Metodi Matematici per la Fisica

Appello straordinario primaverile - 22 aprile 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 7/30)

Si dimostri l'identità

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x)}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Curiosità. Il carattere $\mathcal{A}$ rappresenta la lettera "A" dell'alfabeto della popolazione extraterrestre del fumetto *Resident Alien*, degli autori statunitensi Peter Hogan e Steve Parkhouse, da cui è stata tratta l'omonima serie televisiva.
A destra le immagini delle copertine del primo, secondo, terzo e settimo volume del fumetto.

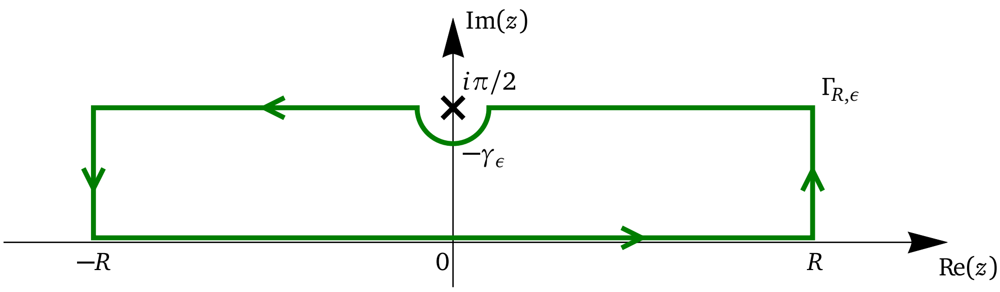
Soluzione del primo problema

Consideriamo il percorso chiuso nel piano complesso z

$$\Gamma_{R,\epsilon} = [-R,R] \cup [R, R+i\pi/2] \cup [R+i\pi/2, \epsilon+i\pi/2] \cup (-\gamma_\epsilon) \cup [-\epsilon+i\pi/2, -R+i\pi/2] \cup [-R+i\pi/2, -R]\,,$$

dove

$$\gamma_\epsilon = \left\{ z : z = i\pi/2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi] \right\}\,.$$



È il perimetro del rettangolo "dentato" internamente in $z = i\pi/2$, mostrato in figura, simmetrico rispetto all'asse immaginario con la base di lunghezza $2R$ appartenete all'asse reale e immerso nel semipiano delle parti immaginarie positive. Nel limite $R \to \infty$, la base del rettangolo Γ_R converge all'asse reale e quindi all'intervallo d'integrazione dell'integrale Ⴆ. La funzione integranda è polidroma, ha punti di diramazione in corrispondenza degli zeri della funzione coseno iperbolico, cioè nei punti dell'insieme $\{p_k = (2k+1)i\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il rettangolo $\Gamma_{R,\epsilon}$ rimane nel dominio di analiticità della funzione integranda per ogni valore $R \in \mathbb{R}$, quindi, per il teorema di Cauchy, si ha

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{dz}{\sqrt{\cosh(z)}} = 0\,.$$

In termini dei singoli contributi,

$$\begin{aligned} 0 = \text{Ⴆ} + \lim_{\epsilon\to 0^+} &\left(-\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x+i\pi/2)}} - \int_{-\infty}^{\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x+i\pi/2)}} - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{\sqrt{\cosh(z)}} \right) \\ &+ \lim_{R\to\infty} \left(i \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cosh(R+iy)}} - i \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cosh(-R+iy)}} \right). \end{aligned} \tag{1}$$

Dimostriamo che i contributi sull'arco γ_ϵ e sui tratti verticali sono nulli rispettivamente nei limiti $\epsilon \to 0^+$ e $R \to \infty$. Sull'arco γ_ϵ si ha $z = i\pi/2 + \epsilon e^{i\theta}$, con $\theta \in [\pi, 2\pi]$, consideriamo il limite dei valori sullo stesso arco del modulo della funzione integranda moltiplicata per $(z - i\pi/2)$, cioè

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \left| \frac{z - i\pi/2}{\sqrt{\cosh(z)}} \right| = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon}{\left|\sqrt{\cosh(i\pi/2 + \epsilon e^{i\theta})}\right|} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon}{\sqrt{\left|\operatorname{senh}(\epsilon e^{i\theta})\right|}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} = 0\,,$$

questo implica che, nello stesso limite anche l'integrale sia infinitesimo, cioè

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{\sqrt{\cosh(z)}} = 0\,.$$

Il limite dei moduli dei contributi sui tratti verticali è

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{\cosh(\pm R + iy)}} \right| \quad &\le \quad \lim_{R\to\infty} \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{|e^{\pm R + iy} + e^{\mp R - iy}|}} \le \lim_{R\to\infty} \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{\sqrt{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|}} \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{\pi/\sqrt{2}}{\sqrt{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|}} = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-R/2} = 0. \end{aligned}$$

Riprendendo l'espressioni di Eq. (1), si ha

$$0 = \text{Ⴆ} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\cosh(x + i\pi/2)}}\,,$$

da cui, usando: $\cosh(x + i\pi/2) = i\ \operatorname{senh}(x)$, si ha

$$\text{Ⴆ} = \frac{1}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{senh}(x)}}\,.$$

Facciamo la sostituzione $u = e^x$, $x = \ln(u)$, $dx = du/u$,

$$\text{Ⴆ} = \sqrt{\frac{2}{i}} \int_0^{\infty} \frac{du/u}{\sqrt{u - 1/u}} = \sqrt{\frac{2}{i}} \int_0^{\infty} u^{-1/2} \left(u^2 - 1\right)^{-1/2} du\,.$$

Per ottenere la rappresentazione in forma di integrale di Eulero di primo tipo della funzione beta di Eulero, suddividiamo l'integrale nella somma

$$\text{Ⴆ} = \sqrt{\frac{2}{i}} \int_0^{1} u^{-1/2} \left(u^2 - 1\right)^{-1/2} du + \sqrt{\frac{2}{i}} \int_1^{\infty} u^{-1/2} \left(u^2 - 1\right)^{-1/2} du \equiv \text{Ⴆ}_1 + \text{Ⴆ}_2\,.$$

Nel primo integrale, $\mathfrak{h}_1$ facciamo l'ulteriore sostituzione $w = u^2$, $u = w^{1/2}$, $du = w^{-1/2}dw/2$, dopo aver cambiato nell'argomento della radice quadrata,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_1 &= \sqrt{-\frac{2}{i}}\int_0^1 u^{-1/2}\left(1-u^2\right)^{-1/2}du = \frac{1}{\sqrt{-2i}}\int_0^1 w^{-3/4}(1-w)^{-1/2}\,dw = \frac{1}{\sqrt{-2i}}\int_0^1 w^{1/4-1}(1-w)^{1/2-1}\,dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{-2i}}\beta(1/4,1/2) = \frac{1}{\sqrt{-2i}}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-2i}}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\,.\end{aligned}$$

Nel secondo integrale facciamo la sostituzione: $t = 1/u^2$, $u = t^{-1/2}$, $du = -t^{-3/2}dt/2$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_2 &= \sqrt{\frac{2}{i}}\int_1^\infty u^{-1/2}\left(u^2-1\right)^{-1/2}du = -\frac{1}{\sqrt{2i}}\int_1^0 t^{-5/4}(1/t-1)^{-1/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2i}}\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/2}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2i}}\int_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{1/2-1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2i}}\beta(1/4,1/2) = \frac{1}{\sqrt{2i}}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2i}}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\,.\end{aligned}$$

La somma dei due integrali è

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\left((-i)^{-1/2}+i^{-1/2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}2\,\mathrm{Re}\left(i^{-1/2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}\,.$$

Usiamo la formula di riflessione

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(z\pi)}\,,$$

con $z = 1/4$, si ha

$$\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}(\pi/4)} = \pi\sqrt{2}\,,$$

quindi

$$\Gamma(3/4) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma(1/4)}\,,$$

che sostituito nell'espressione precedente dell'integrale $\mathfrak{h}$, dà

$$\mathfrak{h} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma^2(1/4)}{\pi\sqrt{2}}\,,$$

quindi il risultato finale

$$\mathfrak{h} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\Phi(a,b,c) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(at)\,\mathrm{sen}(bt)\,\mathrm{sen}(ct)}{t^3}\,dt\,,$$

con $a, b, c \in (0,\infty)$ e tali che: $a > b + c > 0$.

Curiosità. Il carattere Φ rappresenta la lettera "B" dell'alfabeto descritto nel primo problema.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

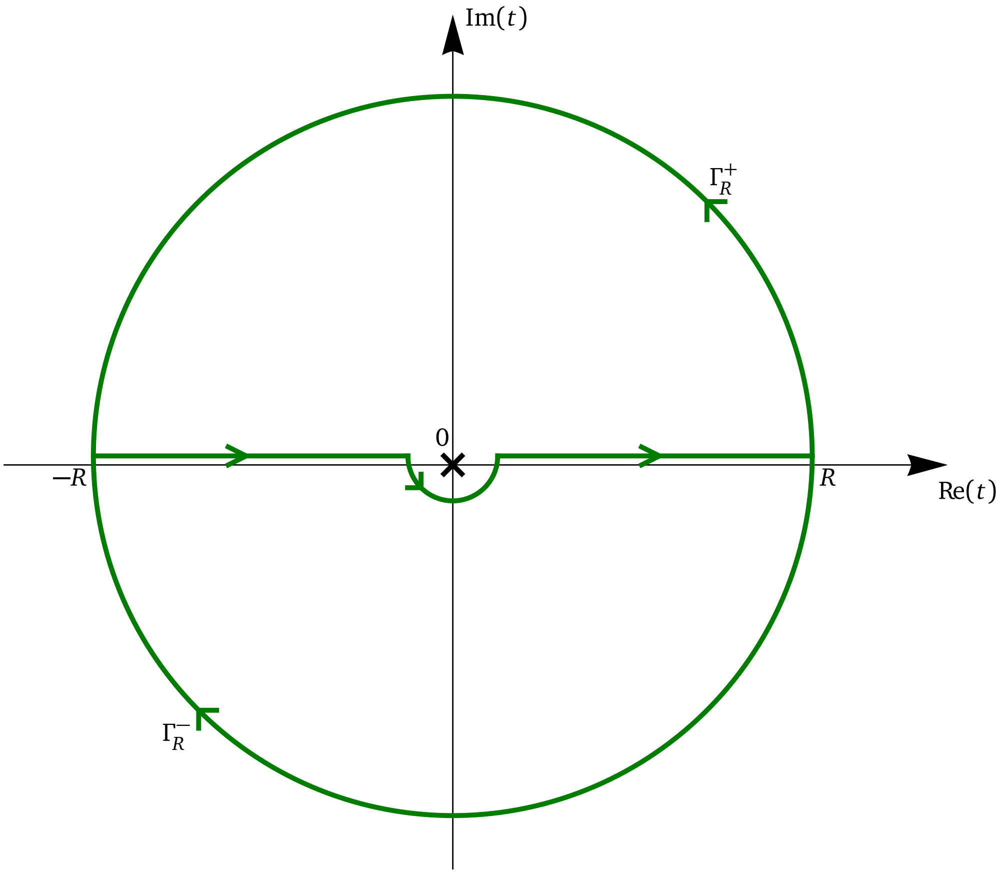
La funzione integranda ha una singolarità eliminabile nell'origine, infatti

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(at)\operatorname{sen}(bt)\operatorname{sen}(ct)}{t^3} = abc\,.$$

Consegue che è possibile deformare con continuità il percorso d'integrazione senza alterare il valore dell'integrale, passando dall'asse reale $(-\infty,\infty)$ all'asse reale "dentato" in corrispondenza dell'origine, Γ e quindi a un'integrazione nel piano complesso t. Il percorso dentato Γ aggira l'origine con una semicirconferenza di raggio infinitesimo ϵ immersa nel semipiano delle parti immaginarie negative, si ha cioè

$$\Gamma = (-\infty, -\epsilon] \cup \left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\right\} \cup [\epsilon, \infty)\,.$$

Una parte finita del percorso Γ è mostrata nella figura sottostante, è costituita dall'unione dei due tratti rettilinei lungo l'asse reale a dalla semicirconferenza che, aggirando l'origine nel semipiano delle parti immaginarie negative, li connette.



Riscriviamo la funzione integranda usando la formula di Eulero per le funzioni seno, si ha

$$\begin{aligned}\Phi(a,b,c) &= \frac{1}{(2i)^3}\int_\Gamma \frac{\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)\left(e^{ibt}-e^{-ibt}\right)\left(e^{ict}-e^{-ict}\right)}{t^3}dt \\ &= \frac{1}{(2i)^3}\int_\Gamma \Big(e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t} \\ &\qquad - e^{i(-a+b+c)t} + e^{i(-a+b-c)t} + e^{i(-a-b+c)t} - e^{i(-a-b-c)t}\Big)\frac{dt}{t^3}\,.\end{aligned}$$

In base alle condizioni del problema riguardo i numeri postivi a, b e c, si hanno:

$$\begin{aligned}&(a+b+c), (a+b-c), (a-b+c), (a-b-c) > 0\,,\\ &(-a-b-c), (-a-b+c), (-a+b-c), (-a+b+c) < 0\,.\end{aligned}$$

Usiamo, quindi, il lemma di Jordan, chiudendo il percorso nel semipiano delle parti immaginarie positive per i primi quattro contributi, negative per gli ultimi quattro, considerando rispettivamente i percorsi chiusi Γ_R^+ e Γ_R^- mostrati in figura, cioè

$$\begin{aligned}
\Gamma_R^+ &= (-R,-\epsilon] \cup \left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2pi]\right\} \cup [\epsilon, R) \cup \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\right\} ,\\
\Gamma_R^- &= (-R,-\epsilon] \cup \left\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2pi]\right\} \cup [\epsilon, R) \cup \left(-\left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\right\}\right) .
\end{aligned}$$

I due percorsi hanno il tratto lungo l'asse reale in comune. Nel limite $R \to \infty$ i contributi sugli archi di raggio R si annullano, cosicché

$$\begin{aligned}
\phi(a,b,c) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2i)^3} \Bigg(&\oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt \\
&+ \oint_{\Gamma_R^-} \frac{-e^{i(-a+b+c)t} + e^{i(-a+b-c)t} + e^{i(-a-b+c)t} - e^{i(-a-b-c)t}}{t^3} dt \Bigg) .
\end{aligned}$$

I due integrali sui percorsi chiusi si calcolano con il teorema dei residui. Per quello sul percorso Γ_R^+, che avvolge l'origine, si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2i)^3} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt \\
&= \frac{2i\pi}{(2i)^3} \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3}, 0\right] .
\end{aligned}$$

Per la funzione integranda l'origine è un polo di ordine tre, quindi il residuo è dato dalla derivata seconda del numeratore, ovvero della funzione integranda moltiplicata per t^3, divisa per 2! e valutata nell'origine, cioè

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2i)^3} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt \\
&= -\frac{\pi}{4} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t} \right)\Bigg|_0 \\
&= -\frac{\pi}{8} \Big(-(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 - (a-b-c)^2 \Big),
\end{aligned}$$

tutti i quadrati e i doppi prodotti contenenti la a si elidono, rimangono, sommandosi, solo i doppi prodotti $2bc$, ce ne sono quattro e, all'interno della parentesi hanno il segno meno, quindi l'integrale vale

$$\frac{1}{(2i)^3} \oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt = \pi bc ,$$

e non dipende dal raggio R.
Il secondo integrale, sul percorso Γ_R^- è nullo, poiché la funzione integranda ha, come nel caso precedente, una sola singolarità, un polo triplo nell'origine, che, però non è avvolto dal percorso d'integrazione, si ha cioè

$$\frac{1}{(2i)^3} \oint_{\Gamma_R^-} \frac{-e^{i(-a+b+c)t} + e^{i(-a+b-c)t} + e^{i(-a-b+c)t} - e^{i(-a-b-c)t}}{t^3} dt = 0 .$$

il secondo integrale è nullo in quanto la funzione integranda ha una sola singolarità nell'origine, un polo di ordine tre che non è avvolto dal percorso Γ_R^-.
Esplicitamente e in modo forse un po' ridondante si ha

$$\begin{aligned}
\phi(a,b,c) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2i)^3} \Bigg(&\oint_{\Gamma_R^+} \frac{e^{i(a+b+c)t} - e^{i(a+b-c)t} - e^{i(a-b+c)t} + e^{i(a-b-c)t}}{t^3} dt \\
&+ \oint_{\Gamma_R^-} \frac{-e^{i(-a+b+c)t} + e^{i(-a+b-c)t} + e^{i(-a-b+c)t} - e^{i(-a-b-c)t}}{t^3} dt \Bigg) \\
= \lim_{R\to\infty} \left(\pi bc + 0\right) ,&
\end{aligned}$$

quindi il risultato finale

$$\Phi(b,c) = \pi b c\,,$$

dove si è soppressa la dipendenza dal a, in quanto, nelle condizioni del problema, tale risultato è indipendente dai valori a.

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la serie di Laurent centrata in $z_0 = 1$ e con dominio di convergenza finito della funzione

$$\mathcal{L}_n(z) = \sum_{j=1}^{n} z^{-j}\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Curiosità. Il carattere $\mathcal{L}$ rappresenta la lettera "L" dell'alfabeto descritto nel primo problema.

Soluzione del terzo problema

La funzione $\mathcal{L}_n(z)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è meromorfa, in quanto somma di n funzioni meromorfe e ha una sola singolarità, si tratta di un polo di ordine n nell'origine. Infatti, la funzione coincide con la sua serie di Laurent centrata nell'origine, tale serie ha solo la parte principale e di questa solo i coefficienti con indici compresi tra $-n$ e -1 sono diversi da zero e tutti uguali all'unità. Da ciò si evince sia la natura polare dell'unica singolarità, che l'ordine della stessa.
Nell'intorno dell'unità, centro della serie richiesta, la funzione è analitica, quindi la serie di Laurent si riduce a quella di Taylor, ovvero i coefficienti con indici negativi sono nulli. Il dominio di convergenza è il disco centrato in $z_0 = 1$, con raggio unitario,

$$D = \{z : |z-1| < 1\}\,,$$

infatti, è pari all'unità la distanza del centro, $z_0 = 1$, dall'unica singolarità, che è l'origine $z = 0$.
Consideriamo il termine j-esimo termine della somma che costituisce la funzione $\mathcal{L}_n(z)$,

$$\frac{1}{z^j} = \frac{1}{(1-(1-z))^j}\,, \qquad \text{con: } j \in \{1,2,\dots,n\}$$

e usiamo la somma della serie geometrica di ragione α, con $|\alpha| < 1$, per esprimere questa potenza inversa. Infatti si ha

$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\,,$$

che, derivando $j-1$ volte dà

$$\frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}}\frac{1}{1-\alpha} = \frac{(j-1)!}{(1-\alpha)^j} = \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k = \sum_{k=j-1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-j+2)\alpha^{k-j+1} = \sum_{k=j-1}^{\infty}\frac{k!}{(k-j+1)!}\alpha^{k-j+1}\,,$$

ne consegue che, usando l'espressione del coefficiente binomiale e facendo un cambiamento di indice

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-\alpha)^j} &= \sum_{k=j-1}^{\infty}\frac{k!}{(k-j+1)!(j-1)!}\alpha^{k-j+1} = \sum_{k=j-1}^{\infty}\binom{k}{j-1}\alpha^{k-j+1} = \{m = k-j+1\} = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+j-1}{j-1}\alpha^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+j-1}{m}\alpha^m\,, \qquad \text{con: } j \in \{1,2,\dots,n\}\,.\end{aligned}$$

Per le potenze inverse della funzione data, con $j \in \{1,2,\dots,n\}$, si hanno le espressioni

$$\frac{1}{z^j} = \frac{1}{(1-(1-z))^j} = \sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+j-1}{m}(1-z)^m = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{m+j-1}{m}(z-1)^m\,,$$

convergono in D, poiché, $\forall z \in D$, si ha $|z-1|<1$. Per la funzione completa, avremo

$$\mathfrak{h}_n(z) = \sum_{j=1}^{n} z^{-j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1-(1-z))^j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \binom{m+j-1}{m}(z-1)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^m \sum_{j=1}^{n}\binom{m+j-1}{m}}_{=C_m}(z-1)^m\,,$$

in generale

$$\mathfrak{h}_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m (z-a)^m\,,$$

con, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$,

$$C_m = \begin{cases} (-1)^m \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\binom{m+j-1}{m} & \forall\, m \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Gli operatori $\hat{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathcal{B}}$ sono definiti nello spazio di Hilbert E_N a dimensione finita $N \in \mathbb{N}$, sapendo che l'operatore $\hat{\mathbf{A}}$ è normale e che i due operatori commutano, cioè si ha

$$\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathcal{B}}\right] = 0\,,$$

si dimostri che l'operatore $\hat{\mathbf{A}}$ commuta anche con l'aggiunto dell'operatore $\hat{\mathcal{B}}$, ovvero che si ha anche

$$\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathcal{B}}^\dagger\right] = 0\,.$$

Soluzione del quarto problema

Un operatore è normale quando commuta con il suo aggiunto, perciò, per ipotesi,

$$\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^\dagger\right] = 0\,.$$

Inoltre, un operatore normale è diagonalizzabile e ammette un insieme ortonormale di autovettori, indichiamo con $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$, l'insieme degli autovettori dell'operatore $\hat{\mathbf{A}}$. Si hanno le N equazioni agli autovalori

$$\hat{\mathbf{A}}|a_k\rangle = \alpha_k |a_k\rangle\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

dove $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovalori dello stesso operatore $\hat{\mathbf{A}}$. Poiché gli operatori $\hat{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$ commutano, sono diagonalizzabili simultaneamente, ammettono quindi lo stesso insieme di autovettori, cioè

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger|a_k\rangle = \tilde{\alpha}_k |a_k\rangle\,,\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

dove $\{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli autovalori dello stesso operatore $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$. È immediato verificare che gli autovalori omologhi α_k e $\tilde{\alpha}_k$, con $k \in \{1,2,\ldots,N\}$ sono gli uni i complessi coniugati degli altri. Infatti, moltiplicando a destra per il vettore *ket* $|a_k\rangle$ la duale della k-esima equazione agli autovalori dell'operatore $\hat{\mathbf{A}}$, con $k \in \{1,2,\ldots,N\}$, si ha

$$\langle a_k|\hat{\mathbf{A}}^\dagger|a_k\rangle = \alpha_k^* \langle a_k|a_k\rangle\,,$$

mentre la k-esima equazione agli autovalori dell'operatore $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$, moltiplicata a sinistra per il vettore *bra* $\langle a_k|$ è

$$\langle a_k|\hat{\mathbf{A}}^\dagger|a_k\rangle = \tilde{\alpha}_k \langle a_k|a_k\rangle\,,$$

da cui, sottraendo membro a membro e avendo che il prodotto scalare $\langle a_k|a_k\rangle$ è sempre strettamente positivo, poiché $|0\rangle \notin \{|a_k\rangle\}_{k=1}^{N}$, si ottiene la relazione desiderata

$$0=\alpha_k^*-\tilde{\alpha}_k \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\alpha}_k=\alpha_k^*\,, \qquad \forall\, k\in\{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Dalla condizione di commutazione dato come ipotesi

$$\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}}\right]=0\,,$$

segue, applicando il commutatore sul generico k-esimo autovettore

$$\left[\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}}\right]|a_k\rangle=|0\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle=\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}|a_k\rangle=\alpha_k\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle\,, \qquad \forall\, k\in\{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Dall'ultima equazione segue che il vettore $\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle$ è autovettore dell'operatore $\hat{\mathbf{A}}$ con autovalore α_k, $\forall\, k\in\{1,2,\ldots,N\}$. Poiché gli operatori $\hat{\mathbf{A}}$ e $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$ sono diagonalizzabili simultaneamente, i vettori dell'insieme $\left\{\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle\right\}_{k=1}^{N}$ sono autovettori anche dell'operatore aggiunto $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$, si hanno quindi le equazioni agli autovalori

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle=\rho_k\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle\,, \qquad \forall\, k\in\{1,2,\ldots,N\}\,,$$

dove ρ_k è l'autovalore dell'operatore $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$ relativo al k-esimo autovettore $\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle$. Ma, così come abbiamo dimostrato che gli autovalori relativi allo stesso k-esimo autovettore $|a_k\rangle$ degli operatori $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$ e $\hat{\mathbf{A}}$ sono l'uno il complesso coniugato dell'altro, cioè $\tilde{\alpha}_k=\alpha_k^*$, $\forall\, k\in\{1,2,\ldots,N\}$, si ha lo stesso per il k-esimo autovettore $\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle$, quindi $\rho_k=\alpha_k^*$, cioè $\rho_k=\tilde{\alpha}_k$. L'equazione precedente diventa

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle=\alpha_k^*\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle\,, \qquad \forall\, k\in\{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Consideriamo l'azione dell'operatore $\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}$ sul k-esimo autovettore $|a_k\rangle$, si ha

$$\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}^\dagger|a_k\rangle=\hat{\mathbf{B}}\tilde{\alpha}_k|a_k\rangle=\alpha_k^*\hat{\mathbf{B}}|a_k\rangle\,, \qquad \forall\, k\in\{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Sottraendo membro a membro le precedenti equazioni si ottiene

$$\left(\hat{\mathbf{A}}^\dagger\hat{\mathbf{B}}-\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}^\dagger\right)|a_k\rangle=\left[\hat{\mathbf{A}}^\dagger,\hat{\mathbf{B}}\right]|a_k\rangle=|0\rangle\,, \qquad \forall\, k\in\{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Poiché l'insieme degli autovettori $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{N}$ è ortonormale, esso rappresenta una base dello spazio vettoriale, allora il fatto che l'azione del commutatore su tutti i vettori della base dia il vettore nullo equivale all'annullamento del commutatore, cioè

$$\left[\hat{\mathbf{A}}^\dagger,\hat{\mathbf{B}}\right]=0\,.$$

È naturalmente nullo anche l'aggiunto del commutatore,

$$0=\left[\hat{\mathbf{A}}^\dagger,\hat{\mathbf{B}}\right]^\dagger=\left(\hat{\mathbf{A}}^\dagger\hat{\mathbf{B}}\right)^\dagger-\left(\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}^\dagger\right)^\dagger=\hat{\mathbf{B}}^\dagger\hat{\mathbf{A}}-\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}^\dagger=\left[\hat{\mathbf{B}}^\dagger,\hat{\mathbf{A}}\right],$$

ovvero, come volevasi dimostrare, anche l'aggiunto dell'operatore $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{B}}^\dagger$, commuta cone l'operatore $\hat{\mathbf{A}}$.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che l'operatore $\hat{\mathbf{A}}$, definito nello spazio di Hilbert H_N di dimensione $N\in\mathbb{N}$ è normale, se e solo se esiste un polinomio $Q(z)$, tale che: $\hat{\mathbf{A}}^\dagger=\hat{Q}\left(\hat{\mathbf{A}}\right)$.

Soluzione del quinto problema

Iniziamo con la condizione necessaria. Abbiamo per ipotesi che l'operatore è normale e dimostriamo l'esistenza del polinomio $Q(z)$.
Un operatore normale è diagonalizzabile e, avvalendosi del teorema spettrale, si può esprimere come

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \hat{P}_k \,,$$

dove $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme dei sui autovalori e $\left\{\hat{P}_k\right\}_{k=1}^N$ è un insieme di proiettori ortogonali, tali che

$$\sum_{k=1}^{N} \hat{P}_k = \hat{I} \,,$$

con $\hat{I}$ operatore identità. Poiché l'operatore è normale, l'insieme dei sui autovettori $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ è ortonormale e i proiettori possono essere definiti come

$$\hat{P}_k = |a_k\rangle\langle a_k| \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\} \,.$$

Inoltre, l'operatore commuta con il suo aggiunto $\hat{\mathbf{A}}^\dagger$, che è, quindi, diagonalizzabile simultaneamente allo stesso operatore $\hat{\mathbf{A}}$, ovvero ammette gli stessi autovettori. Ciò implica che la sua rappresentazione spettrale è fatta con lo stesso insieme di proiettori e quindi gli autovalori sono i complessi coniugati degli omologhi dell'operatore $\hat{\mathbf{A}}$, cioè

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^* \hat{P}_k \,.$$

In generale, l'operatore che si ottiene valutando il polinomio $Q(z)$ su un operatore diagonalizzabile ha una rappresentazione spettrale fatta con gli stessi proiettori, in quanto ha gli stessi autovettori, mentre gli autovalori sono i valori che il polinomio assume sugli autovalori originali, cioè

$$\hat{Q}\left(\hat{\mathbf{A}}\right) = \sum_{k=1}^{N} Q(\alpha_k) \hat{P}_k \,.$$

Ne consegue che il polinomio che verifica l'identità richiesta $\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \hat{Q}(\hat{\mathbf{A}})$, deve essere tale che

$$\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^* \hat{P}_k = \hat{Q}(\hat{\mathbf{A}}) = \sum_{k=1}^{N} Q(\alpha_k) \hat{P}_k \,,$$

che implica

$$Q(\alpha_k) = \alpha_k^* \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\} \,.$$

Consideriamo gli N polinomi

$$q_j(z) = \prod_{k \neq j}^{N} \frac{z - \alpha_k}{\alpha_j - \alpha_k} \alpha_j^* \,, \qquad \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, N\} \,,$$

sono di grado $N-1$ e il j-esimo ha come zeri gli $N-1$ autovalori diversi da α_j. Inoltre, se valuto in α_j vale α_j^*. Si ha cioè

$$q_j(\alpha_k) = \begin{cases} \alpha_j^* & k = j \\ \\ 0 & k \neq j \end{cases} \,, \qquad \forall\, j \in \{1, 2, \ldots, N\} \,.$$

La somma di questi polinomi, cioè di quelli dell'insieme $\left\{q_j(z)\right\}_{j=1}^N$,

$$Q(z) \equiv \sum_{j=1}^{N} q_j(\alpha_k) \,,$$

è ancora un polinomio di grano $N-1$ e tale che, se valutato sugli autovalori dell'insieme $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, vale

$$Q(\alpha_k) \equiv \sum_{j=1}^{N} q_j(\alpha_k) = q_k(\alpha_k) = \alpha_k^*, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Il polinomio così definito è quello cercato e la condizione necessaria è quindi dimostrata.
La condizione sufficiente ha come ipotesi l'esistenza del polinomio $Q(z)$, tale che $\hat{\mathbf{A}}^\dagger = \hat{Q}\left(\hat{\mathbf{A}}\right)$ e dobbiamo dimostrare che l'operatore $\hat{\mathbf{A}}$ è normale. Esprimiamo il polinomio nella forma

$$Q(z) = \sum_{m=0}^{M} c_m z^m,$$

dove $M \in \mathbb{N}$ è il grado e $\{c_m\}_{m=0}^M \subset \mathbb{C}$, con $c_M \neq 0$, è l'insieme dei coefficienti. Usando questa espressione, calcoliamo il commutatore $\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^\dagger\right]$. Si ha, sfruttando la linearità del commutatore,

$$\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^\dagger\right] = \left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{Q}\left(\hat{\mathbf{A}}\right)\right] = \left[\hat{\mathbf{A}}, \sum_{m=0}^{M} c_m \hat{\mathbf{A}}^m\right] = \sum_{m=0}^{M} c_m \underbrace{\left[\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{A}}^m\right]}_{=0} = 0,$$

l'annullamento consegue dal fatto che, come indicato, tutti i commutatori della somma sono nulli, poiché un operatore commuta con l'operatore che si ottiene da ogni sua potenza intera. In definitiva, l'operatore $\hat{\mathbf{A}}$, commutando con il suo aggiunto, è un operatore normale. Abbiamo così dimostrato la condizione sufficiente.

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

L'operatore $\hat{\mathfrak{S}}$ è definito nello spazio di Hilbert R dall'azione

$$\hat{\mathfrak{S}}|x\rangle = \hat{P}|x\rangle + |y\rangle,$$

su un generico vettore $|x\rangle \in R$, dove il vettore $|y\rangle \in R$ è fissato e

$$\hat{P} = \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle},$$

con $|p\rangle \in R \backslash \{|0\rangle\}$.
Si ottenga, in termini dei vettori $|y\rangle$ e $|p\rangle$, e dello scalare λ, l'espressione del vettore $|s\rangle \in R$, che verifica l'indennità

$$\hat{\mathfrak{S}}|s\rangle = \lambda|s\rangle, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Soluzione del sesto Problema

L'equazione per il vettore $|s\rangle$ ha la forma

$$\hat{\mathfrak{S}}|s\rangle = \hat{P}|s\rangle + |y\rangle = \lambda|s\rangle.$$

La riscriviamo come

$$\left(\lambda\hat{I} - \hat{P}\right)|s\rangle = |y\rangle \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P}\right)|s\rangle = \lambda^{-1}|y\rangle.$$

Il vettore cercato può essere ottenuto applicando su ambo i membri dell'ultima identità l'operatore inverso $\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P}\right)^{-1}$ e si ha

$$|s\rangle = \lambda^{-1}\left(\hat{I} - \lambda^{-1}\hat{P}\right)^{-1}|y\rangle.$$

L'operatore inverso, assumendo, la condizione

$$\left\|\lambda^{-1}\hat{P}\right\| = |\lambda|^{-1}\,\|P\| < 1\,,$$

si ottiene come la somma della serie geometrica

$$\left(\hat{I}-\lambda^{-1}\hat{P}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}\hat{P}^{k}\,.$$

L'operatore $\hat{P}$ è un proiettore, è, infatti hermitiano e idempotente, si hanno

$$\hat{P}^{\dagger} = \left(\frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle}\right)^{\dagger} = \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle}\,, \qquad \hat{P}^{2} = \left(\frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle}\right)^{2} = \frac{|p\rangle\langle p|p\rangle\langle p|}{(\langle p|p\rangle)^{2}} = \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle} = \hat{P}\,.$$

Alla luce di ciò, si ha

$$\left(\hat{I}-\lambda^{-1}\hat{P}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}\hat{P}^{k} = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}\hat{P}^{k} = \hat{I} + \hat{P}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k} = \hat{I} + \lambda^{-1}\hat{P}\sum_{k'=0}^{\infty}\lambda^{-k'}\,,$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di indice $k' = k-1$. La serie geometrica di ragione λ^{-1} converge se $|\lambda|^{-1} < 1$, che è la condizione precedentemente richiesta, avendo $\|P\| = 1$. Nell'ipotesi di convergenza si ha

$$\left(\hat{I}-\lambda^{-1}\hat{P}\right)^{-1} = \hat{I} + \frac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}}\hat{P} = \hat{I} + \frac{1}{\lambda-1}\hat{P}\,.$$

Questo risultato, avendo ottenuto al somma della serie vale nel dominio del parametro λ per cui l'espressione è analitica, ovvero: $\forall\,\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, lo zero era già escluso.
Il vettore $|s\rangle$ soluzione dell'equazione vettoriale è

$$\begin{aligned}
|s\rangle &= \lambda^{-1}\left(\hat{I}-\lambda^{-1}\hat{P}\right)^{-1}|y\rangle = \lambda^{-1}\left(\hat{I}+\frac{1}{\lambda-1}\hat{P}\right)|y\rangle = \lambda^{-1}\left(\hat{I}+\frac{1}{\lambda-1}\frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle}\right)|y\rangle \\
&= \frac{1}{\lambda}|y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda-1)\langle p|p\rangle}|p\rangle\,.
\end{aligned}$$

Verifichiamo il risultato, applicando a questo vettore l'operatore $\hat{\mathfrak{S}}$,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{S}}|s\rangle &= \hat{\mathfrak{S}}\left(\frac{1}{\lambda}|y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda-1)\langle p|p\rangle}|p\rangle\right) = \hat{P}\left(\frac{1}{\lambda}|y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda-1)\langle p|p\rangle}|p\rangle\right) + |y\rangle \\
&= \frac{|p\rangle\langle p|}{\langle p|p\rangle}\left(\frac{1}{\lambda}|y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda-1)\langle p|p\rangle}|p\rangle\right) + |y\rangle = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}\frac{1}{\langle p|p\rangle}\Big((\lambda-1)\langle p|y\rangle|p\rangle + \langle p|y\rangle|p\rangle\Big) + |y\rangle \\
&= \frac{\langle p|y\rangle}{(\lambda-1)\langle p|p\rangle}|p\rangle + |y\rangle = \lambda\left(\frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda-1)\langle p|p\rangle}|p\rangle + \frac{1}{\lambda}|y\rangle\right) = \lambda\left(\frac{1}{\lambda}|y\rangle + \frac{\langle p|y\rangle}{\lambda(\lambda-1)\langle p|p\rangle}|p\rangle\right) \\
&= \lambda|s\rangle\,,
\end{aligned}$$

si ottiene così l'equazione richiesta.