Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 21 giugno 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 5/30)

Si verifichi l'identità

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \forall\, x \in (0,\pi),$$

sfruttando la serie trigonometrica di Fourier della funzione a gradino $f(x) = 2\,\theta(x) - 1$, dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside e $f(x) \in L^2(-\pi,\pi)$.

Soluzione del primo problema

La serie trigonometrica di Fourier ha l'espressione formale

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx) \right] ,$$

con i coefficienti

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x)\, dx\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(kx) f(x)\, dx\,, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

La funzione $f(x)$, che può essere riscritta con la legge duplice

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} ,$$

è dispari, quindi tutti i coefficienti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ sono nulli.
I coefficienti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ sono

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(kx) f(x)\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{sen}(kx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \mathrm{sen}(kx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{4}{\pi k} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases} ,$$

con $k \in \mathbb{N}$. In definitiva si ha, per $x \in (-\pi, \pi)$,

$$\overline{f}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}[(2k+1)x]}{2k+1} ,$$

dove $\overline{f}(x)$ è il valore medio di $f(x)$ cioè

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} ,$$

$f(x^{\pm})$ sono i limiti destro e sinistro in x della funzione, ovvero

$$f(x^{\pm}) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(x \pm \epsilon) .$$

Per ogni $x \in (0, \pi)$, di ha ovviamente $\overline{f}(x) = f(x) = 1$, quindi

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2k+1)x]}{2k+1},$$

da cui l'identità cercata

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \forall\, x \in (0, 1).$$

Secondo problema (punteggio 7/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{1}{a^z + b^z},$$

dove a e b sono numeri reali che verificano le condizioni

$$0 < a < 1 < b.$$

Per il calcolo del valore nell'origine si può sfruttare, senza dimostrazione, l'identità del primo problema.

Soluzione del secondo problema

La funzione può essere riscritta nella forma

$$f(z) = \frac{1}{e^{z\ln(a)} + e^{z\ln(b)}} = \frac{1}{e^{\alpha z} + e^{\beta z}},$$

con $\alpha = \ln(a)$ e $\beta = \ln(b)$. Inoltre dalle limitazioni di a e b si ottiene che α e β sono reali e che verificano le condizioni

$$\alpha < 0 < \beta.$$

La funzione ha poli in corrispondenza dei punti z_k, tali da verificare

$$e^{\alpha z_k} + e^{\beta z_k} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha z_k = \beta z_k + (2k+1) i\pi \qquad \Rightarrow \qquad z_k = \frac{(2k+1)i\pi}{\alpha - \beta} = w_k\, i,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta di una successione monotona crescente, $|z_{|k|+1}| > |z_{|k|}|$, di poli semplici, equispaziati

$$|z_{k+1} - z_k| = \frac{2\pi}{\alpha - \beta}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

che si accumula all'infinito. I residui di tali poli sono

$$R_k = \lim_{z\to z_k} f(z)(z - z_k) = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{e^{\alpha z} + e^{\beta z}} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{\alpha e^{\alpha z} + \beta e^{\beta z}} = \frac{1}{\alpha e^{\alpha z_k} + \beta e^{\beta z_k}} = \frac{e^{-\alpha z_k}}{\alpha - \beta},$$

si è sfruttata l'identità $e^{\alpha z_k} = -e^{\beta z_k}$. Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$f(z) = g(z) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{R_k}{z - z_k},$$

dove la funzione $g(z)$ rappresenta la parte intera di $f(z)$ ed ha il suo stesso comportamento asintotico. Si osserva che, per $\mathrm{Re}(z) = x \neq 0$,

$$0 \leq |f(z)| = \frac{1}{\left|e^{\alpha z} + e^{\beta z}\right|} \leq \frac{1}{\left|\left|e^{\alpha z}\right| - \left|e^{\beta z}\right|\right|} = \frac{1}{\left|e^{\alpha x} - e^{\beta x}\right|} \begin{cases} \sim e^{-\beta x} \to 0 & x \to +\infty \\ \sim e^{-\alpha x} \to 0 & x \to -\infty \end{cases} .$$

Se, invece $x = 0$, la parte immaginaria $\mathrm{Im}(z) = y$ può divergere lungo la successione $\{y_k = 2k\pi/(\alpha - \beta)\}_{k=0}^{\infty}$, "saltando" le singolarità, si ha quindi

$$0 \leq |f(y_k)| = \frac{1}{\left|e^{i\alpha y_k} + e^{i\beta y_k}\right|} = \frac{1}{\left|e^{i(\alpha-\beta)y_k/2} + e^{-i(\alpha-\beta)y_k/2}\right|} = \frac{1}{\left|e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}\right|} = \frac{1}{2} .$$

La funzione è asintoticamente costante, ovvero non diverge, $g(z) = g_0$.
Riscriviamo la somma come

$$f(z) = g_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{R_k}{z - z_k} = g_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_k}{z - z_k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{R_k}{z - z_k} = g_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_k}{z - z_k} + \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{R_{-k'-1}}{z - z_{-k'-1}} ,$$

ma si ha anche che $z_{-k'-1} = -z_{k'}$, quindi

$$\begin{aligned} f(z) &= g_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{R_k}{z - z_k} \\ &= g_0 + \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-\alpha z_k}}{z - z_k} + \frac{e^{\alpha z_k}}{z + z_k} \right] \\ &= g_0 + \frac{2}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z \cosh(\alpha z_k) - z_k \mathrm{senh}(\alpha z_k)}{z^2 - z_k^2} \\ &= g_0 + \frac{2}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z \cos(\alpha w_k) + w_k \mathrm{sen}(\alpha w_k)}{z^2 + w_k^2} . \end{aligned}$$

Valutiamo la funzione $z = 0$ per determinare il valore g_0,

$$f(0) = \frac{1}{2} = g_0 + \frac{2}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(\alpha w_k)}{w_k} = g_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(\alpha(2k+1)\pi/(\alpha - \beta))}{(2k+1)\pi} ,$$

ovvero

$$g_0 = \frac{1}{2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(\alpha(2k+1)\pi/(\alpha - \beta))}{(2k+1)\pi} .$$

La serie ha la forma

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}[(2k+1)x]}{2k+1} ,$$

con $x = \alpha\pi/(\alpha - \beta)$, ma si ha $\alpha < 0 < \beta$, avremo $\alpha - \beta < \alpha < 0$, quindi $-\alpha + \beta > -\alpha > 0$, dividendo per $-\alpha + \beta$ si ottiene

$$0 < \frac{\alpha}{\alpha - \beta} < 1 ,$$

che per x diventa

$$0 < \frac{\alpha\pi}{\alpha-\beta} = x < \pi \,.$$

Usando il risultato del primo problema si ha

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}[(2k+1)x]}{2k+1} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \,.$$

Il valore di g_0 è

$$g_0 = \frac{1}{2} - 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(\alpha(2k+1)\pi/(\alpha-\beta))}{(2k+1)\pi} = 0 \,,$$

da cui il risultato finale

$$f(z) = \frac{2}{\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z\cos(\alpha w_k) + w_k \mathrm{sen}(\alpha w_k)}{z^2 + w_k^2} \,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si scriva la serie di Laurent, centrata nell'origine, della funzione

$$f(z) = \left(z^{-3} + a\, z^{-5}\right)\cosh(z) \,,$$

con $a \neq 0$.
Si calcolino gli integrali

$$I_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1} z^n f(z) dz \,,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione del terzo problema

Si può sfruttare la serie di Taylor del coseno iperbolico

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}\frac{z^{2k}}{(2k)!} \,.$$

da cui si ottiene

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k-3} + az^{2k-5}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k-3}}{(2k)!} + a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k-5}}{(2k)!} \,.$$

Per avere un'espressione compatta e nella forma tipica di una serie di Laurent, poniamo $n = 2k-3$ nella prima serie e $m = 2k-5$ nella seconda,

$$f(z) = \sum_{n=-3\,,\mathrm{diapri}}^{\infty}\frac{z^n}{(n+3)!} + a\sum_{m=-5\,,\mathrm{dispari}}^{\infty}\frac{z^m}{(m+5)!} = \sum_{k=-5}^{\infty} C_k z^k \,,$$

i coefficienti C_k hanno la triplice legge

$$C_k = \begin{cases} 0 & \text{se } |k| \text{ è pari o } k < -5 \\ a & k = -5 \\ \dfrac{a}{(k+5)!} + \dfrac{1}{(k+3)!} & k \geq -3 \text{ e } |k| \text{ è dispari} \end{cases} .$$

Gli integrali I_n sono esprimibili in termini dei coefficienti di Laurent

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz ,$$

infatti

$$I_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} z^n f(z) dz = C_{-n-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari o } n > 4 \\ a & n = 4 \\ \dfrac{a}{(4-n)!} + \dfrac{1}{(2-n)!} & n = 0, 2 \end{cases} .$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

si determinino i valori di $a \in \mathbb{C}$ in corrispondenza dei quali:

- A ammetta un insieme ortonormale di tre autovettori;
- A non sia diagonalizzabile.

Soluzione del quarto problema

Affinché A ammetta un insieme ortonormale di tre autovettori la matrice deve essere normale, ovvero deve commutare con la matrice $A^\dagger$

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & a^* & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Il commutatore è

$$[A, A^\dagger] = \begin{pmatrix} 4 - |a|^2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 + |a|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ne consegue che la matrice è normale se $|a| = 2$.
In generale ($\forall\, a \neq 0$), gli autovalori di A, che sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ a & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0 ,$$

sono

$$\lambda_1 = -1\,, \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2a}\,.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{1+a/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{a/2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene la matrice diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{1+a/2} & 1/\sqrt{1+a/2} \\ 1 & \sqrt{a/2}/\sqrt{1+a/2} & -\sqrt{a/2}/\sqrt{1+a/2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero si ha

$$\mathrm{diag}\left(-1, 1+\sqrt{2a}, 1-\sqrt{2a}\right) = U^{-1}AU\,.$$

In questo caso, poiché la gli autovettori non sono ortonormali, la matrice U non è unitaria, quindi, anziché $U^\dagger$, si deve usare la matrice inversa, che non coincide con l'aggiunta.
La matrice A è non diagonalizzabile se U non è invertibile, ovvero se ha determinante nullo, il che equivale a dire che gli autovettori non sono linearmente indipendenti. Il determinante di U si annulla quando $a = 0$, infatti

$$0 = \det U = -\frac{2\sqrt{2a}}{2+a} \qquad \Rightarrow \qquad a = 0\,.$$

Quindi, per $a = 0$, la matrice A non è diagonalizzabile.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Sfruttando il teorema di Plancherel (equazione di Parseval) e la disuguaglianza di Schwarz, si dimostri la relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left|\tilde{f}(k)\right|^2 dk \geq \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx\right)^2,$$

per ogni funzione reale $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, tale che anche $f'(x) \in L^2(\mathbb{R})$.
Il simbolo $\tilde{f}(k)$ indicata la trasformata di Fourier della $f(x)$, ovvero $\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k[f]$.

Soluzione del quinto problema

Partiamo dal prodotto di integrali, a primo membro, e interpretiamo il secondo come l'integrale del modulo quadro della trasformata di Fourier della derivata prima di $f(x)$, infatti si ha

$$\mathscr{F}_k[f'(x)] = ik\tilde{f}(k),$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left|\tilde{f}(k)\right|^2 dk &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left|ik\tilde{f}(k)\right|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathscr{F}_k[f'(x)]\right|^2 dk\,. \end{aligned}$$

Il teorema di Plancherel afferma che data una funzione $h(x) \in L^2(\mathbb{R})$, vale l'equazione di Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathscr{F}_k[h]\right|^2 dk \, .$$

Alla luce di ciò, avremo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left|\tilde{f}(k)\right|^2 dk &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathscr{F}_k[f'(x)]\right|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left|f'(x)\right|^2 dx \, . \end{aligned}$$

La disuguaglianza di Schwarz si ha per una coppia generica di funzioni $h(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ come

$$|(h,g)|^2 \leq (h,h)(g,g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|\int_{-\infty}^{\infty} h^*(x) g(x) dx\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left|g(x)\right|^2 dx \, .$$

Posto $h(x) = x f(x)$ e $f'(x) = g(x)$ e sfruttando il fatto che $f(x) \in \mathbb{R}$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left|\tilde{f}(k)\right|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left|f'(x)\right|^2 dx \geq \left|\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) f'(x) dx\right|^2 .$$

Integriamo per parti l'ultimo integrale e otteniamo la disuguaglianza cercata

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \left|\tilde{f}(k)\right|^2 dk &\geq \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) f'(x) dx\right)^2 \\ &\geq \left(\underbrace{\left.\frac{x f^2(x)}{2}\right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx\right)^2 \\ &\geq \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx\right)^2 . \end{aligned}$$

L'annullamento del primo termine a secondo membro della seconda espressione è conseguenza del fatto che: $f(x) = o(1/x^2)$ per $x \to \pm\infty$, in quanto la funzione è reale e a quadrato sommabile.

Sesto problema (punteggio 6/30)

Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

si determini la rappresentazione spettrale

$$B = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k P_k \, ,$$

dove $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ è l'insieme degli autovalori di B e P_1, P_2 e P_3 sono opportuni proiettori ortogonali.

Soluzione del sesto Problema

Gli autovalori sono gli zeri dell'equazione

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \;=\; 0$$
$$-(1+\lambda)\left[1+(1-\lambda)^2\right]=0\,,$$

ovvero

$$\lambda_1=-1\,, \qquad \lambda_{2,3}=1\pm i\,.$$

Gli autovettori sono

$$u_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{2,3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp i \end{pmatrix}.$$

I proiettori P_k hanno elementi di matrice

$$(P_k)_{mn}=(u_k)_m(u_k)^*_n\,, \qquad k,m,n=1,2,3\,.$$

In particolare si hanno

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_{2,3}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \pm i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mp i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione spettrale è

$$\begin{aligned} B &= (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+(1+i)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}+(1-i)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+2\mathrm{Re}\left[(1+i)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$