Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 22 settembre 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{2z^2+1},$$

con

$$\gamma = \{z = x + iy : y = i\cos(x),\, x \in [-\pi/2, \pi/2]\}\ .$$

Soluzione 1

La funzione integranda ha due poli semplici

$$z_{1,2} = \pm i/\sqrt{2},$$

puramente immaginari. Sostituendo

$$z(x) = x - \cos(x),$$

si vede che per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ i valori di z sono reali, quindi $\gamma \subset \mathbb{R}$ e i poli puramente immaginari non appartengono al percorso di integrazione. In particolare γ è un intervallo di estremi

$$\begin{aligned} x_a &= z(-\pi/2) = -\pi/2 - \cos(-\pi/2) = -\pi/2, \\ x_b &= z(\pi/2) = \pi/2 - \cos(\pi/2) = \pi/2. \end{aligned}$$

Inoltre la funzione $z(x)$, nell'intervallo $[x_a, x_b]$, è monotona crescente, infatti

$$z'(x) = 1 - \mathrm{sen}(x) \geq 0, \qquad x_a \leq x \leq x_b\,.$$

Infine, con la sostituzione $w = \sqrt{2}z$, si ha la soluzione

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dz}{2z^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/\sqrt{2}}^{\pi/\sqrt{2}} \frac{dw}{w^2+1} = \sqrt{2}\arctan(\pi/\sqrt{2})\,.$$

Esercizio 2 (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale, in $x = 1$,

$$P = \mathrm{Pr}\int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)\,x^p},$$

determinando i valori **reali** di p per i quali l'integrale converge.
Suggerimento: Si può utilizzare la sostituzione $x = e^z$.

Soluzione 2

Con la sostituzione $x = e^z$ si ha

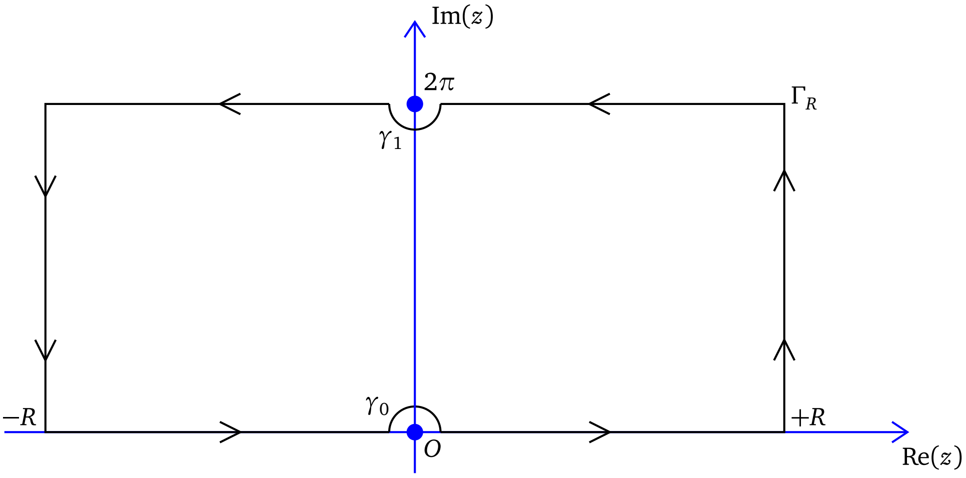
$$P = \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1-e^{-z})\,e^{pz}}\,,$$

e la condizione di convergenza è: $0 < p < 1$. Si ottiene richiedendo che la funzione integranda sia opportunamente infinitesima agli estremi $z \to \pm\infty$. In particolare, in $z \to +\infty$ si hanno

$$\left|\frac{1}{(1-e^{-z})\,e^{pz}}\right| \sim e^{-pz}\,, \qquad \text{con: } z \to +\infty \quad \Rightarrow \qquad p > 0\,;$$

$$\left|\frac{1}{(1-e^{-z})\,e^{pz}}\right| \sim e^{(1-p)z}\,, \quad \text{con: } z \to -\infty \quad \Rightarrow \qquad p < 1\,.$$

Consideriamo il percorso d'integrazione Γ_R mostrato in figura.



Le singolirtà dell'integranda sono

$$z_k = 2k\pi\, i\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

poiché nessuna è interna a Γ_R si ha

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{(1-e^{-z})\,e^{pz}} = P - \int_{\gamma_0} \frac{dz}{(1-e^{-z})\,e^{pz}} - \int_{\gamma_1} \frac{dz}{(1-e^{-z})\,e^{pz}} - e^{-2i\pi p} P\,.$$

Gli integrali sugli archi γ_0 e γ_1 sono

$$\int_{\gamma_{0,1}} \frac{dz}{(1-e^{-z})\,e^{pz}} = i\pi A_{0,1}\,,$$

con

$$A_{0,1} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(z - z_{0,1})}{(1-e^{-z})\,e^{pz}} = e^{-pz_{0,1}}\,.$$

In definitiva

$$P = i\pi \frac{1+e^{-2i\pi p}}{1-e^{-2i\pi p}} = \frac{\pi}{\tan(\pi p)}$$

Esercizio 3 (punteggio 5/30)

Sia

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt\,,$$

definita per $s \in (s_0, \infty) \subset (0, \infty)$, una trasformazione integrale della funzione $f(t)$ analitica in un intorno di $(0, \infty)$. Si dimostri che si può ottenere la funzione $f(t)$ come

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} \bar{f}(s)\, e^{st} ds\,, \qquad \tau, t > 0\,.$$

Soluzione 3

Per la dimostrazione si calcola direttamente l'integrale, ovvero

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} \bar{f}(s)\, e^{st} ds \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} ds\, e^{st} \int_0^\infty dt' f(t') e^{-st'}\,,$$

nel secondo integrale facciamo la sostituzione $s = \tau + iz$ e integriamo prima in dz, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} \bar{f}(s)\, e^{st} ds \;&=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{izt} \int_0^\infty dt' f(t') e^{-izt'} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^\infty dt' f(t') e^{iz(t-t')} \\
&= \int_0^\infty dt' f(t') \delta(t - t') = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (punteggio 6/30)

Dato un sistema ortonormale e completo $\{e_k(x)\}_k \subset L^2(a, b)$, si dimostri che la funzione

$$B(x, x') = \sum_k e_k(x)\, e_k^*(x')\,,$$

è tale per cui: $\forall\, f(x) \in L^2(a, b)$,

$$f(x) = \int_a^b B(x, x') f(x')\, dx'$$

e che $B(x, x;)$ è l'unica funzione ad avere questa proprietà.

Soluzione 4

Per ogni funzione $f(x) \in L^2(a, b)$ si ha la serie formale di Fourier

$$f(x) = \sum_m f^m e_m(x)\,, \qquad f^m = (e_m, f) = \int_a^b e_m^*(x) f(x)\, dx\,.$$

L'integrale può essere calcolato esplicitamente, e si ha

$$\int_{-a}^{b} B(x,x')f(x')\,dx' = \sum_{k,m} f^m e_k(x) \int_a^b e_k^*(x')e_m(x')dx' = \sum_{k,m} f^m e_k(x) \underbrace{(e_k, e_m)}_{\delta_{km}} = \sum_k f^k e_k(x) = f(x)\,.$$

Per dimostrare che tale funzione è unica, assumiamo per assurdo che ne esista un'altra, $A(x,x')$, con la stessa proprietà

$$f(x) = \int_a^b A(x,x')f(x')dx'\,, \qquad \forall\, f(x) \in L^2(a,b)\,.$$

Consideriamo la funzione $g(x)$ definita come

$$g(x) = A(x',x)\,,$$

per un dato $x' \in [a,b]$. Questa funzione appartiene a $L^2(a,b)$, infatti possiamo considerare la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per ogni $E \in [a,b]$. Si ha

$$h(x) = \int_a^b A(x,x')h(x')dx' = \int_E A(x,x')dx' = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}\,,$$

ovvero, la funzione $A(x,x')$, nella variabile x' è integrabile in ogni sottoinsieme E di $[a,b]$ (l'integrale può essere o nullo o uguale ad uno), ne consegue che la funzione $A(x,x')$, nella variabile x' è a quadrato sommabile in $[a,b]$ per ogni $x \in [a,b]$.
Per la proprietà della funzione $B(x,x')$ si ha

$$g(x) = A(x',x) = \int_a^b B(x,x'')A(x',x'')dx'' = \sum_k e_k(x) \int_a^b e_k^*(x'')A(x',x'')dx''\,,$$

l'integrale può essere calcolato usando la proprietà della funzione $A(x,x')$, ovvero

$$\int_a^b e_k^*(x'')A(x',x'')dx'' = e_k^*(x')\,,$$

si ottiene quindi l'unicità cercata

$$A(x,x') = \int_a^b B(x,x'')A(x',x'')dx'' = \sum_k e_k(x) \underbrace{\int_a^b e_k^*(x'')A(x',x'')dx''}_{e_k^*(x')} = \sum_k e_k(x)e_k^*(x') = B(x,x')\,.$$

Esercizio 5 (punteggio 6/30)

Data la funzione $f(z)$ analitica in un dominio D semplicemente connesso, con $\mathbb{R} \subset D$, che verifica il principio di riflessione di Schwarz

$$f(z) = f^*(z^*), \qquad \forall z \in D\,, \text{tale che } z^* \in D\,;$$

si dimostri che l'operatore $\hat{f}(\hat{A})$ è hermitiano per ogni operatore hermitiano $\hat{A}$ definito nello spazio di Hilbert a dimensione finita E_N.
Si verifichi quanto dimostrato per la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

e l'operatore $\hat{A}$ rappresentato dalla matrice 4×4

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_3 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & -\sigma_3 \end{pmatrix},$$

dove σ_i è la i-esima matrice di Pauli.

Soluzione 5

L'operatore è diagonalizzabile in quanto hermitiano, si può applicare il teorema spettrale e si ha

$$\hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k\,,$$

dove $\{\hat{\alpha}_k\}_K$ è l'insieme degli autovalori di $\hat{A}$ e $\{\hat{P}_k\}_K$ è l'insieme degli operatori di proiezione ortogonali corrispondenti. L'operatore $\hat{f}\,(\hat{A})$ può essere rappresentato come

$$\hat{f}\,(\hat{A}) = \sum_k f(\alpha_k)\hat{P}_k\,.$$

Ne consegue che $\hat{f}\,(\hat{A})$ ha gli stessi autovettori di $\hat{A}$ e lo spettro $\{f(\alpha_k)\}_k$. L'autovalore k-esimo è reale in quanto $\alpha_k \in R$, $\hat{A}$ hermitiano, e $f(x) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
La matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gli autovalori si ottengono risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} &= (1-\alpha)^2\left[(1+\alpha)^2-1\right] - \left[(1+\alpha)^2-1\right] \\ &= \left[(1-\alpha)^2-1\right]\left[(1+\alpha)^2-1\right], \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_{1,2} = 0\,, \qquad \alpha_{3,4} = \pm 2\,.$$

Gli autovalori di $f(A)$ sono

$$f(\alpha_{1,2}) = 1\,, \qquad f(\alpha_{3,4}) = \frac{1}{5}\,.$$

Gli autovettori

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante è

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\\-1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

quindi si ha

$$A_d = U^\dagger A U = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

La matrice $f(A)$ si ottiene come

$$f(A) = U f(A_d) U^\dagger = U \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1/5 & 0\\0 & 0 & 0 & 1/5\end{pmatrix} U^\dagger = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & -2\\0 & 3 & 2 & 0\\0 & 2 & 3 & 0\\-2 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

è manifestamente una matrice hermitiana.

Esercizio 6 (punteggio 5/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier delle funzione

$$f(x) = \int_{-a}^{a} e^{-(x-x')^2}\,dx'\,, \qquad a > 0\,.$$

Soluzione 6

La $f(x)$ è la convoluzione delle funzioni

$$h(x) = e^{-x^2}\,, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le a \\ 0 & |x| < a \end{cases}.$$

Usando il teorema della convoluzione

$$\mathscr{F}_k\left[(h*g)(x)\right] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[h(x)\right]\mathscr{F}_k\left[g(x)\right]\,,$$

con le due trasformate di Fourier

$$\mathscr{F}_k\left[h(x)\right] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}\,, \qquad \mathscr{F}_k\left[g(x)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{sen}(ka)}{k}\,,$$

si ha

$$\mathscr{F}_k\left[f(x)\right] = \mathscr{F}_k\left[(h*g)(x)\right] = \sqrt{2}\,\frac{e^{-k^2/4}\,\mathrm{sen}(ka)}{k}\,.$$