Metodi Matematici per la Fisica

Seconda prova parziale del 22 giugno 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottengano, in termini degli operatori di Pauli $\hat{\sigma}_1$,$\hat{\sigma}_2$ e $\hat{\sigma}_3$ e dell'operatore identità $\hat{I}$, le espressioni degli operatori

$$\hat{E}_1 = e^{\hat{\sigma}_1}\,, \qquad \hat{E}_2 = e^{\hat{\sigma}_2}\,, \qquad \hat{E}_{12} = e^{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2}\,, \qquad \left[\hat{E}_1, \hat{E}_2\right].$$

Si verifichino, infine, le differenze

$$\hat{E}_1\hat{E}_2 = e^{\hat{\sigma}_1}e^{\hat{\sigma}_2} \neq e^{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2} = \hat{E}_{12}\,, \qquad \hat{E}_2\hat{E}_1 = e^{\hat{\sigma}_2}e^{\hat{\sigma}_1} \neq e^{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2} = \hat{E}_{12}\,.$$

Soluzione del primo problema

I commutatori e gli anti-commutatori degli operatori di Pauli, che ne definiscono l'algebra sono

$$\left[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\right] = 2i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m\,, \qquad \left\{\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\right\} = 2\hat{I}\delta_{jk}\,, \qquad \forall\, j,k,m \in \{1,2,3\}\,,$$

dove ϵ_{jkm} e δ_{jk} sono, rispettivamente, il tensore completamente anti-simmetrico di Levi-Civita e la delta di Kronecker. Dalle precedenti regole di commutazione e anti-commutazione si ha

$$\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \hat{I}\delta_{jk} + i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m\,, \qquad \forall\, j,k,m \in \{1,2,3\}\,,$$

da cui: $\hat{\sigma}_k^2 = \hat{I}$, $\forall\, k \in \{1,2,3\}$ e quindi, per una potenza pari generica, $\hat{\sigma}_k^{2n} = \hat{I}$ e $\forall\,(k,n) \in \{1,2,3\} \times \mathbb{N}$.
Usando la serie di Taylor dell'esponenziale gli operatori $\hat{E}_1$ e $\hat{E}_2$ possono essere scritti come

$$\hat{E}_{1,2} = e^{\hat{\sigma}_{1,2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\sigma}_{1,2}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat{\sigma}_{1,2}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\hat{\sigma}_{1,2}^{2j+1}}{(2j+1)!} = \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!} + \hat{\sigma}_{1,2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}$$
$$\hat{E}_{1,2} = \hat{I}\cosh(1) + \hat{\sigma}_{1,2}\mathrm{senh}(1)\,.$$

Inoltre, usando la regola di anti-commutazione, il quadrato dell'operatore somma è

$$(\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2)^2 = 2\hat{I} + \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1 = 2\hat{I} + \{\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2\} = 2\hat{I}$$

e la potenza pari generica

$$(\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2)^{2n} = 2^n\hat{I}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Per l'operatore $\hat{E}_{12}$ si ha

$$\begin{aligned}\hat{E}_{12} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)^{2j+1}}{(2j+1)!}\\ &= \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k)!} + (\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{(2j+1)!} = \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^{2k}}{(2k)!} + \frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2}{\sqrt{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}^{2j+1}}{(2j+1)!}\\ \hat{E}_{12} &= \hat{I}\cosh\left(\sqrt{2}\right) + \frac{\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2}{\sqrt{2}}\mathrm{senh}\left(\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

Il commutatore richiesto vale

$$\left[\hat{E}_1,\hat{E}_2\right]=\left[\hat{I}\cosh(1)+\hat{\sigma}_1\sinh(1),\hat{I}\cosh(1)+\hat{\sigma}_2\sinh(1)\right]=\left[\hat{\sigma}_1\sinh(1),\hat{\sigma}_2\sinh(1)\right]=\sinh^2(1)\left[\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2\right]$$
$$\left[\hat{E}_1,\hat{E}_2\right]=2i\,\mathrm{senh}^2(1)\hat{\sigma}_3\,.$$

Infine, gli operatori prodotto

$$\begin{aligned}\hat{E}_1\hat{E}_2&=\left(\hat{I}\cosh(1)+\hat{\sigma}_1\mathrm{senh}(1)\right)\left(\hat{I}\cosh(1)+\hat{\sigma}_2\mathrm{senh}(1)\right)\\&=\hat{I}\cosh^2(1)+(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)\,\mathrm{senh}(1)\cosh(1)+\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\sinh^2(1)\\\hat{E}_1\hat{E}_2&=\hat{I}\cosh^2(1)+(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)\,\mathrm{senh}(1)\cosh(1)+i\hat{\sigma}_3\sinh^2(1)\,,\\\hat{E}_2\hat{E}_1&=\hat{I}\cosh^2(1)+(\hat{\sigma}_1+\hat{\sigma}_2)\,\mathrm{senh}(1)\cosh(1)-i\hat{\sigma}_3\sinh^2(1)\,,\end{aligned}$$

dove il secondo prodotto è stato ottenuto scambiando $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$ nell'espressione del primo, sono diversi dall'operatore $\hat{E}_{12}$, in quanto le rispettive espressioni in termini dei quattro operatori $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\sigma}_3$ e $\hat{I}$, che rappresentano una base dello spazio degli stessi operatori, sono diverse, ovvero le combinazioni non hanno tutti i coefficienti omologhi coincidenti.

Secondo problema (punteggio massimo: 5/30)

Un operatore hermitiano $\hat{H}$, che agisce nello spazio di Hilbert E si dice definito positivo se: $\langle x|\hat{H}|x\rangle > 0$, $\forall\,|x\rangle\in E\backslash\{|0\rangle\}$. Si dimostrino le seguenti affermazioni:

- l'operatore hermitiano e definito positivo $\hat{H}:E\to E$ è invertibile e tale è anche l'operatore inverso;
- dati due operatori hermitiani e definiti positivi $\hat{H}$ e $\hat{K}$ e tali che $\left[\hat{H},\hat{K}\right]=0$, allora l'operatore prodotto $\hat{H}\hat{K}$ è definito positivo.

Soluzione del secondo problema

Un operatore hermitiano $\hat{H}$ definito in uno spazio di Hilbert E_N a N dimensioni è normale e quindi diagonalizzabile ne consegue che esiste un insieme di N vettori ortonormali $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, cioè una base di E_N, rispetto alla quale la matrice che rappresenta l'operatore è diagonale. Inoltre, i vettori della base sono autovettori dell'operatore e gli elementi della matrice diagonale che lo rappresenta sono gli autovalori. Indicando cone H_d la matrice diagonale, si ha

$$\hat{H}\overset{a}{\hookleftarrow}H_d=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N)\,,\qquad\lambda_k=\langle a_k|\hat{H}|a_k\rangle\,,\qquad\forall\,k\in\{1,2,\dots,N\}\,.$$

Poiché l'operatore è definito positivo, tutti gli autovalori sono strettamente positivi: $\lambda_k=\langle a_k|\hat{H}|a_k\rangle>0$, $\forall\,k\in\{1,2,\dots,N\}$, quindi anche il determinante è strettamente positivo, infatti

$$\det\left(\hat{H}\right)=\prod_{k=1}^N\lambda_k>0\,,$$

da cui segue l'invertibilità dell'operatore, ovvero l'esistenza dell'operatore $\hat{H}^{-1}$, tale che: $\hat{H}^{-1}\hat{H}=\hat{H}\hat{H}^{-1}=\hat{I}$. Inoltre, usando il teorema spettrale si che i due operatori sono diagonalizzabili simultaneamente e che gli autovalori dell'uno sono gli inversi degli autovalori dell'altro. In particolare, l'insieme degli autovalori dell'operatore $\hat{H}^{-1}$ è $\{1/\lambda_k\}_{k=1}^N$ e sono anch'essi tutti strettamente positivi. Per dimostrare la definizione positiva dell'operatore $\hat{H}^{-1}$, procediamo come segue: $\forall\,|x\rangle\in E_N\backslash\{|0\rangle\}$, consideriamo la rappresentazione rispetto alla base $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$

$$|x\rangle=x^k|a_k\rangle\,,\qquad x^k=\langle a_k|x\rangle\,,\qquad\forall\,k\in\{1,2,\dots,N\}\,,$$

allora si ha che il valore di aspettazione è strettamente positivo, ovvero

$$\langle x|\hat{H}^{-1}|x\rangle=\sum_{k=1}^N\frac{|x^k|^2}{\lambda_k}>0\,,$$

poiché: $1/\lambda_k>0$, $\forall\,k\in\{1,2,\dots,N\}$ e, essendo $|x\rangle\neq 0$, $\exists\,|\in\rangle\{1,2,\dots,N\}$, tale che: $x^k\neq 0$ e quindi $|x^k|>0$.
Dati i due operatori hermitiani $\hat{H}$ e $\hat{K}$ definiti positivi nello spazio di Hilbert E_N a N dimensioni e commutanti, ovvero tali che $\left[\hat{H},\hat{K}\right]=0$, si ha che sono diagonalizzabili simultaneamente. Ciò significa che esiste una base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}$ di autovettori di entrambi gli operatori, si hanno cioè le equazioni agli autovalori

$$\hat{H}|u_k\rangle=\eta_k|u_k\rangle\,,\qquad\hat{K}|u_k\rangle=\xi_k|u_k\rangle\,,\qquad\forall\,k\in\{1,2,\dots,N\}$$

e, per la definizione positiva di entrambi,

$$\eta_k > 0, \qquad \xi_k > 0, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

I vettori della base di autovettori comuni sono anche autovettori dell'operatore prodotto $\hat{H}\hat{K}$, che ha come autovalori i prodotti degli autovalori dei fattori. Si ha l'equazione agli autovalori

$$\hat{H}\hat{K}|u_k\rangle = \eta_k \xi_k |u_k\rangle \,, \forall\, k \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Poiché è hermitiano e ha tutti gli autovalori strettamente positivi, cioè: $\eta_k \xi_k > 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \dots, N\}$, l'operatore prodotto $\hat{H}\hat{K}$ è definito positivo.

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore $\hat{A}$ è definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 e, rispetto a una base canonica, è rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

Si determini lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ e i vettori che rappresentano i suoi autovettori rispetto alla base canonica considerata. Per un generico operatore diagonalizzabile $\hat{Q}$, definito in uno spazio di Hilbert a N dimensioni, si stabiliscano le condizioni per l'esistenza di un secondo operatore $\hat{R}$, definito nello stesso spazio vettoriale, che verifichi l'equazione

$$\hat{R}^\dagger \hat{R} = \hat{Q}.$$

Infine, dopo averne verificato l'esistenza, si ottenga la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{B}$, definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3, che verifica la suddetta condizione per l'operatore $\hat{A}$, ovvero

$$\hat{B}^\dagger \hat{B} = \hat{A}.$$

Soluzione del terzo problema

Gli autovalori dell'operatore $\hat{A}$ si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\det(A - I\alpha) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\alpha & i & 0 \\ -i & 1-\alpha & i \\ 0 & -i & 2-\alpha \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda(2-\lambda)(\lambda-3) = 0,$$

i tre autovalori sono: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$. Le componenti delle rappresentazioni degli autovettori corrispondenti sono le soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 2-\alpha_j & i & 0 \\ -i & 1-\alpha_j & i \\ 0 & -i & 2-\alpha_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \\ v_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall\, j \in \{1, 2, 3\},$$

dove v_j^k indica la k-esima componente contro-variante del vettore che rappresenta l'autovettore relativo al j-esimo autovalore, con $k, j \in \{1, 2, 3\}$. Poniamo $v_1^1 = v$ e le componenti del primo autovettore si ottengono dal sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla prima e terza riga si hanno

$$v_1^2 = 2iv\,, \qquad v_1^3 = -v\,,$$

quindi, normalizzando, si ha

$$|v_1\rangle \hookleftarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Poniamo $v_2^1 = v$ e le componenti del secondo autovettore si ottengono dal sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & -1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dalla prima e terza riga si hanno

$$v_2^2 = 0 , \qquad v_1^3 = v ,$$

quindi, normalizzando, si ha

$$|v_2\rangle \hookleftarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Poniamo, infine, $v_3^1 = v$ e le componenti del terzo autovettore si ottengono dal sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & -2 & i \\ 0 & -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_3^2 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

dalla prima e terza riga si hanno

$$v_3^2 = -iv , \qquad v_3^3 = -v ,$$

quindi, normalizzando, si ha

$$|v_3\rangle \hookleftarrow v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Sia $\hat{Q}$ un generico operatore diagonalizzabile definito nello spazio di Hilbert a N dimensioni E_N. Poiché, dato un generico operatore $\hat{R}$ nello setsso spazio di Hilbert, l'operatore prodotto $\hat{R}^\dagger \hat{R}$ è hermitiano, condizione necessaria affinché $\hat{Q} = \hat{R}^\dagger \hat{R}$ è che lo stesso operatore $\hat{Q}$ sia hermitiano. Inoltre, considerando l'identità in forma matriciale nella rappresentazione rispetto alla base di autovettori di $\hat{Q}$, che è ortonormale, si ha

$$\hat{R}^\dagger \hat{R} = \hat{Q} \hookleftarrow R^\dagger R = Q_d = \operatorname{diag}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N) ,$$

dove $\rho_k \in \mathbb{R}$ è il k-esimo autovalore dell'operatore $\hat{Q}$, con $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. In particolare, l'elemento della k-esima riga e k-esima colonna della matrice Q, ovvero il k-esimo autovalore, con $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, ha, in termini degli elementi della matrice che rappresenta l'operatore $\hat{R}$, l'espressione

$$\rho_k = (Q_d)_k^k = \left(R^\dagger\right)_j^k R_k^j = \sum_{j=1}^{N} R_k^{j*} R_k^j = \sum_{j=1}^{N} \left|R_k^j\right|^2 ,$$

il che implica $\rho_k \geq 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. In definitiva, affinché l'operatore diagonalizzabile $\hat{Q}$ sia scrivibile come $\hat{R}^\dagger \hat{R} = \hat{Q}$, è necessario che sia **hermitiano e abbia autovalori non negativi**.
L'operatore $\hat{A}$ verifica queste condizioni, è hermitiano e ha autovalori $\alpha_1 = 0$,$\alpha_2 = 2$,$\alpha_3 = 3$. Un possibile operatore $\hat{B}$ tale che $\hat{B}^\dagger \hat{B} = \hat{A}$ è un operatore normale che commuta con $\hat{A}$ e quindi ha gli stessi autovettori, ovvero $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono diagonalizzabili simultaneamente. In questo caso, rispetto alla base di autovettori comuni, la forma matriciale dell'identità richiesta è

$$\hat{B}^\dagger \hat{B} = \hat{A} \hookleftarrow B_d B_d^\dagger = A_d \quad \Rightarrow \quad \left|(B_b)_k^k\right|^2 = (A_b)_k^k \quad \rightarrow \quad |\beta_k|^2 = \alpha_k , \qquad \forall\, k \in \{1, 2, 3\} ,$$

dove $\{\beta_k\}_{k=1}^{3}$ è l'insieme degli autovalori dell'operatore $\hat{B}$. Possiamo definire gli autovalori di $\hat{B}$ a meno di una fase pura che scegliamo, ad esempio, unitaria per cui consideriamo le spettro discreto

$$\beta_1 = \sqrt{\alpha_1} = 0\,, \qquad \beta_2 = \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{2}\,, \qquad \beta_3 = \sqrt{\alpha_3} = \sqrt{3}\,.$$

In definitiva, usando la matrice unitaria U, che diagonalizza la matrice A, come $A_d = U^\dagger A U = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathrm{diag}(0, 2, 3)$, cioè

$$U = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2i/\sqrt{6} & 0 & -i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{B}$ è

$$\begin{aligned} B &= U B_d U^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2i/\sqrt{6} & 0 & -i/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2i/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -2i/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$\hat{B} \hookleftarrow B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3} & i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}-1/\sqrt{3} \\ -i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2}-1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore $\hat{S}$ è definito nella spazio di Hilbert a N dimensioni E_N dalle azioni sui vettori della base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N} \subset E_N$

$$\hat{S}|e_1\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}|e_2\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}|e_3\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}|e_4\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \hat{S}|e_N\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si determini lo spettro discreto dell'operatore e, nel caso di dimensione pari $N = 2m$, con $m \in \mathbb{N}$, i vettori che rappresentano i due autovettori relativi agli autovalori di modulo minimo e massimo.

Soluzione del quarto problema

Dalle azioni date si ottiene la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{S}$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{N} \subset E_N$, si ha infatti

$$\hat{S} \overset{e}{\hookleftarrow} S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo ottenere gli autovalori direttamente dall'equazione agli autovalori. Consideriamo l'autovettore $|v\rangle$ e l'autovalore λ, con la decomposizione $|v\rangle = v^k |e_k\rangle$, si ha

$$\hat{S}|v\rangle = \lambda |v\rangle \qquad \rightarrow \qquad v^k \hat{S}|e_k\rangle = \lambda v^j |e_j\rangle\,,$$

da cui, componente per componente,

$$\begin{array}{rcl}
v^1+v^2=\lambda v^1 & \rightarrow & v^2=v^1(\lambda-1)\\
v^2+v^3=\lambda v^2 & \rightarrow & v^3=v^2(\lambda-1)=v^1(\lambda-1)^2\\
v^3+v^4=\lambda v^3 & \rightarrow & v^4=v^3(\lambda-1)=v^1(\lambda-1)^3\\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots\\
v^k+v^{k+1}=\lambda v^k & \rightarrow & v^{k+1}=v^k(\lambda-1)=v^1(\lambda-1)^k\\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots\\
v^{N-1}+v^N=\lambda v^{N-1} & \rightarrow & v^N=v^{N-1}(\lambda-1)=v^1(\lambda-1)^{N-1}\\
v^1+v^N=\lambda v^N & \rightarrow & v^1=v^N(\lambda-1)=v^1(\lambda-1)^N
\end{array}$$

l'ultima equazione per la componente v^1 da il l'equazione secolare

$$(\lambda-1)^N-1=0\,.$$

Le soluzioni e quindi gli autovalori sono

$$\lambda_k=1+e^{2ik\pi/N}\,,\qquad k\in\{0,1,\ldots,N-1\}\,.$$

Nel caso $N=2m$, con $m\in\mathbb{N}$, si hanno $\lambda_k=1+e^{ik\pi/m}$, con $k=1,2,\ldots,2m$. L'autovalore λ_m è nullo ed è quindi quello con modulo minimo, mentre $\lambda_0=2$ è quello con modulo massimo, infatti, in generale, usando la disuguaglianza triangolare,

$$|\lambda_k|=\left|1+e^{ik\pi/m}\right|\leq 1+\left|e^{ik\pi/m}\right|=2\,.$$

L'autovettore relativo all'autovalore nullo $\lambda_m=0$ ha componenti

$$v_m^2=-v_m^1\,,\quad v_m^3=v_m^1\,,\quad \ldots\quad v_m^{2j}=-v_m^1\,,\quad v_m^{2j+1}=v_m^1\,,\quad \ldots\,,\quad v_m^{2m}=-v_m^1\,,$$

quindi, normalizzando

$$|v_m\rangle \overset{e}{\hookleftarrow} v_m=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\\vdots\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

L'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_0=2$ ha componenti

$$v_0^2=v_0^1\,,\quad v_0^3=v_0^1\,,\quad \ldots v_0^j=v_0^1\,,\quad ,\ldots\,,\quad v_0^{2m}=v_0^1\,,$$

quindi, normalizzando

$$|v_0\rangle \overset{e}{\hookleftarrow}, v_0=\frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la funzione $\hbar(x)$ che verifica l'equazione differenziale

$$\frac{d^4\hbar}{dx^4}+\frac{d^2\hbar}{dx^2}=e^{-|x|}\,.$$

Soluzione del quinto problema

Facendo la trasformata di Fourier di ambo i membri si ha

$$(ik)^4\tilde{\hbar}(k)+(ik)^2\tilde{\hbar}(k)=\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1},$$

è un'equazione algebrico per la trasformata di Fourier di Fourier della funzione incognita $\hbar(x)$ indicata con $\tilde{\hbar}(k)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\hbar}(k)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2(k^2+1)(k^2-1)}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{k^2(k^2-1)}-\frac{1}{k^2(k^2+1)}\right)\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{k^2+1}+\frac{1}{k^2-1}-\frac{2}{k^2}\right)=\tilde{\hbar}_1(k)+\tilde{\hbar}_2(k)+\tilde{\hbar}_3(k),\end{aligned}$$

con

$$\tilde{\hbar}_1(k)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1},\qquad \tilde{\hbar}_2(k)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2-1},\qquad \tilde{\hbar}_3(k)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2}.$$

La prima anti-trasformata di Fourier è nota in quanto la funzione $\tilde{\hbar}_1(k)$ è la distribuzione lorentziana ed è stata già ottenuta come trasformata di Fourier dell'esponenziale del modulo, si ha quindi

$$\hbar_1(x)=\mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{\hbar}_1(k)\right]=\frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Per la seconda anti-trasformata di Fourier procediamo usando la definizione

$$\hbar_2(x)=\mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{\hbar}_2(k)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k^2-1}dk=\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{ikx}}{k-1}-\frac{e^{ikx}}{k+1}\right)dk,$$

ci sono due poli semplici lungo il percorso d'integrazione per i quali va considerato il valore principale, che scriviamo in modo esplicito. Gli integrali in valore principale valgono

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k\pm1}dk&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k\pm1-i\epsilon}dk-i\pi e^{\mp ix}=-i\pi e^{\mp ix}+\begin{cases}0 & x<0\\ 2i\pi\mathrm{Res}[k=\mp1]=e^{\mp ix} & x>0\end{cases}\\&=i\pi e^{\mp ix}\left\{\begin{array}{cc}-1 & x<0\\ +1 & x>0\end{array}\right\}=i\pi\,\mathrm{Segno}(x)e^{\mp ix}.\end{aligned}$$

La seconda anti-trasformata di Fourier completa è

$$\hbar_2(x)=\frac{1}{4\pi}i\pi\,\mathrm{Segno}(x)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)=\frac{1}{4\pi}i\pi\,\mathrm{Segno}(x)2i\,\mathrm{sen}(x)=-\frac{1}{2}\,\mathrm{Segno}(x)\,\mathrm{sen}(x).$$

La terza, infine

$$\begin{aligned}\hbar_3(x)&=\mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{\hbar}_3(k)\right]=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{d}{dk}\frac{1}{k}\right]=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,ix\,\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k}\right]\\&=-\frac{ix}{\pi}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k}dk=-\frac{ix}{\pi}\,i\pi\,\mathrm{Segno}(x)=x\,\mathrm{Segno}(x).\end{aligned}$$

La somma dei tre contributi dà la soluzione, ovvero

$$\hbar(x)=\hbar_1(x)+\hbar_2(x)+\hbar_3(x)=\frac{\mathrm{Segno}(x)\,(2x-\mathrm{sen}(x))+e^{-|x|}}{2}.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\text{I\!I} = \int_{-3/2}^{-1/2} \delta\left(1/\Gamma(x)\right)\cos(\pi x)dx\,.$$

Suggerimento. Potrebbe essere utile usare l'espansione di Weierstrass della funzione gamma di Eulero

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j}\,,$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Soluzione del sesto Problema

L'inverso della funzione gamma di Eulero è una funzione itera che ha zeri semplici nei punti della successione reale $\{x_k = -k\}_{k=0}^{\infty}$. All'intervallo d'integrazione appartiene solo $x_1 = -1$, ne consegue che

$$\text{I\!I} = \int_{-3/2}^{-1/2} \delta\left(x - x_1\right)\cos(\pi x)\left|\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(x)}\right|^{-1} dx = \int_{-3/2}^{-1/2} \delta\left(x+1\right)\cos(\pi x)\left|\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma'(x)}\right| dx = -\left|\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma'(x)}\right|_{x=-1}\,.$$

Per ottenere il valore della derivata prima dell'inverso della funzione gamma di Eulero usiamo, come suggerito, la sua espansione di Weirstrass. Sfruttando la regola del prodotto di Leibniz per la derivazione, poiché il prodotto infinito contiene un fattore che si annulla in $z = x_1 = -1$, l'unico termine non nullo è quello che contiene la derivata di questo fattore, cioè $(1+z/j)$ con, appunto, $j = 1$. Infatti, indicando esplicitamente i termini nella seconda riga dell'equazione,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'}{\Gamma^2}(-1) &= e^{\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j} + \gamma z e^{\gamma z}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j} + ze^{\gamma z}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\left(1+\frac{z}{k}\right)\right)e^{-z/k}\prod_{j\neq k}^{\infty}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-z/j}\Bigg|_{z=-1} \\ &= 0+0-e^{-\gamma}e\prod_{j=2}^{\infty}\left(1+\frac{-1}{j}\right)e^{1/j} = -e^{-\gamma+1}\prod_{j=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{j}\right)e^{1/j}\,,\end{aligned}$$

Per valutare il prodotto infinito, riscriviamo il primo fattore in forma esponenziale cosicché si passi dal prodotto di infiniti esponenziali all'esponenziale della serie degli esponenti, si ha

$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{j}\right)e^{1/j} &= \prod_{j=2}^{\infty}e^{\ln(1-1/j)}e^{1/j} = \prod_{j=2}^{\infty}e^{\ln(j-1)-\ln(j)+1/j} = \exp\left(\sum_{j=2}^{\infty}\left(\ln(j-1)-\ln(j)+\frac{1}{j}\right)\right) \\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{n}\left(\ln(j-1)-\ln(j)+\frac{1}{j}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=2}^{n}(\ln(j-1)-\ln(j))+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right)\right) \\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(-\ln(n)+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(-\ln(n)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)-1\right)\,.\end{aligned}$$

Il limite, come è noto, tende alla costante di Eulero-Mascheroni, quindi il prodotto infinito converge a

$$\prod_{j=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{j}\right)e^{1/j} = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(-\ln(n)+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)-1\right) = e^{\gamma-1}\,.$$

Sostituiamo questo risultato nell'espressione della derivata dell'inverso della funzione gamma di Eulero in $x = -1$, ottenendo il valore della stessa, cioè

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma^2}(-1) = -e^{-\gamma+1}e^{\gamma-1} = -1\,.$$

Ne consegue che l'integrale cercato vale

$$\text{I\!I} = -\left|\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma'(x)}\right|_{x=-1} = -\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma^2}(-1)\right|^{-1} = -1\,.$$