1]$ . In particolare, sopra il taglio, con  $z = x + i\epsilon$ ,  $x \in [0, 1]$  e  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , avremo

$$\sqrt{1-z^2}^+ = \sqrt{1-x^2} e^{i(\theta_1^+ + \theta_2^+)/2} \sqrt{1-x^2} e^{i(0+0)/2} = \sqrt{1-x^2},$$

mentre sotto, per  $z = x - i\epsilon$ , si ha invece

$$\sqrt{1-z^2}^- = \sqrt{1-x^2} e^{i(\theta_1^- + \theta_2^-)/2} \sqrt{1-x^2} e^{i(2\pi+0)/2} = -\sqrt{1-x^2}.$$

L'apice + (-) indica il valore limite sul bordo superiore (inferiore) del taglio.



Considerando il percorso di integrazione chiuso,  $\Gamma$ , mostrato in figura, che avvolge il taglio, si ha, per il teorema dei residui,

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = \oint_{\Gamma} f(z) dz = 2i\pi (\text{Res}[f(z), i] + \text{Res}[f(z), -i]).$$

Ne consegue che l'integrale su  $\Gamma$  nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  è

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\epsilon}(-1)} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\epsilon}(+1)} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = 4M.$$

I contributi sugli archi infinitesimi  $\gamma_{\epsilon}(\pm 1)$  sono nulli in quanto su di essi si hanno i limiti uniformi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{z \mp 1}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mp \sqrt{1 \mp z}}{1+z^2} = 0.$$

Per calcolare i residui dobbiamo valutare la radice quadrata nei punti  $z = \pm i$  usando correttamente la definizione delle fasi. In particolare, per  $z = i$  si ha

$$\sqrt{1-z^2} \Big|_{z=i} = \sqrt{(1-i)(1+i)} = \sqrt{2} e^{i(-\pi/4+\pi/4)/2} = \sqrt{2},$$

infatti il primo fattore è scritto come  $(1-i) = e^{-i\pi/4}/\sqrt{2}$ , la fase non è  $7i\pi/4$  in quanto  $\theta_2$  varia in  $(-\pi, \pi)$ . Il valore della radice quadrata in  $z = -i$  è

$$\sqrt{1-z^2} \Big|_{z=-i} = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{2} e^{i(\pi/4+7\pi/4)/2} = -\sqrt{2},$$

in questo caso la scelta della fase è importante per il secondo fattore, ovvero  $(1-i) = e^{7i\pi/4}/\sqrt{2}$ , si deve usare la fase  $7i\pi/4$  anziché  $-i\pi/4$ , poiché la determinazione scelta per  $\theta_1$  è  $(0, 2\pi)$ .

Alla luce di questi risultati, i residui sono

$$\text{Res}[f(z), \pm i] = \frac{1}{\pm 2i \sqrt{1-z^2} \Big|_{z=\pm i}} = \frac{1}{2i\sqrt{2}}.$$

In definitiva, il valore dell'integrale è

$$M = \frac{1}{4} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)\sqrt{1-z^2}} = \frac{i\pi}{2} (\text{Res}[f(z), i] + \text{Res}[f(z), -i]) = \frac{i\pi}{2} \frac{1}{i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

## SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$P = \text{Pr} \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x^2 + 2x - 3)\sqrt{4-x^2}}.$$

### SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione integranda ha due poli semplici in

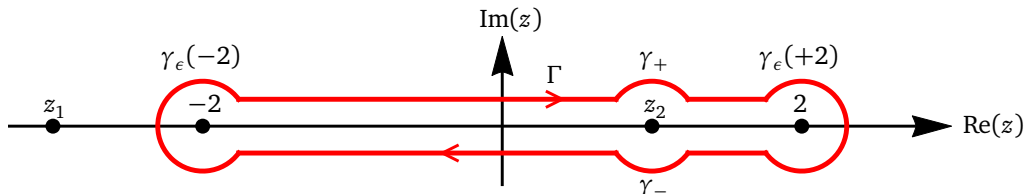
$$z_1 = -3, \quad z_2 = 1,$$

in particolare  $z_2$  appartiene all'intervallo d'integrazione. Si ha inoltre una discontinuità di tipo taglio lungo il segmento  $[-2, 2]$ , che si ottiene scegliendo le determinazioni

$$2 \pm z = |2 \pm z| e^{i\theta_{1,2}}, \quad \begin{matrix} \theta_1 \in (0, 2\pi) \\ \theta_2 \in (-\pi, \pi) \end{matrix},$$

per le due funzioni il cui prodotto rappresenta l'argomento della radice quadrata a denominatore dell'integranda. Sopra e sotto il taglio, ovvero per  $z = x \pm i\epsilon$ , con  $x \in [-2, 2]$  e  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , avremo rispettivamente

$$\begin{aligned}\sqrt{4-z^2}^+ &= \sqrt{4-x^2} e^{i(\theta_1^++\theta_2^+)/2} \sqrt{4-x^2} e^{i(0+0)/2} = \sqrt{4-x^2}, \\ \sqrt{4-z^2}^- &= \sqrt{4-x^2} e^{i(\theta_1^-+\theta_2^-)/2} \sqrt{4-x^2} e^{i(2\pi+0)/2} = -\sqrt{4-x^2}.\end{aligned}$$



Consideriamo il percorso di integrazione chiuso  $\Gamma$ , mostrato in figura, che avvolge il segmento  $[-2, 2]$ . L'integrale su tale può essere scritto come la somma di sei contributi; i due sui tratti rettilinei, nel limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , rappresentano ciascuno il valore principale, si ha cioè

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4-z^2}} &= 2 \text{Pr} \int_{-2}^2 \frac{dx}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4-x^2}} \\ &- \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{\gamma_+} \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{4-z^2}} + \int_{\gamma_-} \frac{dz}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4-z^2}} \right. \\ &\left. + \int_{\gamma_{\epsilon(+2)}} \frac{dz}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4-z^2}} + \int_{\gamma_{\epsilon(-2)}} \frac{dz}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4-z^2}} \right].\end{aligned}$$

Gli integrali sugli archi infinitesimi  $\gamma_{\pm}$ , centrati in  $z_2 = 1$ , sono

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\pm}} \frac{dz}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4-z^2}} = -i\pi A_{\pm} = \mp \frac{i\pi}{4\sqrt{3}},$$

in quanto si hanno i limiti uniformi

$$A_{\pm} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(z-z_1)\sqrt{(2-z)(2+z)}} = \frac{1}{\pm 4\sqrt{3}}.$$

Il contributo degli archi  $\gamma_{\epsilon}(\pm 2)$  è nullo,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\epsilon}(\pm 2)} \frac{dz}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4-z^2}} = 0$$

infatti si hanno i limiti uniformi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{z \mp 2}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4-z^2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mp \sqrt{2 \mp z}}{z^2 + 2z - 3} = 0.$$

In definitiva

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4 - z^2}} = 2 \operatorname{Pr} \int_{-2}^2 \frac{dx}{(z^2 + 2z - 3)\sqrt{4 - x^2}} = 2P.$$

L'integrale su  $\Gamma$  si calcola con il teorema dei residui come

$$P = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)\sqrt{4 - z^2}} = i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)\sqrt{4 - z^2}}, z = z_1 \right].$$

Per valutare la radice quadrata in  $z = z_1 = -3$  è necessario considerare le determinazioni scelte per le funzioni  $(2 \pm z)$ , ovvero

$$\sqrt{4 - z^2} \Big|_{z=-3} = \sqrt{|2 - z|e^{i\theta_2}|2 + z|e^{i\theta_1}} \Big|_{z=-3} = \sqrt{5e^{i0}1e^{i\pi}} = \sqrt{5}e^{i\pi/2} = i\sqrt{5}$$

da cui

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)\sqrt{4 - z^2}}, z = z_1 \right] = \frac{1}{(z_1 - z_2)i\sqrt{5}} = \frac{1}{-4i\sqrt{5}}.$$

Infine per l'integrale completo si ha

$$P = i\pi \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)\sqrt{4 - z^2}}, z = z_1 \right] = -\frac{\pi}{4\sqrt{5}}.$$

### TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO 5/30)

Data la funzione reale a due variabili reali

$$u(x, y) = \cos(x^2 - y^2) \cosh(2xy),$$

si verifichi che può rappresentare la parte reale di una funzione analitica  $f(z)$  e si determini tale funzione con la condizione  $f(0) = 1$ .

### SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Si può usare la formula

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0),$$

che vale nel caso in cui la funzione abbia un valore reale nell'origine.

Con la condizione  $u(0, 0) = f(0) = 1$ , si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= 2 \cos(z^2/4 + z^2/4) \cosh(iz^2/2) - 1 \\ &= 2 \cos(z^2/2) \cos(z^2/2) - 1 \\ &= 2 \cos^2(z^2/2) - 1 \\ &= \cos(z^2). \end{aligned}$$

La funzione cercata è

$$f(z) = \cos(z^2).$$

#### QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Date le matrici  $3 \times 3$ , scritte in notazioni a blocchi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix},$$

dove  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  sono la seconda e terza matrice di Pauli ( $2 \times 2$ ), si dimostri che la matrice

$$U = e^{[A,B]}$$

è unitaria e si determinino autovettori ed autovalori.

#### SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Sfruttando l'algebra delle matrici di Pauli, espressa da commutatore

$$[\sigma_m, \sigma_n] = 2i\epsilon_{mnl}\sigma_l,$$

da cui

$$[\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1,$$

si ottiene, per il commutatore tra le matrici  $A$  e  $B$ ,

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\sigma_2, \sigma_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice commutatore  $[A, B]$  sono le soluzioni dell'equazione in  $\lambda$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2i \\ 0 & 2i & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$-\lambda(\lambda^2 + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2i \\ \lambda_3 = -2i \end{matrix}.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Per il teorema ottico questi ultimi sono anche autovettori della matrice  $U = e^{[A,B]}$ , con autovalori  $\{\mu_k = e^{\lambda_k}\}_{k=1}^3$ , ovvero

$$Uu_k = \mu_k u_k, \quad \begin{matrix} \mu_1 = e^{\lambda_1} = 1 \\ \mu_2 = e^{\lambda_2} = e^{2i} \\ \mu_3 = e^{\lambda_3} = e^{-2i} \end{matrix},$$

essendo questi autovalori delle fasi pure,  $|\mu_k| = 1$ ,  $k = 1, 2, 3$ , si ha che  $U$  è una matrice unitaria.

### QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Sia  $A$  una matrice  $4 \times 4$ , che rappresenta un operatore hermitiano in uno spazio di Hilbert a quattro dimensioni e che ha i quattro autovalori

$$\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 2.$$

Rispetto alla base canonica, gli autovettori corrispondenti ai primi tre autovalori sono

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino il quarto autovettore e la matrice  $A$ . Si dimostri, infine, che la matrice  $B = \cos^2(\pi A)$  è l'identità.

### SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Essendo la matrice hermitiana, in quanto l'operatore che rappresenta è hermitiano, si ha che gli autostati relativi ad autovalori distinti sono ortogonali. Quindi il quarto autostato è ortogonale ai primi tre. Detto

$$a_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix},$$

dalle tre condizioni di ortogonalità segue

$$\begin{cases} a_1^\dagger a_4 = 0 \\ a_2^\dagger a_4 = 0 \\ a_3^\dagger a_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + w = 0 \\ x - w = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ w = 0 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La versione diagonale di  $A$  è

$$A_d = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria che diagonalizza  $A$  si ottiene allineando gli autovettori, normalizzati ad uno, lungo le colonne, cioè

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
 A &= UA_d U^\dagger \\
 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Infine, per il teorema spettrale, la matrice  $B = \cos^2(\pi A)$  ha gli stessi autovettori di  $A$  e come autovalori i numeri dell'insieme  $\{\cos^2(\pi\alpha_k)\}_{k=1}^4$ , che sono tutti uguali ad uno. Ne consegue che la rappresentazione diagonale di  $B$ , è l'identità, ovvero:  $B_d = I$ . Per ottenere  $B$  si usa la stessa matrice unitaria diagonalizzante di  $A$ , in quanto gli autovettori sono gli stessi,

$$B = UB_d U^\dagger = UIU^\dagger = UU^\dagger = I.$$

## SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}.$$

**Suggerimento.** È utile in questo caso la regola di trasformazione delle derivate di una funzione.

### SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

La regola di trasformazione delle derivate di una funzione  $g(x)$  è

$$\mathcal{F}_k \left[ \frac{d^n g(x)}{dx^n} \right] = (ik)^n \mathcal{F}_k [g(x)] = (ik)^n \tilde{g}(k),$$

ovvero, per le anti-trasformate,

$$\mathcal{F}_{-x} \left[ \frac{d^n \tilde{g}(k)}{dk^n} \right] = (-ix)^n \mathcal{F}_{-x} [\tilde{g}(k)] = (-ix)^n g(x).$$

In particolare, con  $g(x) = e^{-x^2}$  ed  $n = 3$ , avremmo

$$\mathcal{F}_{-x} \left[ \frac{d^3 \tilde{g}(k)}{dk^3} \right] = (-ix)^3 e^{-x^2} = ix^3 e^{-x^2} = if(x),$$

da cui, la trasformata di Fourier di  $f(x)$

$$\tilde{f}(k) = -i \frac{d^3 \tilde{g}(k)}{dk^3}.$$

La funzione  $\tilde{g}(k)$  è la trasformata di Fourier della Gaussiana,  $\tilde{g}(k) = e^{-k^2/4}/\sqrt{2}$ , quindi il risultato finale è

$$\tilde{f}(k) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{d^3}{dk^3} e^{-k^2/4} = \frac{ik}{8\sqrt{2}} (k^2 - 6) e^{-k^2/4}.$$