Metodi Matematici per la Fisica

Secondo appello estivo - 22 luglio 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$中 = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)+1} d\beta\,.$$

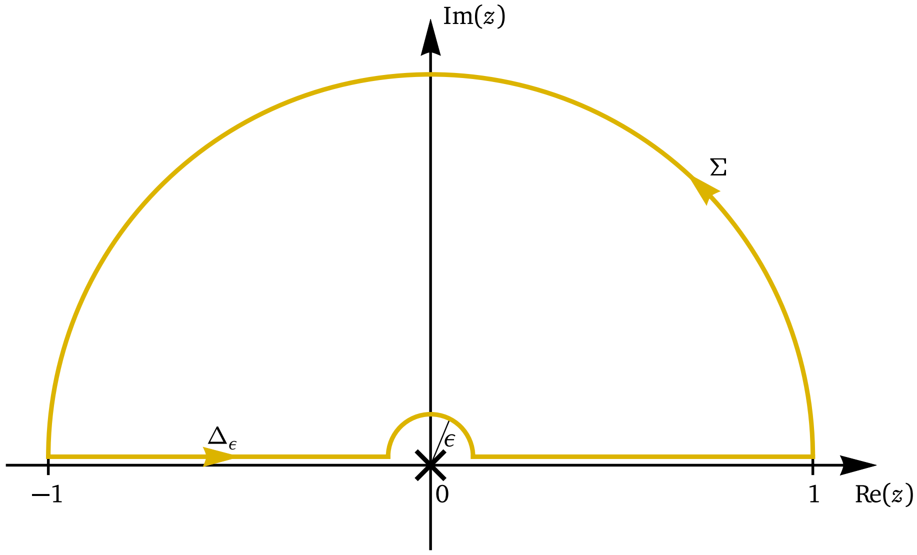
(Il carattere cinese 中 si pronuncia *Zhōng* e significa "mezzo", nel senso di posizione centrale o circondata da altri oggetti allineati.)

Soluzione del primo problema

Con il cambiamento di variabile $z = e^{i\beta}$ si ottiene un integrale nel piano complesso z, il percorso d'integrazione è la semicirconferenza unitaria contenuta nel semipiano delle parti immaginarie positive, cioè

$$\Sigma = \left\{z : z = e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\} = \{z : |z| = 1\} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}\ ,$$

mostrata in beige in figura, dove è rappresentato unitamente al percorso Δ_ϵ descritto di seguito.



L'integrale nella variabile z è

$$中 = -i \int_\Sigma \frac{z^2-1}{z^2+2iz-1}\frac{dz}{z} = -i \int_\Sigma \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz\,.$$

Consideriamo il percorso chiuso ottenuto dall'unione della semicirconferenza Σ e del segmento dentato Δ_ϵ, mostrato in figura, ovvero

$$\Delta_\epsilon = [-1, -\epsilon] \cup \left(-\left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\right\}\right) \cup [\epsilon, 1] .$$

Tale segmento dentato aggira il polo semplice che la funzione integranda ha nell'origine. Applicando il teorema di Cauchy si ha

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\Sigma\cup\Delta_\epsilon} \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_\Sigma \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz + \int_{\Delta_\epsilon} \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz \right),$$

ne consegue che l'integrale cercato è

$$中 = -i \int_\Sigma \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz = \lim_{\epsilon\to 0^+} i \int_{\Delta_\epsilon} \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz .$$

L'ultimo integrale può essere calcolato con la formula di Sokhotski-Plemelj

$$中 = \lim_{\epsilon\to 0^+} i \int_{\Delta_\epsilon} \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz = \lim_{\epsilon\to 0^+} i \int_{-1}^{1} \frac{z^2-1}{(z+i\epsilon)\,(z+i)^2} dz = i \left(\Pr \int_{-1}^{1} \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz - i\pi \left. \frac{z^2-1}{(z+i)^2} \right|_{z=0} \right),$$

da cui si ha

$$中 = i \Pr \int_{-1}^{1} \frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} dz + \pi ,$$

dove, ovviamente, il valore principale è relativo al polo semplice che la funzione integranda ha nell'origine. La stessa funzione integranda può essere ottenuta come somma del polo semplice nell'origine e di quello doppio in $z = -i$, ovvero, sommando e sottraendo il termine $2iz$ a numeratore, si ha

$$\frac{z^2-1}{z\,(z+i)^2} = \frac{z^2-1+2iz-2iz}{z\,(z+i)^2} = \frac{(z+i)^2-2iz}{z\,(z+i)^2} = \frac{1}{z} + \frac{-2i}{(z+i)^2} .$$

Usiamo questo risultato nell'integrale 中, che può essere calcolato direttamente come

$$中 = i \Bigg(\underbrace{\Pr \int_{-1}^{1} \frac{dz}{z}}_{=0} - 2i \int_{-1}^{1} \frac{dz}{(z+i)^2} \Bigg) + \pi = 2 \left(- \left. \frac{1}{z+i} \right|_{-1}^{1} \right) + \pi = 2 \left(-\frac{1-i}{2} + \frac{-1-i}{2} \right) + \pi ,$$

sommando i due termini tra parentesi tonde si ottiene

$$中 = \pi - 2 .$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$里_n = \int_0^\infty \frac{dx}{x^{2n} + 3x^n + 2} ,$$

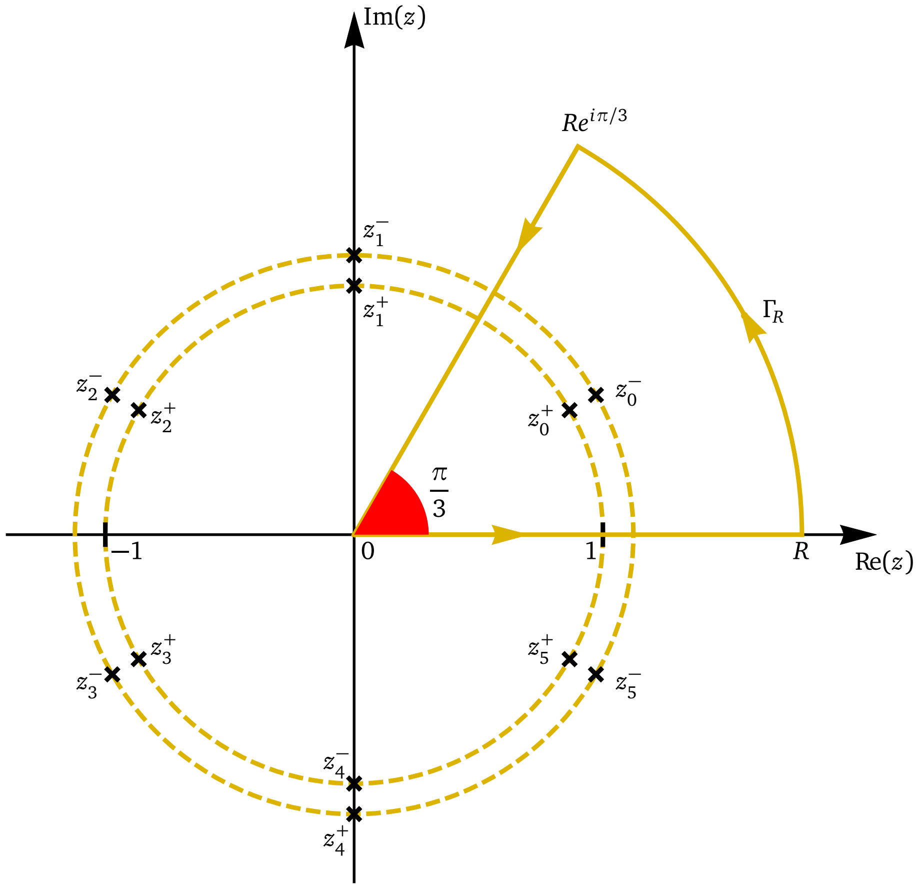
con $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.
(Il carattere cinese 里 si pronuncia *lǐ* e significa "dentro".)

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa essendo l'inverso di un polinomio. Gli zeri del polinomio di grado $2n$, che sono i poli della funzione integranda, si ottengono risolvendo l'equazione $x^{2n} + 3n^n + 2 = 0$. La presenza delle sole potenze $2n$ e n facilita la risoluzione dell'equazione. Infatti, si può prima risolverla rispetto alla variabile x^n, per poi estrarre le n radici n-esime delle due soluzioni ottenute. In definitiva, i $2n$ poli semplici della funzione integranda, elementi dell'insieme $\left\{z_k^-, z_k^+\right\}_{k=0}^{n-1}$, si ottengono come

$$(z^n)_\pm = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} (z^n)_- = -2 & \Rightarrow \quad z_k^- = 2^{1/n} e^{(2k+1)i\pi/n} \\ (z^n)_+ = -1 & \Rightarrow \quad z_k^+ = e^{(2k+1)i\pi/n} \end{cases} , \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} .$$

Sono uniformemente distribuiti lungo le circonferenze concentriche, centrate nell'origine, rappresentate con linea tratteggiata nella figura. Su quella di raggio unitario si dispongono i poli con apice "+" e su quella di raggio $2^{1/n}$ quelli con apice "−".



In particolare, la figura mostra il caso con $n = 6$, i poli sono indicati con i simboli $\times$, le circonferenze tratteggiate hanno raggi uno e $2^{1/6}$.

Consideriamo il percorso chiuso Γ_R che, come mostrato in figura, rappresenta la frontiera dello spicchio del cerchio centrato nell'origine di raggio $R > 2^{1/n}$ che sottende l'angolo $2\pi/n$ (angolo che vale $\pi/3$ nella figura che rappresenta il caso con $n = 6$), con uno dei tratti rettilinei appartenente al semiasse reale positivo e l'altro al semipiano superiore, cioè quello delle parti immaginarie positive. Tale percorso chiuso è il luogo geometrico

$$\Gamma_R = [0, r] \cup \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi/n]\right\} \cup \left[Re^{2i\pi/n}, 0\right] ,$$

dove il simbolo $[z_1, z_2]$ indica il segmento rettilineo avente i punti z_1 e z_2 come estremi, orientato nella direzione che va dal primo al secondo. Il percorso Γ_R avvolge una volta due singolarità della funzione integranda, ovvero i poli semplici $z_0^+ = e^{i\pi/n}$ e $z_0^- = 2^{1/n} e^{i\pi/n}$. Ne consegue che, applicando il teorema dei residui,

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^{2n} + 3z^n + 2} = 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n} + 3z^n + 2}, z_0^+\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n} + 3z^n + 2}, z_0^-\right] \right) .$$

Questo risultato è indipendente dal valore del raggio R vale quindi anche nel limite di R divergente

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^{2n} + 3z^n + 2} = 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n} + 3z^n + 2}, z_0^+\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n} + 3z^n + 2}, z_0^-\right] \right) .$$

D'altro canto, considerando i singoli contributi all'integrale, ovvero quelli dei tratti rettili e dell'arco, si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^{2n}+3z^n+2} &= \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R \frac{dx}{x^{2n}+3x^n+2} + \int_0^{2\pi/n} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{\left(Re^{i\theta}\right)^{2n}+3\left(Re^{i\theta}\right)^n+2} \right. \\
&\qquad \left. + \int_R^0 \frac{e^{2i\pi/n}dr}{e^{4ni\pi/n}r^{2n}+3e^{2ni\pi/n}r^n+2} \right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R \frac{dx}{x^{2n}+3x^n+2} + \int_0^{2\pi/n} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{e^{2in\theta}R^{2n}+3e^{in\theta}R^n+2} + \int_R^0 \frac{e^{2i\pi/n}dr}{r^{2n}+3r^n+2} \right) \\
&= 里_n \left(1-e^{2i\pi/n}\right) + \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi/n} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{e^{2in\theta}R^{2n}+3e^{in\theta}R^n+2} \,,
\end{aligned}
$$

dove, eseguendo il limite nel primo e terzo termine della penultima riga, si sono ottenuti rispettivamente gli integrali $里_n$ e $e^{2i\pi/n}里_n$. Il valore limite nell'ultimo termine è nullo se

$$
\lim_{R\to\infty} \frac{iRe^{i\theta}}{e^{2in\theta}R^{2n}+3e^{in\theta}R^n+2} Re^{i\theta} \overset{\text{U.}}{=} 0 \,,
$$

dove l'uniformità si ha $\forall\, \theta \in [0, \pi/n]$. Per dimostrare tale limite

$$
0 \le \left| \frac{iRe^{i\theta}}{e^{2in\theta}R^{2n}+3e^{in\theta}R^n+2} Re^{i\theta} \right| = \frac{R^2}{\left|e^{2in\theta}R^{2n}+3e^{in\theta}R^n+2\right|} = \frac{R^2}{\left|e^{in\theta}R^n+1\right|\left|e^{in\theta}R^n+2\right|} \le \frac{R^2}{|R^n-1|\,|R^n-2|} \,,
$$

poiché $n>1$ e considerando, senza perdita di generalità: $1/|R^n-1| < 2R^{-n}$ e $1/|R^n-2| < 2R^{-n}$ alla luce del valore limite cercato, si ha

$$
0 \le \left| \frac{iRe^{i\theta}}{e^{2in\theta}R^{2n}+3e^{in\theta}R^n+2} Re^{i\theta} \right| \le \frac{R^2}{|R^n-1|\,|R^n-2|} \le 4R^{-2(n-1)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \,.
$$

Ne consegue

$$
\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^{2n}+3z^n+2} = 里_n \left(1-e^{2i\pi/n}\right) \,,
$$

che, unitamente al valore dello stesso integrale ottenuto con il teorema dei residui

$$
\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^{2n}+3z^n+2} = 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^+\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^-\right] \right) \,,
$$

permette di esprimere il valore dell'integrale richiesto come

$$
\begin{aligned}
里_n &= \frac{2i\pi}{1-e^{2i\pi/n}} \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^+\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^-\right] \right) \\
&= -\frac{\pi e^{-i\pi/n}}{\operatorname{sen}(\pi/n)} \left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^+\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^-\right] \right) .
\end{aligned}
$$

I valori dei residui sono

$$
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^{\pm}\right] = \lim_{z\to z_0^{\pm}} \frac{z-z_0^{\pm}}{z^{2n}+3z^n+2} = \frac{1}{2n\left(z_0^{\pm}\right)^{2n-1}+3n\left(z_0^{\pm}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{z_0^{\pm}}{2\left(z_0^{\pm}\right)^{2n}+3\left(z_0^{\pm}\right)^n} = \frac{1}{n} \frac{z_0^{\pm}}{\left(z_0^{\pm}\right)^{2n}-2} \,,
$$

dove si sono usati: la regola di de l'Hôpital, per il calcolo del limite, e il fatto che i valori $z_0^{\pm}$ siano zeri del polinomio e quindi tali che: $\left(z_0^{\pm}\right)^{2n}+3\left(z_0^{\pm}\right)^{2n} = -2$. Usando i valori noti $z_0^+ = e^{i\pi/n}$ e $z_0^- = 2^{1/n}e^{i\pi/n}$ si hanno

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^+\right] &= \frac{1}{n} \frac{e^{i\pi/n}}{e^{2in\pi/n}-2} = -\frac{1}{n} e^{i\pi/n} \,, \\
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^{2n}+3z^n+2}, z_0^-\right] &= \frac{1}{n} \frac{2^{1/n}e^{i\pi/n}}{2^{2n/n}e^{2in\pi/n}-2} = \frac{1}{n} 2^{1/n-1} e^{i\pi/n} \,.
\end{aligned}
$$

Usando questi risultati nella precedente espressione dell'integrale cercato si ha

$$里_n = -\frac{\pi e^{-i\pi/n}}{\operatorname{sen}(\pi/n)}\left(-\frac{1}{n}e^{i\pi/n}+\frac{1}{n}2^{1/n-1}e^{i\pi/n}\right) = \frac{\pi}{n\operatorname{sen}(\pi/n)}\left(1-2^{1/n-1}\right).$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga l'espansione di Magnus Gustaf Mittag-Leffler della funzione

$$果(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}^3(z)}.$$

(Il carattere cinese 果 si pronuncia *guǒ* e significa "frutta".)

Soluzione del terzo problema

La funzione 果(z) è meromorfa essendo l'inverso di una funzione intera, ha poli di ordine tre in corrispondenza degli zeri della funzione seno, ovvero nei punti dell'insieme $\{z_k = k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Formalmente l'espansione di Mittag-Leffler è

$$果(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{C_{-3}^{(k)}}{(z-z_k)^3}+\frac{C_{-2}^{(k)}}{(z-z_k)^2}+\frac{C_{-1}^{(k)}}{z-z_k}\right).$$

La funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera della funzione 果(z) e ha lo stesso comportamento asintotico, mentre la terna $\left(C_{-3}^{(k)}, C_{-2}^{(k)}, C_{-1}^{(k)}\right)$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$ ha per componenti i coefficienti della parte principale della serie di Laurent della funzione 果(z) centrata nel polo triplo $z_k = k\pi$ e convergente nella corona circolare $D_k = \{z : 0 < |z-z_k| < \pi\}$. Otteniamo questi coefficienti sfruttando la serie di Taylor della funzione seno come segue. Si ha

$$\operatorname{sen}(z) = (-1)^k\operatorname{sen}(z-k\pi) = (-1)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}(z-k\pi)^{2j+1},$$

ne consegue che, nel limite $(z-k\pi)\to 0$,

$$\begin{aligned}
果(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}^3(z)} &= \left((-1)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}(z-k\pi)^{2j+1}\right)^{-3} \\
&= \left[(-1)^k\left(z-k\pi-\frac{(z-k\pi)^3}{3!}+\frac{(z-k\pi)^5}{5!}+\mathcal{O}\left((z-k\pi)^7\right)\right)\right]^{-3} \\
&= \frac{(-1)^k}{(z-k\pi)^3}\frac{1}{\left[1-(z-k\pi)^2/3!+(z-k\pi)^4/5!+\mathcal{O}\left((z-k\pi)^6\right)\right]^3}.
\end{aligned}$$

Usiamo la somma della serie geometrica di ragione α, con, ovviamente, $|\alpha|<1$, si ha

$$\sum_{l=0}^{\infty}\alpha^l = \frac{1}{1-\alpha},$$

deriviamo due volte ambo i membri rispetto alla ragione α

$$\sum_{l=2}^{\infty}l(l-1)\alpha^{l-2} = \frac{2}{(1-\alpha)^3},$$

da cui

$$\frac{1}{(1-\alpha)^3} = \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{\infty}l(l-1)\alpha^{l-2} = 1+3\alpha+6\alpha^2+\mathcal{O}\left(\alpha^3\right).$$

Usando questo risultato nella serie di Laurent della funzione 果(z), con $(z-k\pi)\to 0$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
果(z) &= \frac{(-1)^k}{(z-k\pi)^3}\frac{1}{\left[1-(z-k\pi)^2/3!+(z-k\pi)^4/5!+\mathcal{O}\left((z-k\pi)^6\right)\right]^3}\\
&= \frac{(-1)^k}{(z-k\pi)^3}\Bigg[1+3\left(\frac{(z-k\pi)^2}{3!}-\frac{(z-k\pi)^4}{5!}+\mathcal{O}\left((z-k\pi)^6\right)\right)\\
&\qquad +6\left(\frac{(z-k\pi)^2}{3!}-\frac{(z-k\pi)^4}{5!}+\mathcal{O}\left((z-k\pi)^6\right)\right)^2+\cdots\Bigg],
\end{aligned}
$$

consideriamo l'espressione esplicita dei soli coefficienti della parte principale, si ha

$$
果(z) = \frac{(-1)^k}{(z-k\pi)^3}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^k}{z-k\pi}+\mathcal{O}(1)\,,
$$

ne consegue che

$$
\left(C_{-3}^{(k)},C_{-2}^{(k)},C_{-1}^{(k)}\right)=\left((-1)^k,0,\frac{(-1)^k}{2}\right),\qquad \forall\, k\in\mathbb{Z}\,.
$$

Alla luce di ciò, l'espansione di Mittag-Leffler diventa

$$
\begin{aligned}
果(z) &= \phi(z)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(z-k\pi)^3}+\frac{1/2}{z-k\pi}\right)\\
&= \phi(z)+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(z-k\pi)^3}+\frac{1}{(z+k\pi)^3}+\frac{1/2}{z-k\pi}+\frac{1/2}{z+k\pi}\right)\\
&= \phi(z)+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2z^3+6zk^2\pi^2}{(z^2-k^2\pi^2)^3}+\frac{z}{z^2-k^2\pi^2}\right)\\
&= \phi(z)+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z}+z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(2\frac{z^2+3k^2\pi^2}{(z^2-k^2\pi^2)^3}+\frac{1}{z^2-k^2\pi^2}\right).
\end{aligned}
$$

Per determinare la parte intera $\phi(z)$, osserviamo che, così come l'inverso della funzione seno, anche il cubo di tale funzione, ovvero 果(z), è regolare all'infinito, questo implica che $\phi(z)$ sia costante, poniamo quindi $\phi(z)=\phi_0$. Il valore costante ϕ_0 si ottiene valutando la funzione 果(z) in un punto z in cui sia nota. Sfruttiamo il valore limite

$$
\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3(z)}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{2z}\right)=0\,,
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{z\to 0}\left[\phi(z)+z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(2\frac{z^2+3k^2\pi^2}{(z^2-k^2\pi^2)^3}+\frac{1}{z^2-k^2\pi^2}\right)\right]\\
&= \phi_0+\underbrace{\lim_{z\to 0}z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(2\frac{z^2+3k^2\pi^2}{(z^2-k^2\pi^2)^3}+\frac{1}{z^2-k^2\pi^2}\right)}_{=0}
\end{aligned}
$$

e quindi $\phi_0=0$. L'espressione completa dell'espansione di Mittag-Leffler è

$$
果(z) = +\frac{1}{z^3}+\frac{1}{2z}+z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(2\frac{z^2+3k^2\pi^2}{(z^2-k^2\pi^2)^3}+\frac{1}{z^2-k^2\pi^2}\right).
$$

Quarto problema (punteggio massimo: 7/30)

L'operatore $\hat{A}$ è definito nello spazio di Hilbert di dimensione quattro E_4 dalle azione sui vettori della base canonica ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$

$$\hat{A}|e_1\rangle = \hat{A}|e_4\rangle = -\frac{|e_2\rangle + |e_3\rangle}{2}, \qquad \hat{A}|e_2\rangle = -\frac{|e_1\rangle + |e_4\rangle}{2} + |e_2\rangle - |e_3\rangle, \qquad \hat{A}|e_3\rangle = -\frac{|e_1\rangle + |e_4\rangle}{2} - |e_2\rangle + |e_3\rangle.$$

Dopo aver classificato l'operatore, si determinino:

- lo spettro discreto $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^4$ dell'operatore $\hat{A}$;
- le rappresentazioni matriciali degli autovettori elementi dell'insieme $\left\{|a_j\rangle\right\}_{j=1}^4$ rispetto alla base canonica;
- la matrice che rappresenta, rispetto alla stessa base canonica, l'operatore di "scorrimento" degli autovettori, $\hat{B}$, definito quindi dalle azioni sugli autovettori

$$\hat{B}|a_j\rangle = |a_{j+1}\rangle, \qquad j = 1,2,3, \qquad \hat{B}|a_4\rangle = |a_1\rangle.$$

Si classifichi l'operatore $\hat{B}$.

Soluzione del quarto problema

Gli elementi della matrice A, 4×4, che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base canonica ortonormale si ottengono dalle contrazioni

$$A^j_k = \langle e_j|\hat{A}|e_k\rangle, \qquad \forall\, j,k \in \{1,2,3,4\}.$$

Dalle azioni date si hanno, colonna per colonna,

$$A^j_1 = \langle e_j|\hat{A}|e_1\rangle = \begin{cases} 0 & j=1 \\ -1/2 & j=2 \\ -1/2 & j=3 \\ 0 & j=4 \end{cases}, \qquad A^j_2 = \langle e_j|\hat{A}|e_2\rangle = \begin{cases} -1/2 & j=1 \\ 1 & j=2 \\ -1 & j=3 \\ -1/2 & j=4 \end{cases},$$

$$A^j_3 = \langle e_j|\hat{A}|e_2\rangle = \begin{cases} -1/2 & j=1 \\ -1 & j=2 \\ 1 & j=3 \\ -1/2 & j=4 \end{cases}, \qquad A^j_4 = \langle e_j|\hat{A}|e_2\rangle = \begin{cases} 0 & j=1 \\ -1/2 & j=2 \\ -1/2 & j=3 \\ 0 & j=4 \end{cases},$$

quindi si ha la matrice

$$\hat{A} \overset{e}{\hookleftarrow} A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice, essendo reale e simmetrica, è hermitiana e tale è anche l'operatore, ovvero si ha $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.
Gli autovalori, che sono quindi reali, si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(I\alpha - A) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} \alpha & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & \alpha-1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & \alpha-1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ \alpha\left[(\alpha-1)\left((\alpha-1)\alpha - \frac{1}{4}\right) - \alpha + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha-1}{2}\right)\frac{1}{2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left((\alpha-1)\alpha - \frac{1}{4}\right) - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8}\right] & \\ +\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{4}\right) - (\alpha-1)\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{8}\right] &= 0 \\ \frac{\alpha}{4}\left[(\alpha-1)\left(4(\alpha-1)\alpha - 1\right) + 3 - 5\alpha\right] - \frac{\alpha}{2}(\alpha-2) &= 0 \\ \alpha\left(\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha + 2\right) &= 0, \end{aligned}$$

gli zeri, ovvero gli autovalori sono: $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = 2$. Le componenti delle rappresentazioni degli autovettori si ottengono risolvendo i quattro sistemi omogenei

$$\left(I\alpha_j - A\right)\begin{pmatrix} a^1_{(j)} \\ a^2_{(j)} \\ a^3_{(j)} \\ a^4_{(j)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1,2,3,4,$$

dove $a^k_{(j)}$ indica la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, con $k, j = 1,2,3,4$.
Le componenti del primo autovettore a_1, relativo all'autovalore minore $\alpha_1 = -1$, si ottengono dal sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(1)} \\ a^2_{(1)} \\ a^3_{(1)} \\ a^4_{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sottraendo la seconda e la terza riga si ha $a^2_{(1)} - a^3_{(1)} = 0$, che usata nelle prima dà

$$-2a^1_{(1)} + a^2_{(1)} + a^3_{(1)} = -2a^1_{(1)} + 2a^2_{(1)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a^1_{(1)} = a^2_{(1)} = a^3_{(1)},$$

infine dalla quarta riga

$$a^4_{(1)} = \frac{a^2_{(1)} + a^3_{(1)}}{2} = a^1_{(1)},$$

le quattro componenti sono uguali, da cui, normalizzando si ha

$$a_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le componenti del secondo autovettore, che ha autovalore nullo, sono soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(2)} \\ a^2_{(2)} \\ a^3_{(2)} \\ a^4_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla prima riga e sottraendo la seconda e la terza si hanno

$$a^2_{(2)} = -a^3_{(2)}, \qquad a^2_{(2)} = a^3_{(2)},$$

da cui: $a^2_{(2)} = a^3_{(2)} = 0$. Considerando la seconda riga, si ha

$$a^1_{(2)} = -a^4_{(2)},$$

posto, senza perdita di generalità, $a^1_{(2)} = 1/\sqrt{2}$,

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'autovettore relativo all'autovalore $\alpha_3 = 1$ ha come componenti le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(3)} \\ a^2_{(3)} \\ a^3_{(3)} \\ a^4_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla sottrazione della seconda dalla terza riga si ha

$$a^2_{(3)} = a^3_{(3)}\,,$$

dalla prima e dalla quarta

$$a^1_{(3)} = a^4_{(3)} = -\frac{a^2_{(3)} + a^3_{(3)}}{2} = -a^2_{(3)} = -a^3_{(3)}\,,$$

posto $a^1_{(3)} = 1/2$, il terzo autovettore è

$$a_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, per il quarto autovettore relativo all'autovalore $\alpha_4 = 2$, si ha il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^1_{(4)} \\ a^2_{(4)} \\ a^3_{(4)} \\ a^4_{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sottraendo la prima dalla quarta riga e la seconda dal doppio della prima si hanno

$$a^1_{(4)} = a^4_{(4)}\,, \qquad 7a^1_{(4)} = a^4_{(4)} \quad \Rightarrow \quad a^1_{(4)} = a^4_{(4)} = 0\,,$$

quindi, usando la relazione che si evince dalla seconda riga $a^2_{(4)} = -a^3_{(4)}$, ponendo $a^2_{(4)} = 1/\sqrt{2}$, si ha il quarto autovettore

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante è

$$U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha quindi la rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{A}$, quella rispetto alla base ortonormale dei suoi autovettori $\left\{|a_j\rangle\right\}_{j=1}^4$,

$$\hat{A} \stackrel{a}{\hookleftarrow} A_d = U^\dagger A U = \operatorname{diag}\left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right) = \operatorname{diag}(-1, 0, 1, 2)\,.$$

Indichiamo con B_d la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{B}$ rispetto alla base ortonormale degli autovettori, ovvero si ha $\hat{B} \stackrel{a}{\hookleftarrow} B_d$. Gli elementi di questa matrice si ottengono dalla stessa definizione dell'operatore, infatti

$$(B_d)^j_k = \langle a_j|\hat{B}|a_k\rangle = \langle a_j|a_{k+1}\rangle = \delta^j_{k+1}\,, \qquad j = 1,2,3,4\,, \quad k = 1,2,3\,,$$

$$(B_d)^j_4 = \langle a_j|\hat{B}|a_4\rangle = \langle a_j|a_1\rangle = \delta^j_1\,, \qquad j = 1,2,3,4\,,$$

da cui

$$B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, la rappresentazione rispetto alla base canonica ortonormale è

$$\hat{B} \overset{a}{\hookleftarrow} B = UB_dU^\dagger = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 0 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

da cui

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Poiché l'azione dell'operatore $\hat{B}$ è quella di riordinare gli autovettori dell'operatore $\hat{A}$ che, essendo ortonormali sono anche una base ortonormale, e quindi la stessa azione non fa altro che trasformare la base ortonormale $\left\{|a_j\rangle\right\}_{j=1}^4$ nella base ortonormale $\left\{|a'_j\rangle\right\}_{j=1}^4$, con $|a'_j\rangle = \hat{B}|a_j\rangle = |a_{j+1}\rangle$, per $j = 1, 2, 3$ e $|a'_4\rangle = \hat{B}|a_4\rangle = |a_1\rangle$, si ha che l'operatore $\hat{B}$ è unitario.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Data la successione di funzioni $\left\{f_j(x) = x^{-j}\right\}_{j=1}^\infty$ si dimostri l'identità

$$\mathscr{F}_k\left[\sum_{j=1}^\infty f_j(x)\right] = \sum_{j=1}^\infty \mathscr{F}_k\left[f_j(x)\right],$$

equivalente alla $\mathscr{F}_k[F] = G(k)$, dove $F(x)$ e $G(k)$ sono le somme delle serie aventi per termini rispettivamente le funzioni della successione $\left\{f_j(x) = x^{-j}\right\}_{j=1}^\infty$ e di quella delle trasformate di Fourier $\left\{\mathscr{F}_k\left[f_j\right]\right\}_{j=1}^\infty$.

Soluzione del quinto problema

Calcoliamo la somma della serie nella variabile x, sfruttiamo la somma della serie geometrica, infatti si ha

$$F(x) = \sum_{j=1}^\infty f_j(x) = \sum_{j=1}^\infty x^{-j} = \sum_{j=1}^\infty \left(x^{-1}\right)^j,$$

ovvero la serie geometrica di ragione x^{-1} private del primo termine unitario. Ne consegue, assumendo la condizione di convergenza $\left|x^{-1}\right| < 1$, cioè $|x| > 1$, si ha

$$F(x) = \sum_{j=1}^\infty f_j(x) = \frac{1}{1 - x^{-1}} - 1 = \frac{1}{x-1},$$

poiché la somma della serie può essere calcolata analiticamente è possibile rilassare la condizione di convergenza, ciò significa che la funzione

$$F(x) = \sum_{j=1}^\infty f_j(x) = \frac{1}{x-1},$$

somma della serie, è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Calcoliamo il primo membro dell'identità da dimostrare, cioè la trasformata di Fourier della funzione somma della serie $F(x)$. Abbiamo

$$[\text{primo membro}] = \mathscr{F}_k[F] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x-1}\,dx,$$

dove si è indicato esplicitamente il valore principale in quanto nel caso in cui la funzione integranda abbia delle singolarità reali, quindi appartenenti al percorso di integrazione, la trasformata di Fourier è definita come integrale in valore principale. In questo caso si ha un polo semplice in $x = 1$. Usiamo la formula di Sokhotski-Plemelj e il lemma di Jordan, si ha

$$\begin{aligned}[\text{primo membro}] = \mathscr{F}_k[F] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x-1} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x-1+i\epsilon} dx + i\pi \, e^{-ikx}\Big|_{x=1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-2i\pi\theta(k) \, e^{-ikx}\Big|_{x=1} + i\pi \, e^{-ikx}\Big|_{x=1} \right),\end{aligned}$$

dove il simbolo $\theta(k)$ indica la funzione gradino di Heaviside che, poiché il polo semplice dell'integranda appartiene al semipiano delle parti immaginarie negative, infatti $\epsilon > 0$, indica che l'integrale è non nullo solo per valori di k strettamente positivi. In questo caso, applicando il lemma di Jordan, il valore dell'integrale si calcola con il teorema dei residui applicato a un percorso chiuso orientato in senso orario e quindi negativo, da cui il segno "$-$". Il risultato può essere espresso con una legge duplice ovvero con la funzione "segno",

$$[\text{primo membro}] = \mathscr{F}_k[F] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ik} \begin{cases} 1 & k > 0 \\ -1 & k > 0 \end{cases} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \text{Segno}[k] \, e^{-ik}.$$

Per calcolare il secondo membro, otteniamo la trasformata di Fourier della generica j-esima funzione della successione. Si ha

$$\mathscr{F}_k\left[f_j\right] = \mathscr{F}_k\left[x^{-j}\right] = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \mathscr{F}_k\left[\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} x^{-1}\right] = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} (ik)^{j-1} \mathscr{F}_k\left[x^{-1}\right] = \frac{(-ik)^{j-1}}{(j-1)!} \mathscr{F}_k\left[x^{-1}\right], \qquad \forall j \in \mathbb{N},$$

ovvero, l'unica trasformata di Fourier da calcolare è quella della funzione $f_1(x) = 1/x$. La otteniamo sfruttando quanto già fatto precedentemente, in particolare,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[x^{-1}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pr \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x+i\epsilon} dx + i\pi \, e^{-ikx}\Big|_{x=0} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-2i\pi\theta(k) \, e^{-ikx}\Big|_{x=0} + i\pi \, e^{-ikx}\Big|_{x=0} \right) \\ &= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \text{Segno}[k].\end{aligned}$$

Alla luce di questo risultato, il j-esimo elemento della successione delle trasformate di Fourier, con $j \in \mathbb{N}$, è

$$\mathscr{F}_k\left[f_j\right] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(-ik)^{j-1}}{(j-1)!} \, \text{Segno}[k].$$

La serie di questi termini converge, indicando come proposto dal problema con $G(k)$ la funzione somma, che rappresenta il secondo membro dell'identità da dimostrare, e con il cambiamento di indice $l = j - 1$, si ha

$$[\text{secondo membro}] = G(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}_k\left[f_j\right] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \text{Segno}[k] \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-ik)^{j-1}}{(j-1)!} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \text{Segno}[k] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-ik)^l}{l!},$$

la serie dell'ultimo membro è la serie di Taylor della funzione esponenziale, ne consegue

$$[\text{secondo membro}] = G(k) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \text{Segno}[k] \, e^{-ik},$$

che è uguale all'espressione del primo membro, l'identità è dimostrata.

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Dato l'insieme $\left\{\hat{P}_k\right\}_{k=1}^N$ di proiettori ortogonali e tali da coprire tutto lo spazio di Hilbert E_N in cui sono definiti, ovvero si hanno

$$\hat{P}_k\hat{P}_j = \hat{P}_j\hat{P}_k = \delta_{kj}\hat{P}_k\,, \qquad \forall\, k, j \in \{1, 2, \ldots, N\}\,, \qquad \sum_{k=1}^N \hat{P}_k = \hat{I},$$

si dimostri che

$$\prod_{k=1}^N \left(\hat{I} - \hat{P}_k\right) = \hat{0}\,,$$

dove $\hat{0}$ è l'operatore nullo.
Sono dati, inoltre, i due vettori ortogonali $|v_1\rangle$ e $|v_2\rangle$ appartenenti allo spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, i cui duali, rispetto alla base canonica ortonormale, hanno le rappresentazioni

$$\langle v_1| \hookleftarrow v_1^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \langle v_2| \hookleftarrow v_2^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ottengano le matrici P_1, P_2 e P_3 che rappresentano tre proiettori ortogonali $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$ e $\hat{P}_3$, che coprono tutto lo spazio di Hilbert E_3 e tali che $\hat{P}_1|v_1\rangle = |v_1\rangle$ e $\hat{P}_2|v_2\rangle = |v_2\rangle$. Infine, si verifichi esplicitamente la relazione

$$(I - P_1)(I - P_2)(I - P_3) = \mathrm{diag}\,(0, 0, 0)\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Svolgiamo esplicitamente il prodotto, consideriamo i primi due fattori

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^N \left(\hat{I} - \hat{P}_k\right) &= \left(\hat{I} - \hat{P}_1\right)\left(\hat{I} - \hat{P}_2\right)\left(\hat{I} - \hat{P}_3\right)\cdots\left(\hat{I} - \hat{P}_N\right) \\
&= \Big(\underbrace{\hat{I}^2}_{=\hat{I}} - \hat{P}_1 - \hat{P}_2 + \underbrace{\hat{P}_1\hat{P}_2}_{=0}\Big)\left(\hat{I} - \hat{P}_3\right)\cdots\left(\hat{I} - \hat{P}_N\right) \\
&= \left(\hat{I} - \hat{P}_1 - \hat{P}_2\right)\left(\hat{I} - \hat{P}_3\right)\cdots\left(\hat{I} - \hat{P}_N\right)\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato l'ortogonalità. Il prodotto degli attuali primi due fattori, ovvero dei primi tre originari, dà

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^N \left(\hat{I} - \hat{P}_k\right) &= \left(\hat{I} - \hat{P}_1 - \hat{P}_2\right)\left(\hat{I} - \hat{P}_3\right)\left(\hat{I} - \hat{P}_4\right)\cdots\left(\hat{I} - \hat{P}_N\right) \\
&= \left(\hat{I} - \hat{P}_1 - \hat{P}_2 - \hat{P}_3\right)\left(\hat{I} - \hat{P}_4\right)\cdots\left(\hat{I} - \hat{P}_N\right)\,.
\end{aligned}$$

Iterando $N-1$ volte la procedura, facendo, cioè, il prodotto dei primi $N-1$ fattori, si arriva all'espressione

$$\prod_{k=1}^N \left(\hat{I} - \hat{P}_k\right) = \left(\hat{I} - \hat{P}_1 - \hat{P}_2 - \hat{P}_3 - \cdots \hat{P}_{N-1}\right)\left(\hat{I} - \hat{P}_N\right)\,,$$

da cui, avendo che la somma dei proiettori è uguale all'operatore indennità,

$$\prod_{k=1}^N \left(\hat{I} - \hat{P}_k\right) = \left(\hat{I} - \hat{P}_1 - \hat{P}_2 - \hat{P}_3 - \cdots \hat{P}_{N-1} - \hat{P}_N\right) = \hat{I} - \sum_{j=1}^N \hat{P}_j = \hat{0}\,.$$

Abbiamo dimostrato l'identità richiesta.
I tre proiettori ortogonali dell'insieme $\left\{\hat{P}_k\right\}_{k=1}^3$, sono definiti in termini dei vettori ortogonali dell'insieme $\{|v_k\rangle\}_{k=1}^3$, come

$$\hat{P}_k = \frac{|v_k\rangle\langle v_k|}{\langle v_k|v_k\rangle}\,, \qquad k = 1, 2, 3\,.$$

Solo i primi due vettori sono dati, il terzo si ottiene imponendo la condizione di ortogonalità, ovvero

$$\langle v_1|v_3\rangle = \langle v_1|v_2\rangle = 0 \hookleftarrow \sum_{j=1}^3 v_{(1)}^{j*} v_{(3)}^j = \sum_{k=1}^3 v_{(1)}^{k*} v_{(3)}^k = 0\,,$$

dove la rappresentazione è fatta rispetto alla base canonica ortonormale e il simbolo $v^j_{(k)}$ rappresenta la j-esima componente contro-variante del k-esimo vettore dell'insieme ortogonale $\{|v_l\rangle\}_{l=1}^3$. Per le componenti del terzo vettore si hanno le equazioni

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{3} v^{j*}_{(1)} v^j_{(3)} = v^1_{(3)} + v^2_{(3)} + v^3_{(3)} = 0 \\ \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} v^{j*}_{(2)} v^j_{(3)} = v^1_{(3)} - v^3_{(3)} = 0 \end{cases},$$

da cui, posto $v^1_{(3)} = 1$, si hanno: $v^2_{(3)} = -2$ e $v^3_{(3)} = 1$. Le rappresentazioni dei tre vettori ortogonali sono

$$|v_1\rangle \hookleftarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |v_2\rangle \hookleftarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad |v_3\rangle \hookleftarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gli elementi delle matrici che rappresentano i tre proiettori corrispondenti si ottengono come

$$(P_m)^k_j = \frac{v^k_{(m)} v^{j*}_{(m)}}{\langle v_m | v_m \rangle}, \qquad m, k, j = 1, 2, 3,$$

esplicitamente le espressioni delle tre matrici sono

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che il prodotto cercato coincida con la matrice nulla, si ha infatti

$$\begin{aligned} (I - P_1)(I - P_2)(I - P_3) &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$