Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 22 aprile 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\Phi = \oint_{|z|=1} \ln\left(z + \frac{2}{z}\right)\frac{dz}{z}\,,$$

considerando la determinazione principale $\arg(z) \in [0, 2\pi]$.

Soluzione del primo problema

Riscriviamo la funzione integranda come

$$\Phi = \oint_{|z|=1} \frac{\ln\left(z^2+2\right) - \ln(z)}{z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{\ln\left(z^2+2\right)}{z} dz - \oint_{|z|=1} \frac{\ln(z)}{z} dz = \Phi_1 - \Phi_2\,,$$

le due funzioni integrande così ottenute sono entrambe polidrome, la prima ha come punti di diramazione al finito i due zeri del polinomio di secondo grado che ne rappresenta l'argomento, ovvero $z_\pm = \pm i\sqrt{2}$, la seconda, come è evidente, ha al finito il solo punto di diramazione nell'origine.
Per il calcolo del primo integrale Φ_1, definiamo i tagli lungo l'asse immaginario in particolare sono identificati dalle due semirette $\tau_+ = \{z : z = iy, y \in (\sqrt{2}, \infty)\}$ e $\tau_- = \{z : z = iy, y \in (-\infty, -\sqrt{2})\}$. Con questa scelta il cerchio unitario, ovvero il percorso d'integrazione appartiene al dominio di analiticità della funzione integranda, è quindi possibile applicare il teorema dei residui. Poiché la funzione integranda ha come unica singolarità un polo semplice nell'origine, avremo

$$\Phi_1 = \oint_{|z|=1} \frac{\ln\left(z^2+2\right)}{z} dz = 2i\pi \text{Res}\left[\frac{\ln\left(z^2+2\right)}{z}, z=0\right] = 2i\pi\ln(2)\,.$$

Nel caso del secondo integrale Φ_2, il percorso d'integrazione interseca, inevitabilmente, il taglio della funzione integranda, perciò la definizione della determinazione è cruciale per il calcolo del suo valore. Il fatto che la determinazione principale data sia $\arg(z) \in (0, 2\pi)$ impone di posizionare il taglio lungo il semiasse reale positivo. Integrando direttamente ponendo $z = e^{i\theta}$ e $dz = e^{i\theta} i d\theta$, si ha

$$\Phi_2 = \oint_{|z|=1} \frac{\ln(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\theta}{e^{i\theta}} e^{i\theta} i d\theta = -\int_0^{2\pi} \theta d\theta = -\frac{\theta^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} = -2\pi^2\,.$$

L'integrale cercato vale

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 2\pi\big(\pi + i\ln(2)\big)\,.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si dimostri la seguente identità

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)=\int_0^\infty \operatorname{senh}(x^n)\left(\frac{1}{\tanh(x^n)}-1\right)dx\,,$$

per ogni $n\in\mathbb{N}$.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Con una semplice manipolazione algebrica, usando le formule di Eulero per riscrivere le funzioni iperboliche in termini degli esponenziali degli argomenti, l'integrale diventa

$$\int_0^\infty \operatorname{senh}(x^n)\left(\frac{1}{\tanh(x^n)}-1\right)dx=\int_0^\infty \left(\cosh(x^n)-\operatorname{senh}(x^n)\right)dx=\int_0^\infty e^{-x^n}dx\,.$$

Ovviamente, $\forall\, n\in\mathbb{N}$ l'integrale converge. Facciamo il cambiamento di variabile: $w=x^n$, da cui: $dx=(1/n)w^{1/n-1}dw$, l'integrale diventa

$$\int_0^\infty e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-w}w^{1/n-1}dw\,.$$

Consideriamo la rappresentazione integrale della funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\,,$$

con dominio di convergenza $D=\{z:Re(z)>0\}$, da cui si ottiene che l'integrale precedente vale

$$\int_0^\infty e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-w}w^{1/n-1}dw=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

La convergenza dell'integrale è assicurata dalla condizione $1/n>0$, valida $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Infine, dalla relazione di ricorrenza $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, si ottiene l'identità richiesta

$$\int_0^\infty \operatorname{senh}(x^n)\left(\frac{1}{\tanh(x^n)}-1\right)dx=\int_0^\infty e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right).$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che il prodotto infinito

$$p(x)=2e^{-x}\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{(2j+1)^2\pi^2}\right)\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\ln(2)/2-x)^2+(2k\pi+\alpha)^2}{\ln^2(2)/4+(2k\pi+\alpha)^2}\exp\left(\frac{x\ln(2)}{\ln^2(2)/4+(2k\pi+\alpha)^2}\right)$$

con $\alpha=\arctan\left(\sqrt{7}\right)$, rappresenta l'espansione di Weierstrass della funzione

$$g(z)=\cosh(z)+e^{-2z}\,,$$

per valori reali della variabile, cioè con $z=x\in\mathbb{R}$.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione $g(z)$ è intera in quanto somma di funzioni intere, il coseno iperbolico e l'esponenziale e, come tale, è espandibile à la Weierstrass. Gli zeri, che sono infiniti alla luce della periodicità della funzione, infatti si ha: $g(z)=g(z+2ik\pi)$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$, si ottengono come soluzione dell'equazione

$$g(z)=0\quad\Rightarrow\quad\cosh(z)+e^{-2z}=0\quad\Rightarrow\quad e^z+e^{-z}+2e^{-2z}=0\quad\Rightarrow\quad w^3+w+2=0\,,$$

l'ultima identità è stata ottenuta moltiplicando ambo i membri della precedente per e^{2z} e ponendo $w = e^z$. Una soluzione si ottiene per $w_1 = -1$, come si può verificare direttamente, avendo che il coefficiente della potenza massima è unitario e che il termine noto è 2, si ha la fattorizzazione

$$(w+1)(w^2+aw+2) = w^3+w+2 \qquad \Rightarrow \qquad a=-1\,,$$

e il secondo e il terzo zero sono quelli del polinomio w^2-w+2, ovvero $w_\pm = \left(1 \pm i\sqrt{7}\right)/2$. In forma esponenziale e considerando tutte le determinazioni, si hanno

$$w_{1,k} = e^{(2k+1)i\pi}\,, \qquad w_{\pm,k} = |w_\pm| e^{i\arg(w_\pm)+2ik\pi} = e^{\ln|w_\pm|+i(\arg(w_\pm)+2k\pi)} = e^{\ln(2)/2+i(\pm\alpha+2k\pi)}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,,$$

dove $\alpha = \arctan\left(\sqrt{7}\right)$. Ne consegue che la funzione $g(z)$ ha zeri nei punti

$$z_{1,k} = \ln\left(w_{1,k}\right) = (2k+1)i\pi\,, \qquad z_{\pm,k} = \ln\left(w_{\pm,k}\right) = \frac{\ln(2)}{2} + i\,(2k\pi \pm \alpha)\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Si tratta di zeri semplici, come si evince facilmente nel caso del polinomio nella variabile w, ovvero le molteplicità sono unitarie.
La formula dell'espansione di Weierstrass di una funzione intera $f(z)$, avente zeri nei punti della successione $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ non contenente l'origine $z=0$, con $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ come insieme delle molteplicità corrispondenti, è

$$f(z) = f(0) e^{zf'(0)/f(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\beta_k} e^{z\beta_k/z_k}\,.$$

La funzione data non si annulla nell'origine è quindi possibile usare direttamente questa formula.
I valori in $z=0$ della funzione $g(z)$ e della sua derivata prima sono:

$$g(0) = 2\,, \qquad g'(0) = \left(\operatorname{senh}(z) - 2e^{-2z}\right)_{z=0} = -2\,;$$

le molteplicità sono tutte pari all'unità e, considerando i tre insiemi di zeri

$$g(z) = 2\,e^{-z} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{1,k}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{+,k}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{-,k}}\right) e^{z(1/z_{1,k}+1/z_{+,k}+1/z_{-,k})}\,.$$

Poiché gli zeri della classe $z_{1,k}$ compaiono in coppie di opposti, ovvero $z_{1,k} = -z_{1,-k-1}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, si ha la cancellazione degli esponenziali e i prodotti tra i binomi corrispondenti possono essere riscritti come

$$\begin{aligned}
g(z) &= 2\,e^{-z} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{1,j}}\right) \prod_{j=-\infty}^{-1} \left(1 - \frac{z}{z_{1,j}}\right) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{+,k}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{-,k}}\right) e^{z(1/z_{+,k}+1/z_{-,k})} && \text{con: } j' = -j-1 \\
&= 2\,e^{-z} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{1,j}}\right) \prod_{j'=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{1,-j'-1}}\right) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{+,k}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{-,k}}\right) e^{z(1/z_{+,k}+1/z_{-,k})} && \text{avendo: } z_{-j'-1} = -z_{j'} \\
&= 2\,e^{-z} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{1,j}}\right) \prod_{j'=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{z_{1,j'}}\right) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{+,k}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{-,k}}\right) e^{z(1/z_{+,k}+1/z_{-,k})} \\
&= 2\,e^{-z} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_{1,j}^2}\right) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{+,k}}\right)\left(1 - \frac{z}{z_{-,k}}\right) e^{z(1/z_{+,k}+1/z_{-,k})}\,.
\end{aligned}$$

Gli zeri delle classi $z_{\pm,k}$ posso essere riscritti sotto forma di coppie di complessi coniugati, cambiando il segno del termine dell'integrale $2k\pi$ in $z_{-,k}$. Il cambiamento di segno è lecito poiché k varia in $\mathbb{Z}$, ovvero in un insieme simmetrico rispetto allo scambio $k \leftrightarrow -k$, ne consegue che avremo: $z_{\pm,k} = \ln(2)/2 \pm i(2k\pi + \alpha)$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
Per valori reali della variabile z, cioè nelle condizioni del problema $z = x \in \mathbb{R}$, i due binomi $\left(1 - z/z_{+,k}\right)$ e $\left(1 - z/z_{-,k}\right)$, così come, in generale, gli inversi $1/z_{+,k}$ e $1/z_{-,k}$, sono coppie di complessi coniugati, ne consegue

$$\begin{aligned}
g(x) &= 2\,e^{-x} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{z_{1,j}^2}\right) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{z_{+,k}}\right)\left(1 - \frac{x}{z_{-,k}}\right) e^{x(1/z_{+,k}+1/z_{-,k})} \\
&= 2\,e^{-x} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{z_{1,j}^2}\right) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left|1 - \frac{x}{z_{+,k}}\right|^2 e^{2x\mathrm{Re}(1/z_{+,k})} \\
&= 2\,e^{-x} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{z_{1,j}^2}\right) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\mathrm{Re}(z_{+,k}) - x\right)^2 + \mathrm{Im}^2(z_{+,k})}{\left|z_{+,k}\right|^2} e^{2x\mathrm{Re}(z_{+,k})/|z_{+,k}|^2}\,.
\end{aligned}$$

Usando i valori espliciti degli zeri

$$z_{1,j} = (2j+1)i\pi\,, \qquad \mathrm{Re}(z_{+,k}) = \frac{\ln(2)}{2}\,, \qquad \mathrm{Im}(z_{+,k}) = 2k\pi + \alpha\,, \qquad |z_{+,k}|^2 = \frac{\ln^2(2)}{4} + (2k\pi+\alpha)^2\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\,e^{-x}\prod_{j=0}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{z_{1,j}^2}\right)\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\left(\mathrm{Re}(z_{+,k})-x\right)^2+\mathrm{Im}^2(z_{+,k})}{\left|z_{+,k}\right|^2}e^{2x\mathrm{Re}(z_{+,k})/|z_{+,k}|^2} \\ &= 2\,e^{-x}\prod_{j=0}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{(2j+1)^2\pi^2}\right)\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(\ln(2)/2-x)^2+(2k\pi+\alpha)^2}{\ln^2(2)/4+(2k\pi+\alpha)^2}\exp\left(\frac{x\ln(2)}{\ln^2(2)/4+(2k\pi+\alpha)^2}\right) \end{aligned}$$

che coincide con l'espressione cercata.

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Sapendo che l'identità $S_N(\lambda) = 0$ rappresenta l'equazione secolare dell'operatore normale $\hat{A}$ definito nello spazio di Hilbert E_N a N dimensioni, si dimostri che il polinomio $S_N(\lambda)$, di grado N e normalizzato in modo tale che il coefficiente della potenza massima sia unitario può essere ottenuto come

$$S_N(\lambda) = (-1)^N \det\left(\hat{A}\right)\exp\left(\int_0^{\lambda}\mathrm{Tr}\left(\hat{A}_{\lambda'}\right)d\lambda'\right),$$

dove $\hat{A}_\lambda$ è l'operatore risolvente dell'operatore $\hat{A}$.

Soluzione del quarto problema

L'operatore risolvente è definito per ogni valore di $\lambda \notin \sigma_d(\hat{A})$ come $\hat{A}_\lambda = \left(\hat{I}\lambda - \hat{A}\right)^{-1}$, dove l'insieme $\sigma_d(\hat{A})$ è lo spettro discreto dello stesso operatore $\hat{A}$, ovvero l'insieme degli autovalori, $\sigma_d(\hat{A}) = \{\alpha_k\}_{k=1}^N$. Gli autovettori sono gli elementi dell'insieme ortonormale $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, in quanto l'operatore è normale, rappresentano una base dello spazio di Hilbert E_N, e verificano le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle\,, \qquad k\in\{1,2,\ldots,N\}\,.$$

L'azione dell'operatore risolvente sugli autovettori si ottiene usando il teorema spettrale. In particolare, definiamo la funzione $f_\lambda(z)$, tale che $\hat{A}_\lambda = \hat{f}_\lambda\left(\hat{A}\right)$, come $f_\lambda(z) = (\lambda - z)^{-1}$, ovvero come un polo semplice in $z=\lambda$ di residuo: $\mathrm{Res}\left[f_\lambda(z), z=\lambda\right] = -1$. Ne consegue che l'operatore risolvente ha gli stessi autovettori dell'operatore $\hat{A}$ e come autovalori le immagini degli autovalori dello stesso $\hat{A}$ tramite la funzione $f_\lambda(z)$ e quindi, sempre sotto la condizione: $\lambda \notin \sigma_d\left(\hat{A}\right)$, verifica le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}_\lambda|a_k\rangle = \frac{1}{\lambda-\alpha_k}|a_k\rangle\,, \qquad k\in\{1,2,\ldots,N\}\,.$$

Rispetto alla base degli autovettori $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ le matrici che rappresentano gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{A}_\lambda$ sono diagonali, cioè

$$\hat{A}\overset{a}{\hookleftarrow}A_d = \mathrm{diag}\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N\right)\,, \qquad \hat{A}_\lambda\overset{a}{\hookleftarrow}A_{\lambda d} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda-\alpha_1},\frac{1}{\lambda-\alpha_2},\ldots,\frac{1}{\lambda-\alpha_N}\right),$$

da cui la traccia

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{A}_\lambda\right) = \sum_{k=1}^N\frac{1}{\lambda-\alpha_k}\,.$$

L'integrale dell'esponenziale a secondo membro dell'identità che si intende dimostrare è

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \mathrm{Tr}\left(\hat{A}_{\lambda'}\right)d\lambda' &= \sum_{k=1}^N\int_0^\lambda\frac{d\lambda'}{\lambda'-\alpha_k} = \sum_{k=1}^N \ln\left(\lambda'-\alpha_k\right)\Big|_0^\lambda = \sum_{k=1}^N\left(\ln(\lambda-\alpha_k)-\ln(-\alpha_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^N\left(\ln(\alpha_k-\lambda)-\ln(\alpha_k)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^N(\alpha_k-\lambda)\right)-\ln\left(\prod_{k=1}^N\alpha_k\right) \\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^N(\alpha_k-\lambda)\right)-\ln\left(\det\left(\hat{A}\right)\right), \end{aligned}$$

dove abbiamo identificato il prodotto degli autovalori con il determinante dell'operatore $\hat{A}$.
Il prodotto dell'esponenziale di questa quantità per lo stesso determinante dell'operatore $\hat{A}$ e quindi per $(-1)^N$, ovvero il secondo membro completo dell'identità da dimostrare, vale

$$(-1)^N \det\left(\hat{A}\right) \exp\left(\int_0^{\lambda} \mathrm{Tr}\left(\hat{A}_{\lambda'}\right) d\lambda'\right) = (-1)^N \det\left(\hat{A}\right) \prod_{k=1}^{N} \frac{(\alpha_k - \lambda)}{\det\left(\hat{A}\right)}$$
$$= (-1)^N \prod_{k=1}^{N} (\alpha_k - \lambda)$$
$$= \prod_{k=1}^{N} (\lambda - \alpha_k) \, .$$

Come volevasi dimostrare, si tratta del polinomio di grado N in λ con il coefficiente della potenza massima unitario, avente come zeri gli N autovalori dell'operatore $\hat{A}$, è quindi il polinomio caratteristico $S_N(\lambda)$ dell'operatore.

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Dato il vettore colonna 3×1

$$v(x) = v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

con $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ e $x \in \mathbb{R}$, si determini la matrice A, 3×3, tale che

$$Av(x) = \frac{dv}{dx}(x) \, ;$$

si verifichi, quindi, anche la relazione per la derivata n-esima

$$A^n v(x) = \frac{d^n v}{dx^n}(x) \, ,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La derivata prima del vettore $v(x)$ è

$$\frac{dv}{dx}(x) = v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + 3v_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix},$$

e quindi l'identità che definisce la matrice A

$$Av(x) = v_1 A \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 A \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix} + v_3 A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{dv}{dx}(x) = v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + 3v_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

essendo valida $\forall\, x \in \mathbb{R}$, implica le tre equazioni

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le precedenti sono le tre equazioni agli autovalori per la matrice A, da cui si ha sia lo spettro discreto, ovvero l'insieme dei tre autovalori $\{\alpha_k\}_{k=1}^{3}$, che sono

$$\alpha_1 = 0 \, , \qquad \alpha_2 = 1 \, , \qquad \alpha_3 = 3 \, ,$$

e i corrispondenti autovettori normalizzati

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il loro insieme costituisce una base ortonormale, rispetto alla quale l'operatore $\hat{A}$, la cui rappresentazione canonica è la matrice A, ha la rappresentazione diagonale $A_d = \text{diag}(0, 1, 3)$. Le relazioni tra le due rappresentazioni sono

$$A_d = U^\dagger A U\,, \qquad A = U A_d U^\dagger\,,$$

dove U è la matrice unitaria 3×3, avente per elemento della k-esima riga e j-esima colonna, con $k, j \in \{1, 2, 3\}$, la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, $a^k_{(j)}$, considerando per gli autovettori l'espressione matriciale

$$a_j = \begin{pmatrix} a^1_{(j)} \\ a^2_{(j)} \\ a^3_{(j)} \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3\,.$$

In particolare si ha

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

quindi la matrice A

$$\begin{aligned} A = U A_d U^\dagger &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Al fine di provare la validità della relazione per la derivata n-esima

$$A^n v(x) = \frac{d^n v}{dx^n}(x)\,,$$

calcoliamo indipendentemente i due membri.
Per calcolare la potenza n-esima della matrice A usiamo il teorema spettrale, consideriamo, quindi, la potenza n-esima della rappresentazione diagonale $A^n_d = \text{diag}\left(\alpha^n_1, \alpha^n_3, \alpha^n_3\right) = \text{diag}(0, 1, 3^n)$ e da questa con la stessa trasformazione unitaria U otteniamo la potenza n-esima della matrice A, in dettaglio si ha

$$A^n = U A^n_d U^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n/2 & 0 & 3^n/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3^n/2 & 0 & 3^n/2 \end{pmatrix}.$$

Sempre invocando il teorema spettrale, si ha che la matrice A^n ha gli stessi autovettori della matrice A mentre gli autovalori sono le potenze n-esime degli autovalori originari, ovvero lo spettro discreto è $\left\{\alpha^n_k\right\}^3_{k=1}$. Le equazioni agli autovalori sono quindi

$$A^n a_k = \alpha^n_k a_k\,, \qquad k = 1, 2, 3\,,$$

ovvero, usando i valori espliciti,

$$A^n a_1 = 0 a_1\,, \qquad A^n a_2 = a_2\,, \qquad A^n a_3 = 3^n a_3\,.$$

Ne consegue che il membro di sinistra dell'identità che si desidera verificare è

$$
\begin{aligned}
A^n v(x) &= v_1 \begin{pmatrix} 3^n/2 & 0 & 3^n/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3^n/2 & 0 & 3^n/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3^n/2 & 0 & 3^n/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3^n/2 & 0 & 3^n/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix} \\
&+ v_3 \begin{pmatrix} 3^n/2 & 0 & 3^n/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3^n/2 & 0 & 3^n/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + 3^n v_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

dove abbiamo sfruttato le equazioni agli autovalori per calcolare i prodotti della matrice A^n con i tre vettori colonna, che sono proporzionali agli autovettori della stessa matrice.
Il membro di destra è la derivata n-esima del vettore $v(x)$ e vale

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n v}{dx^n}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left(v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d^n}{dx^n} e^x \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} \frac{d^n}{dx^n} e^{3x} \\ 0 \\ \frac{d^n}{dx^n} e^{3x} \end{pmatrix} \\
&= v_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + 3^n v_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

È immediato verificare la coincidenza delle due quantità e quindi, come richiesto dal problema, la validità dell'identità

$$
A^n v(x) = \frac{d^n v}{dx^n}(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.
$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$
f_n(x) = \frac{\mathrm{sen}^n(x)}{x^2 - 1},
$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione del sesto Problema

Usando la formula di Eulero per la funzione seno si ha

$$
f_n(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} \frac{1}{(2i)^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j e^{ix(2j-n)},
$$

da cui, per la linearità della trasformata di Fourier

$$
\tilde{f}_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(2i)^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(2j-n)}}{x^2 - 1} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(2i)^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(2j-n-k)}}{x^2 - 1} dx.
$$

Poiché l'integrale della trasformata di Fourier va considerato in valore principale qualora vi siano delle singolarità reali, quindi lungo il percorso d'integrazione, tutti i termini della somma sono integrali del tipo

$$
I_m = \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(m-k)}}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(m-k)}}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(m-k)}}{x + 1} dx = I_m^- - I_m^+,
$$

con $m \in \mathbb{N}$ e dove il valore principale è relativo ai due poli semplici che la funzione integranda possiede nei punti $x = \pm 1$. Gli integrali dell'espressione dell'ultimo membro si calcolano sfruttando, prima la formula di Sokhotsky-Plemelj e poi il lemma di Jordan, chiudendo, quindi il percorso d'integrazione con una semi-circonferenza immersa nel semipiano delle parti immaginarie positive o negative a seconda del segno, rispettivamente, positivo o negativo della quantità $(m-k)$. In dettaglio si ha

$$\begin{aligned}
I_m^{\pm} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(m-k)}}{x \pm 1} dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(m-k)}}{x \pm 1 + i\epsilon} dx + i\pi\, e^{ix(m-k)}\Big|_{x=\mp 1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{cases} -2i\pi\, e^{ix(m-k)}\Big|_{x=\mp 1} + i\pi e^{\mp i(m-k)} = -i\pi e^{\mp i(m-k)} & m-k<0 \\ +i\pi e^{\mp i(m-k)} & m-k>0 \end{cases} \\
&= \frac{i\pi}{2}\,\mathrm{segno}(m-k) e^{\mp i(m-k)}\,,
\end{aligned}$$

dove, con $\epsilon \to 0^+$, abbiamo scelto di porre le singolarità della funzione integranda, $z = \mp 1 - i\epsilon$, rispettivamente per $I_m^{\pm}$, nel semipiano delle parti immaginarie negative, quindi si considera il residuo corrispondente solo nel caso con $m-k<0$. Usiamo questo risultato per valutare gli integrali I_m,

$$\begin{aligned}
I_m &= I_m^{-} - I_m^{+} = \frac{i\pi}{2}\,\mathrm{segno}(m-k)\left(e^{i(m-k)} - e^{-i(m-k)}\right) = -\pi\,\mathrm{segno}(m-k)\frac{e^{i(m-k)} - e^{-i(m-k)}}{2i} \\
&= -\pi\,\mathrm{segno}(m-k)\,\mathrm{sen}(m-k)\,.
\end{aligned}$$

In definitiva, osservando che la trasformata di Fourier cercata può essere scritta come somma sull'indice $j = 0, 1, \ldots, n$ degli integrali $I_{m=2j-n}$, cioè

$$\tilde{f}_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(2i)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j I_{2j-n}\,,$$

si ha

$$\tilde{f}_n(k) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(2i)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j\,\mathrm{segno}(2j-n-k)\,\mathrm{sen}(2j-n-k)\,.$$