Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 21 maggio 2013

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Si calcoli l'integrale in valore principale della funzione Gamma di Eulero

$$I_n = \mathrm{Pr}\int_{C_n} \Gamma(z)dz\,,$$

con $C_n = \left\{z : z = ne^{i\theta}, \theta \in (0, 2\pi), n \in \mathbb{N}\right\}$.

. . . .

Soluzione
L'unica singolarità di $\Gamma(z)$ appartenente al cammino d'integrazione, la circonferenza centrata nell'origine di raggio n, è un polo semplice in $z = -n$. Indichiamo con $(-\gamma_{n\epsilon}) \cup C_{n\epsilon}$, dove

$$\begin{aligned}
\gamma_{n\epsilon} &= \left\{z : z = -n + \epsilon e^{i\eta}, \eta \in (-\pi/2, \pi/2), n \in \mathbb{N}\right\}\,,\\
C_{n\epsilon} &= \left\{z : z = ne^{i\phi}, \phi \in (-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon), n \in \mathbb{N}\right\}\,,
\end{aligned}$$

il cammino chiuso che racchiude le prime n singolarità della funzione $\Gamma(z)$, ovvero $(-n + 1)$, $(-n + 2), \ldots, -1, 0$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{(-\gamma_{n\epsilon})\cup C_{n\epsilon}} \Gamma(z)dz &= 2i\pi \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Res}\left[\Gamma(z), z = -j\right]\\
I_n - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_{n\epsilon}} \Gamma(z)dz &= 2i\pi \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!}\,.
\end{aligned}$$

L'integrale su $\gamma_{n\epsilon}$ si calcola sfruttando le proprietà della funzione gamma, ovvero

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_{n\epsilon}} \Gamma(z)dz = i\pi \lim_{z\to -n} \Gamma(z)(z+n)\,,$$

potremmo usare la relazione

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots z\Gamma(z) \quad\Longrightarrow\quad (z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\,,$$

quindi

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_{n\epsilon}} \Gamma(z)dz = i\pi \lim_{z\to -n} \Gamma(z)(z+n) = i\pi\frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = i\pi\frac{(-1)^n}{n!}\,.$$

In definitiva

$$I_n = 2i\pi\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{j!} + \frac{(-1)^n}{2n!}\right]\,.$$

Esercizio 2 (5 punti)
Si scriva lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{1}{a^z + 1} \,,$$

con a reale e $a > 1$.

. . . .

Soluzione
La funzione è meromorfa ed ha solo poli semplici nei punti

$$a^{z_k} = e^{z_k \ln(a)} = -1 = e^{(2k+1)i\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad z_k = \frac{(2k+1)i\pi}{\ln(a)} \,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \,.$$

I residui corrispondenti sono

$$\text{Res}\left[\frac{1}{a^z+1}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{e^{z\ln(a)} + 1} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{\ln(a) a^z} = \frac{1}{\ln(a) a^{z_k}} = -\frac{1}{\ln(a)} \,.$$

Il comportamento asitotico è

$$|f(z)| = \frac{1}{\sqrt{(e^{x\ln(a)}\cos(a) + 1)^2 + e^{2x\ln(a)}\cos^2(a)}} \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & x \to \infty \\ 1 & x \to -\infty \\ \text{limitato} & x = 0 \,, y \neq z_k \end{cases} \,,$$

quindi possiamo scrivere

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-1/\ln(a)}{z - z_k} = g(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-1/\ln(a)}{z - z_k} \,,$$

dove $g(z)$ è costante e può essere determinata nell'origine, sfruttando il valore noto $f(0) = 1/2$,

$$f(0) = g(0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-1/\ln(a)}{-z_k} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad g(0) = \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1/\ln(a)}{z_k} \,.$$

La forma finale è

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\ln(a)} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{\ln(a)} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(a)} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right) \,, \end{aligned}$$

poniamo, nella prima somma $k = -j - 1$ e, avendo che $z_{-j-1} = -z_j$, otteniamo

$$f(z) = \frac{1}{2} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(a)} \left(\frac{1}{z + z_j} - \frac{1}{z_j}\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(a)} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right) = \frac{1}{2} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(a)} \frac{2z}{z^2 - z_j^2} \,.$$

Esercizio 3 (5 punti)
Si sviluppi in serie di Laurent, intorno ai punti $z = 1$ e $z = 2$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}\,,$$

si verifichi, inoltre, che nel punto $z_0 = 3/2 + i/2$, comune ai due domini, gli sviluppi coincidono e se ne calcoli il valore.

. . . .

Soluzione
Per lo sviluppo in $z = 1$ si ha: $0 < |z-1| < 1$ come corona di convergenza. Usando $w = z - 1$ e sfruttando la serie geometrica, otteniamo

$$f_1(z) = \frac{1}{w(w-1)} = -\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty} w^k = -\sum_{k=-1}^{\infty} w^k = -\sum_{k=-1}^{\infty} (z-1)^k\,.$$

Nel caso dello sviluppo intorno a $z = 2$, la corona di convergenza è $0 < |z-2| < 1$ e, posto $q = z - 2$, si ha

$$f_2(z) = \frac{1}{q(q+1)} = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{\infty}(-q)^k = -\sum_{k=-1}^{\infty}(-q)^k = -\sum_{k=-1}^{\infty}(2-z)^k\,.$$

I valori nel punto z_0 coincidono, infatti

$$f_1(z_0) = -\sum_{k=-1}^{\infty}(1/2+i/2)^k = -\frac{1}{1/2+i/2} - \frac{1}{1/2-i/2}\,,$$
$$f_2(z_0) = -\sum_{k=-1}^{\infty}(1/2-i/2)^k = -\frac{1}{1/2-i/2} - \frac{1}{1/2+i/2}\,.$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(ix+1)^n}\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

. . . .

Soluzione
Sfruttiamo la relazione

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathcal{F}_k[f]\,.$$

Infatti, osservando che la funzione $f(x)$ può essere scritta come derivata di un polo semplice nella forma

$$f(x) = -\frac{i^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x-i}\,,$$

si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k\left[f(x)\right] &= -\frac{i^n}{(n-1)!}\mathcal{F}_k\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{x-i}\right]\\ &= -\frac{i^n}{(n-1)!}(ik)^{n-1}\mathcal{F}_k\left[\frac{1}{x-i}\right]\\ &= -i\frac{(-k)^{n-1}}{(n-1)!}\mathcal{F}_k\left[\frac{1}{x-i}\right]\,.\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier della funzione $(x-i)^{-1}$ è

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{1}{x-i}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-i}dx = i\sqrt{2\pi}\,\theta(-k)\,e^k\,,$$

da cui

$$\mathcal{F}_k\left[f(x)\right] = \frac{(-k)^{n-1}}{(n-1)!}\sqrt{2\pi}\,\theta(-k)\,e^k\,.$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

- si classifichi la matrice;
- si calcolino autovalori e autovettori;
- si verifichi che gli autovettori non sono ortogonali;
- si calcoli la matrice $\cos(\pi A)$.

. . . .

Soluzione
La matrice A è antisimmetrica non è normale e quindi non ammette un insieme di autovettori ortogonali. Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\begin{aligned}\det(A-I\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= 0\\ (2-\lambda)\big[-\lambda(1-\lambda)+1\big]+2-\lambda-(1+\lambda) &= 0\\ (2-\lambda)\lambda(\lambda-1)+3-3\lambda &= 0\\ (\lambda-1)\big[(2-\lambda)\lambda-3\big] &= 0\\ (\lambda-1)\big[-3+2\lambda-\lambda^2\big] &= 0\,,\end{aligned}$$

e sono

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2}\,.$$

Gli autovettori si ottengono risolvendo i tre sistemi lineari

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad k = 1, 2, 3\,,$$

dove abbiamo fissato la terza componente dei tre autovettori ad uno. Il primo autovettore normalizzato si ottiene come

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 1 = x_1 \\ \quad -x_1 + 1 = y_1 \\ x_1 - y_1 + 1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ y_1 = 1/2 \end{cases} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Il secondo e il terzo sono

$$\begin{cases} 2x_{2,3} + y_{2,3} - 1 = \left(1 \pm i\sqrt{2}\right) x_{2,3} \\ \quad -x_{2,3} + 1 = \left(1 \pm i\sqrt{2}\right) y_{2,3} \\ x_{2,3} - y_{2,3} + 1 = \left(1 \pm i\sqrt{2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{2 \mp i\sqrt{2}} = \pm\frac{i\sqrt{2}}{2} \\ y_{2,3} = \pm\frac{i\sqrt{2}}{2} \mp i\sqrt{2} = \mp\frac{i\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad u_{2,3} = \begin{pmatrix} \pm i/2 \\ \mp i/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

È facile osservare che gli autovettori sono linearmente indipendenti ma non sono ortogonali, infatti:

$$\begin{aligned} u_1^\dagger u_{2,3} &= \frac{i}{2\sqrt{6}}(\pm 1 \mp 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ u_2^\dagger u_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

La matrice D che diagonalizza la matrice A si ottiene con la solita regola, ovvero disponendo le componenti degli autovettori lungo le colonne

$$D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & i/2 & -i/2 \\ 1/\sqrt{6} & -i/2 & i/2 \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

L'indipendenza lineare degli autovettori si ottiene anche dal fatto che il determinate di D non è nullo, si ha

$$\det(D) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\frac{-i}{\sqrt{2}}\right] - \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{6}}\right] - \frac{i}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{6}}\right] = -\frac{i}{\sqrt{3}}\,.$$

L'equazione agli autovalori nella rappresentazione in cui la matrice A è diagonale, indichiamo con A' la matrice in tale rappresentazione, è

$$A'e_k = \lambda_k e_k\,, \qquad k = 1, 2, 3\,,$$

dove gli e_k sono i vettori della base canonica ed A' ha sulla diagonale i tre autovalori, cioè

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori u_k si ottengono da quelli canonici tramite la matrice invertibile D che quindi diagonalizza A, si hanno, quindi, le seguenti relazioni

$$u_k = De_k\,, \qquad e_k = D^{-1}u_k\,, \qquad k = 1,2,3\,, \qquad A' = D^{-1}AD.$$

L'espressione dell'inversa D^{-1} si ottiene dalla seconda delle precedenti equazioni, in particolare, indicando con d^i_j l'elemento della i-esima riga e j-esima colonna di D^{-1} $(i,j = 1,2,3)$, si ha, ad esempio per la prima riga,

$$\begin{pmatrix} d^1_1 & d^1_2 & d^1_3 \\ d^2_1 & d^2_2 & d^2_3 \\ d^3_1 & d^3_2 & d^3_3 \end{pmatrix} u_{1,2,3} = e_{1,2,3} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^1_1}{\sqrt{6}} + \dfrac{d^1_2}{\sqrt{6}} + \dfrac{2d^1_3}{\sqrt{6}} = 1 \\ \dfrac{i}{2}\left(d^1_1 - d^1_2\right) + \dfrac{d^1_3}{\sqrt{2}} = 0 \\ -\dfrac{i}{2}\left(d^1_1 - d^1_2\right) + \dfrac{d^1_3}{\sqrt{2}} = 0 \end{array} \right. \,,$$

sommando membro a membro la seconda e terza equazione si ottiene direttamente: $d^1_3 = 0$, che sostituito nelle prime due dà

$$\left\{ \begin{array}{l} d^1_1 + d^1_2 = \sqrt{6} \\ d^1_1 - d^1_2 = 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} d^1_1 = \sqrt{3/2} \\ d^1_2 = \sqrt{3/2} \\ d^1_3 = 0 \end{array} \right. \,.$$

Con lo stesso criterio si ottiene la seconda riga, infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2_1}{\sqrt{6}} + \dfrac{d^2_2}{\sqrt{6}} + \dfrac{2d^2_3}{\sqrt{6}} = 0 \\ \dfrac{i}{2}\left(d^2_1 - d^2_2\right) + \dfrac{d^2_3}{\sqrt{2}} = 1 \\ -\dfrac{i}{2}\left(d^2_1 - d^2_2\right) + \dfrac{d^2_3}{\sqrt{2}} = 0 \end{array} \right. \,,$$

dalla somma delle seconda e terza equazione in questo caso si ha $d^3_2 = 1/\sqrt{2}$ e quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2_1 + d^2_2 = -\sqrt{2} \\ d^2_1 - d^2_2 = -i \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} d^2_1 = (-\sqrt{2} - i)/2 \\ d^2_2 = (-\sqrt{2} + i)/2 \\ d^2_3 = 1/\sqrt{2} \end{array} \right. \,.$$

Infine, la terza riga,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^3_1}{\sqrt{6}} + \dfrac{d^3_2}{\sqrt{6}} + \dfrac{2d^3_3}{\sqrt{6}} = 0 \\ \dfrac{i}{2}\left(d^3_1 - d^3_2\right) + \dfrac{d^3_3}{\sqrt{2}} = 0 \\ -\dfrac{i}{2}\left(d^3_1 - d^3_2\right) + \dfrac{d^3_3}{\sqrt{2}} = 1 \end{array} \right. \,,$$

anche in questo caso, dalla somma delle seconda e terza equazione in questo caso si ha $d^3_2 = 1/\sqrt{2}$, per cui

$$\left\{ \begin{array}{l} d^3_1 + d^3_2 = -\sqrt{2} \\ d^3_1 - d^3_2 = i \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} d^2_1 = (-\sqrt{2} + i)/2 \\ d^2_2 = (-\sqrt{2} - i)/2 \\ d^2_3 = 1/\sqrt{2} \end{array} \right. \,.$$

Ricapitolando la matrice inversa D^{-1} è

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} & 0 \\ (-\sqrt{2}-i)/2 & (-\sqrt{2}+i)/2 & 1/\sqrt{2} \\ (-\sqrt{2}+i)/2 & (-\sqrt{2}-i)/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nella rappresentazione diagonale la matrice $\cos(\pi A')$ è diagonale e si ha

$$\cos(\pi A') = \begin{pmatrix} \cos(\pi\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi\lambda_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh(\pi\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & -\cosh(\pi\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

Nella rappresentazione iniziale, invece, usando $c = -\cosh(\pi\sqrt{2})$, si ottiene il risultato cercato

$$\begin{aligned}
\cos(\pi A) &= D\cos(\pi A')D^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}-i}{2} & \frac{-\sqrt{2}+i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-\sqrt{2}+i}{2} & \frac{-\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ c\frac{-\sqrt{2}-i}{2} & c\frac{-\sqrt{2}+i}{2} & \frac{c}{\sqrt{2}} \\ c\frac{-\sqrt{2}+i}{2} & c\frac{-\sqrt{2}-i}{2} & \frac{c}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{c-1}{2} & \frac{-c-1}{2} & 0 \\ \frac{-c-1}{2} & \frac{c-1}{2} & 0 \\ c-1 & c-1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\cosh(\pi\sqrt{2})-1}{2} & \frac{\cosh(\pi\sqrt{2})-1}{2} & 0 \\ \frac{\cosh(\pi\sqrt{2})-1}{2} & \frac{-\cosh(\pi\sqrt{2})-1}{2} & 0 \\ -\cosh(\pi\sqrt{2})-1 & -\cosh(\pi\sqrt{2})-1 & -\cosh(\pi\sqrt{2}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Si risolva l'equazione di Fredholm

$$f(x) - \alpha\int_0^\pi \sin(x-y)f(y)dy = \cos(x).$$

. . . .

Soluzione
Il kernel è separabile, definiamo le funzioni

$$\begin{cases} M_1(x) = \operatorname{sen}(x) \\ M_2(x) = -\cos(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1(x) = \cos(x) \\ N_2(x) = \sin(x) \end{cases},$$

e riscriviamo l'equazione come

$$f(x) - \alpha\sum_{k=1}^{2} M_k(x)\int_0^\pi N_k(y)f(y)dy = \cos(x),$$

moltiplichiamo ambo i membri per $N_j(x)$ e integriamo in dx sull'intervallo $[0,\pi]$

$$\underbrace{\int_0^\pi N_j(x)f(x)dx}_{C_j} - \alpha\sum_{k=1}^{2}\underbrace{\int_0^\pi N_j(x)M_k(x)dx}_{A_{jk}}\underbrace{\int_0^\pi N_k(y)f(y)dy}_{C_k} = \underbrace{\int_0^\pi N_j(x)\cos(x)dx}_{B_j},$$

si ha quindi l'identità vettoriale, ovvero il sistema,

$$(I-\alpha A)C = B\,,$$

dove $(I-\alpha A)$ è la matrice dei coefficienti, B il vettore termine noto, e C il vettore incognito. Le componenti di A sono

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_{-1}^{1} N_1(x)M_1(x)dx = 0 \\ A_{12} &= \int_{-1}^{1} N_1(x)M_2(x)dx = -\frac{\pi}{2} \\ A_{21} &= \int_{-1}^{1} N_2(x)M_1(x)dx = \frac{\pi}{2} \\ A_{22} &= \int_{-1}^{1} N_2(x)M_2(x)dx = 0\,. \end{aligned}$$

Mentre quelle di B sono

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_{-1}^{1} N_1(x)\cos(x)dx = \frac{\pi}{2} \\ B_2 &= \int_{-1}^{1} N_2(x)\cos(x)dx = 0\,. \end{aligned}$$

Il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha\pi/2 \\ -\alpha\pi/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ha soluzione solo se

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \alpha\pi/2 \\ -\alpha\pi/2 & 1 \end{pmatrix} = 1+\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^2 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \neq \pm\frac{2i}{\pi}\,.$$

La soluzione del sistema è

$$C_1 = \frac{\pi/2}{1+(\alpha\pi/2)^2}\,, \qquad C_2 = \frac{(\alpha\pi/2)^2}{1+(\alpha\pi/2)^2}\,.$$

La funzione, unica soluzione dell'equazione nel caso $\alpha \neq \pm 2i/\pi$, è

$$\begin{aligned} f(x) = \cos(x) + \alpha\sum_{k=1}^{2} M_k(x)C_k &= \cos(x) + \frac{(\alpha\pi/2)\,\mathrm{sen}\,(x) - (\alpha\pi/2)^2\cos(x)}{1+(\alpha\pi/2)^2} \\ &= \frac{\cos(x) + (\alpha\pi/2)\,\mathrm{sen}\,(x)}{1+(\alpha\pi/2)^2}\,. \end{aligned}$$