Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 21 giugno 2012

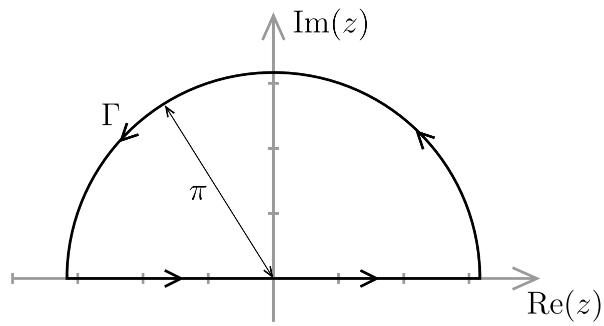
Esercizio 1 (8 punti)
Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z\,\sin(z)}{\sin[\sin(z)]}\,,$$

- si studino e classifichino le singolarità e, di conseguenza, si stabilisca la classe cui $f(z)$ appartiene;
- si calcoli l'integrale

  $$S = \int_\Gamma f(z)dz\,,$$

  dove $\Gamma = [-\pi, +\pi] \cup \{z : z = \pi e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}$ è percorso in senso antiorario come in figura.



. . . .

Soluzione
Si può applicare il teorema dei residui. L'integranda ha poli nei punti w_k in cui $\sin(w_k) = k\pi$ con $k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$. Quindi si possono definire

$$w_k = \arcsin(k\pi)\,, \qquad k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots\,,$$

si ha degenerazione, infatti, per i poli sull'asse reale si ha:

$$w_0 = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\,,$$

questi sono tutti poli semplici che rappresentano per l'integranda singolarità eliminabili ovvero

$$\lim_{z\to w_0} \frac{z\,\sin(z)}{\sin[\sin(z)]} = w_0\,.$$

Nel caso in $k \neq 0$ e nella determinazione principale del numero w_k, abbiamo

$$\begin{aligned}
\sin(w_k) &= k\pi \\
e^{iw_k} - e^{-iw_k} &= 2ik\pi \\
e^{2iw_k} - 2ik\pi e^{iw_k} - 1 &= 0 \\
e^{iw_k^\pm} &= ik\pi \pm \sqrt{-k^2\pi^2+1} \\
w_k^\pm &= -i \ln\left[ik\pi \pm \sqrt{-k^2\pi^2+1}\right] \\
w_k^\pm &= -i \ln\left[i\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\
w_k^\pm &= \frac{\pi}{2} - i\ln\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \;,
\end{aligned}$$

in generale però:

$$\begin{aligned}
w_{n,k}^\pm &= \frac{\pi}{2} + 2n\,\pi - i\ln\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}(4n+1) - i\ln\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \;,
\end{aligned}$$

con $n = 0, \pm1 \pm2, \ldots$. Per $k \geq 1$, l'argomento del logaritmo è sempre positivo, $(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}) > 0$, quindi si ha la rappresentazione cartesiana

$$w_{n,k>0}^\pm = \frac{\pi}{2}(4n+1) - i\ln\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) = \left(w_{n,k>0}^\mp\right)^* \;,$$

l'ultima identità deriva dalla

$$\ln\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) = -\ln\left(k\pi \mp \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \;.$$

Quindi per valori positivi di k i poli $w_{n,k>0}$ sono nel semipiano $\mathrm{Re}(z) > 0$ tutti allineati sulle rette parallele all'asse immaginario di equazioni $\mathrm{Re}(z) = \frac{\pi}{2}(4n+1)$.
Se $k < -1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
w_k^\pm &= -i\ln\left[ik\pi \pm \sqrt{-k^2\pi^2+1}\right] \\
w_k^\pm &= -i\ln\left[(-i)\left(-k\pi \mp \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\
w_{k<0}^\pm &= -\frac{\pi}{2} - i\ln\left(-k\pi \mp \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \;, \quad \text{in generale} \\
w_{n,k<0}^\pm &= \frac{\pi}{2}(4n-1) - i\ln\left(-k\pi \mp \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \;,
\end{aligned}$$

con $(-k\pi \mp \sqrt{k^2\pi^2-1}) > 0$ e $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, quindi la precedente è proprio la rappresentazione cartesiana. I poli $w_{n,k<0}^\pm$ sono tutti nel semipiano $\mathrm{Re}(z) < 0$, allineate lungo le rette $\mathrm{Re}(z) = \frac{\pi}{2}(4n-1)$. Si vede facilmente che le coppie $(\pm)$ $w_{n,k<0}^\pm$ hanno le stesse parti immaginarie delle $w_{-n,-k>0}^\pm$ e pari reali opposte.
Inoltre per ogni valore positivo di k si ha

$$|w_{n,k>0}^+|^2 = |w_{n,k>0}^-|^2 = |w_{-n,-k<0}^+|^2 = |w_{-n,-k<0}^-|^2 = \frac{\pi^2}{4}(4n+1)^2 + \ln^2\left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right) \;.$$

La distanza tra un polo e il successivo sulla stessa retta $\mathrm{Re}(z) = \frac{\pi}{2}(4n \pm 1)$ è data da

$$\Delta^{\pm}_{k>0} = \left| \ln\left((k+1)\pi \pm \sqrt{(k+1)^2\pi^2 - 1}\right) - \ln\left(k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2 - 1}\right) \right| .$$

Nel semicerchio positivo di raggio π cadranno solo i poli con $\mathrm{Im}(z) > 0$ e $n = 0$ cioè: $w^{+}_{0,k>0}$ e $w^{-}_{0,k<0}$. Per calcolare quanti ce ne sono, contiamo per quanti valori di k la condizione

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{4} + \ln^2\left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1}\right) &< \pi^2 \\
\ln\left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1}\right) &< \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \\
k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1} &< e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} \\
(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1})(k\pi - \sqrt{k^2\pi^2 - 1}) &< e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}(k\pi - \sqrt{k^2\pi^2 - 1}) \\
k\pi - \sqrt{k^2\pi^2 - 1} &> e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} \\
k\pi - e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} &> \sqrt{k^2\pi^2 - 1} \\
e^{-\sqrt{3}\pi} - 2k\pi e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} + 1 &> 0 \\
k &< \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}} + e^{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}}{2\pi} = \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2}\right)}{\pi} \simeq 2.4282
\end{aligned}$$

è verificata. Ovviamente si avranno solo le due coppie di valori $k = \pm 1, \pm 2$, quindi all'interno di Γ ci sono i quattro poli

$$\begin{aligned}
w^{-}_{0,1} &= \frac{\pi}{2} - i\ln\left(\pi - \sqrt{\pi^2 - 1}\right) \qquad & w^{+}_{0,-1} &= -\frac{\pi}{2} - i\ln\left(\pi - \sqrt{\pi^2 - 1}\right) \\
w^{-}_{0,2} &= \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2\pi - \sqrt{4\pi^2 - 1}\right) \qquad & w^{+}_{0,-2} &= -\frac{\pi}{2} - i\ln\left(2\pi - \sqrt{4\pi^2 - 1}\right)
\end{aligned} .$$

Per calcolare i residui si ha facilmente che con $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), z = w^{\pm}_{0,k}] = \lim_{z \to w^{\pm}_{0,k}} \frac{z\,\sin(z)}{\sin[\sin(z)]}(z - w^{\pm}_{0,k}) &= \lim_{z \to w^{\pm}_{0,k}} \frac{z\,\sin(z)}{\sin[\sin(z)]}(z - w^{\pm}_{0,k}) \\
&= w^{\pm}_{0,k}\sin(w^{\pm}_{0,k}) \lim_{z \to w^{\pm}_{0,k}} \frac{(z - w^{\pm}_{0,k})}{\sin[\sin(z)]} \\
&= w^{\pm}_{0,k}\sin(w^{\pm}_{0,k}) \lim_{z \to w^{\pm}_{0,k}} \frac{1}{\cos[\sin(z)]\cos(z)} \\
&= \frac{w^{\pm}_{0,k}\sin(w^{\pm}_{0,k})}{\cos(w^{\pm}_{0,k})} \lim_{z \to w^{\pm}_{0,k}} \frac{1}{\cos(k\pi)} \\
&= (-1)^k \frac{w^{\pm}_{0,k}\sin(w^{\pm}_{0,k})}{\cos(w^{\pm}_{0,k})} .
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che

$$
\begin{aligned}
\sin\left(w_{0,k>0,k<0}^{-,+}\right) &= \sin\left[\pm\frac{\pi}{2} - i\ln\left(|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\
&= \pm\cos\left[i\ln\left(|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\
&= \pm\cosh\left[\ln\left(|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\
&= \pm\frac{1}{2}\left[|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1} + \frac{1}{|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}}\right] \\
&= \pm\frac{1}{2}\left[|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1} + |k|\pi + \sqrt{k^2\pi^2-1}\right] \\
&= \pm|k|\pi\,, \\
\cos\left(w_{0,k>0,k<0}^{-,+}\right) &= \cos\left[\pm\frac{\pi}{2} - i\ln\left(|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\
&= \pm\sin\left[i\ln\left(|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\
&= \mp i\sinh\left[\ln\left(|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right)\right] \\
&= \pm\frac{i}{2}\left[|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1} - \frac{1}{|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}}\right] \\
&= \pm\frac{i}{2}\left[|k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1} - |k|\pi - \sqrt{k^2\pi^2-1}\right] \\
&= \mp i\sqrt{k^2\pi^2-1}\,.
\end{aligned}
$$

Quindi i residui sono:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[w_{0,1}^-] &= \left[-\frac{\pi}{2} + i\ln\left(\pi - \sqrt{\pi^2-1}\right)\right]\frac{\pi}{-i\sqrt{\pi^2-1}}\,, \\
\mathrm{Res}[w_{0,2}^-] &= \left[\frac{\pi}{2} - i\ln\left(2\pi - \sqrt{4\pi^2-1}\right)\right]\frac{2\pi}{-i\sqrt{4\pi^2-1}}\,, \\
\mathrm{Res}[w_{0,-1}^+] &= \left[\frac{\pi}{2} + i\ln\left(\pi - \sqrt{\pi^2-1}\right)\right]\frac{-\pi}{i\sqrt{\pi^2-1}}\,, \\
\mathrm{Res}[w_{0,-2}^+] &= \left[-\frac{\pi}{2} - i\ln\left(2\pi - \sqrt{4\pi^2-1}\right)\right]\frac{-2\pi}{i\sqrt{4\pi^2-1}}\,.
\end{aligned}
$$

L'integranda è antisimmetrica, per cui

$$
\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z\sin(z)}{\sin[\sin(z)]}dz = 0\,,
$$

Ne consegue che

$$
\begin{aligned}
S &= 2i\pi\left\{\mathrm{Res}[w_{0,1}^-] + \mathrm{Res}[w_{0,2}^-] + \mathrm{Res}[w_{0,-1}^+] + \mathrm{Res}[w_{0,-2}^+]\right\} \\
&= -4i\pi^2\left\{\frac{\ln\left(\pi - \sqrt{\pi^2-1}\right)}{\sqrt{\pi^2-1}} - \frac{2\ln\left(4\pi - \sqrt{4\pi^2-1}\right)}{\sqrt{4\pi^2-1}}\right\}\,.
\end{aligned}
$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Si consideri l'integrale

$$T(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+1)y} \left[\tanh(y) + 1\right] dy \, .$$

- Per quali valori reali di α l'integrale converge?
- Si ottenga in questi casi l'espressione di $T(\alpha)$.

. . . .

Facciamo subito la sostituzione $z = e^y$, quindi:

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= 2\int_0^{\infty} z^{\alpha} \frac{z}{z + 1/z} dz \\ &= 2\int_0^{\infty} z^{\alpha} \frac{z^2}{z^2+1} dz \, . \end{aligned}$$

In $z = 0$ l'integranda si comporta come

$$\begin{aligned} 2z^{\alpha} \frac{z^2}{z^2+1} &\underset{z\to 0}{\sim} 2z^{\alpha+2} \\ &\Rightarrow \alpha + 2 > -1 \\ &\Rightarrow \alpha > -3 \, . \end{aligned}$$

In $z = \infty$, invece,

$$\begin{aligned} 2z^{\alpha} \frac{z^2}{z^2+1} &\underset{z\to \infty}{\sim} 2z^{\alpha} \\ &\Rightarrow \alpha < -1 \, , \end{aligned}$$

per cui i valori di α per cui si ha convergenza sono:

$$-3 < \alpha < -1 \, .$$

L'integrale può essere risolto con la formula

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x) = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{\text{tot}} \text{Res}\left[x^{\alpha} R(x)\right] \, ,$$

dove la funzione razionale è $x^2/(x^2+1)$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= 2\int_0^{\infty} z^{\alpha} \frac{z^2}{z^2+1} dz = -\frac{2\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{\text{tot}} \text{Res}\left[z^{\alpha}\frac{z^2}{z^2+1}\right] \\ &= -\frac{2\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \left[i^{\alpha}\frac{-1}{2i} + (-i)^{\alpha}\frac{-1}{-2i}\right] = \frac{2\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \left(\frac{e^{i\pi\alpha/2}}{2i} - \frac{e^{3i\pi\alpha/2}}{2i}\right) \\ &= \frac{2\pi}{\sin(\pi\alpha)} \left(\frac{e^{-i\pi\alpha/2} - e^{i\pi\alpha/2}}{2i}\right) = -\frac{2\pi\sin(\pi\alpha/2)}{\sin(\pi\alpha)} = -\frac{\pi}{\cos(\pi\alpha/2)} \, . \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Per quali valori di z la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{1+k-k^3}$$

Converge? Assumendo l'uniforme convergenza e detta $f(z)$ la somma della serie, si calcolino i coefficienti della serie di Laurent di $f(z)$ in $z=0$.

. . . .

Riscriviamo la serie nella forma

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k w^{-1-k+k^3} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \,,$$

con

$$w = \frac{1}{z}\,, \qquad a_n = \begin{cases} (-1)^k & n = -1-k+k^3 > 0\,, \quad k = 2,3,\dots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} .$$

Il raggio di convergenza è:

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1\,,$$

ovvero, la serie converge per

$$|w| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| > 1\,.$$

La funzione $f(z)$ è definita come

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k z^{1+k-k^3}\,,$$

è analitica per $|z| > 1$. I coefficienti di Laurent in $z=0$ sono

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\,,$$

con $R > 1$. Usando la definizione di $f(z)$ e l'uniforme convergenza si ha

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \oint_{|z|=R}\frac{dz}{z^{n-k+k^3}}\,,$$

per ogni n l'unico integrale non nullo della somma è quello per cui

$$n - k + k^3 = 1\,,$$

in questo caso l'integrale vale 1. Quindi i coefficienti sono

$$c_n = \begin{cases} (-1)^k & n = 1+k-k^3\,, \quad k = 2,3,\dots \\ \\ 0 & \text{per ogni altro valore di } n \end{cases} .$$

Avremo:

$$
\begin{array}{lll}
 & & c_{\infty} = \cdots = c_{-3} = c_{-4} = 0 \\
k = 2 & \to & c_{-5} = 1 \\
 & & c_{-6} = \cdots = c_{-22} = 0 \\
k = 3 & \to & c_{-23} = -1 \\
 & & c_{-24} = \cdots = c_{-58} = 0 \\
k = 4 & \to & c_{-59} = 1 \\
\cdots & & \cdots
\end{array} .
$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$
f(x) = \begin{cases} xe^{-\alpha x^2} + e^{-\beta|x|} & x > 0 \\ \\ xe^{-\alpha x^2} - e^{-\beta|x|} & x < 0 \end{cases} ,
$$

con α e β reali e positivi.

. . . .

In generale sappiamo calcolare le trasformate di Fourier delle funzioni $g(x) = e^{-\alpha x^2}$ e $h(x) = e^{-\beta|x|}$ e si hanno

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{e^{-k^2/4\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x\sqrt{\alpha} + ik/2\sqrt{\alpha}\right)^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-k^2/4\alpha} , \\
\mathcal{F}_k[h(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|x|} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(\beta - ik)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(\beta + ik)x} dx \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\beta - ik} + \frac{1}{\beta + ik} \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + k^2} .
\end{aligned}
$$

Inoltre vale la relazione

$$
\mathcal{F}_k \left[\frac{dg}{dx} \right] = ik \mathcal{F}_k \left[g \right] .
$$

Per cui, osservando che $f(x)$ può essere espressa in termini delle derivate delle funzioni $g(x)$ e $h(x)$ come

$$
f(x) = -\frac{1}{2\alpha} \frac{dg}{dx} - \frac{1}{\beta} \frac{dh}{dx} ,
$$

la trasformata di Fourier sarà

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[f(x)] &= -ik\left(\frac{1}{2\alpha}\mathcal{F}_k\left[g\right]+\frac{1}{\beta}\mathcal{F}_k\left[h\right]\right)\\ &= -ik\left(\frac{1}{\sqrt{(2\alpha)^3}}\,e^{-k^2/4\alpha}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\beta^2+k^2}\right).\end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Siano $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ gli operatori di "distruzione" e "creazione" definiti dalle loro azioni su una base ortonormale $\{|k\rangle\}$ dello spazio di Hilbert H

$$\begin{aligned}\hat{a}|k\rangle &= \sqrt{k}\,|k-1\rangle\,,\\ \hat{a}^\dagger|k\rangle &= \sqrt{k+1}\,|k+1\rangle\,.\end{aligned}$$

- Si determini la rappresentazione matriciale, infinito-dimensionale, rispetto alla suddetta base $\{|k\rangle\}$, dell'operatore

$$\hat{S}=\left(1+\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^{-1/2}\hat{a}\,.$$

- Considerando un generico vettore $|v\rangle\in H$ e la sua decomposizione

$$|v\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle k|v\rangle|k\rangle\,,$$

  si dimostri che $\hat{S}^\dagger$ è isometrico ma non unitario.

. . . .

Consideriamo l'operatore $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ e la sua azione sui vettori della base

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}|k\rangle=\sqrt{k}\,\hat{a}^\dagger|k-1\rangle=k\,|k\rangle\,,$$

il vettore $|k\rangle$ della base è autovettore di $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ con autovalore k. Detta $f(x)$ la funzione

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,,$$

si ha che l'operatore funzionale $\hat{f}(\hat{a}^\dagger\hat{a})$ avrà lo stesso set di autovettori con

$$\hat{f}(\hat{a}^\dagger\hat{a})|k\rangle=f(k)|k\rangle\,.$$

L'azione di $\hat{S}$ sui vettori della base è quindi

$$\begin{aligned}\hat{S}|k\rangle &= \hat{f}(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a}|k\rangle\\ &= \sqrt{k}\,\hat{f}(\hat{a}^\dagger\hat{a})|k-1\rangle\\ &= \sqrt{k}\frac{1}{\sqrt{1+k-1}}|k-1\rangle=|k-1\rangle\,.\end{aligned}$$

Gli elementi della matrice che rappresenta $\hat{S}$ sono

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \langle i|\hat{S}|j\rangle \\ &= \langle i|j-1\rangle \\ &= \delta_{i,j-1} \quad \Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Per ciò che riguarda $\hat{S}^\dagger$ si ha

$$\hat{S}^\dagger = \hat{a}^\dagger \left(1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}\right)^{-1/2} ,$$

così

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger|k\rangle &= \hat{a}^\dagger \hat{f}(\hat{a}^\dagger \hat{a})|k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+k}}\hat{a}^\dagger|k\rangle = |k+1\rangle . \end{aligned}$$

Consideriamo il prodotto scalare di $|v\rangle$ per se stesso ovvero la sua norma la quadrato

$$||v||^2 = \langle v|v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 , \qquad v_k = \langle k|v\rangle .$$

Per il vettore $|v'\rangle = \hat{S}^\dagger|v\rangle$ si ha

$$\begin{aligned} |v'\rangle &= \hat{S}^\dagger \sum_{k=1}^{\infty} v_k|k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k|k+1\rangle , \end{aligned}$$

per cui la norma al quadrato sarà

$$||v'||^2 = \langle v'|v'\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 ,$$

coincide con quella di $|v\rangle$. Per verificare che $\hat{S}^\dagger$ non è unitario possiamo considerare la sua rappresentazione matriciale

$$S^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} ,$$

e quindi il prodotto $S^\dagger S$ non coincide con la matrice identità

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \neq I$$

. . . .

Esercizio 6 (7 punti)
Siano A e B due matrici complesse 3×3 che ammettono i tre vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

come autovettori comuni e inoltre

$$\begin{array}{lll} \det(A) = 1\,, & \mathrm{Tr}(A) = 0\,, & A\,u_1 = u_1\,, \\ \det(B) = 2\,, & \mathrm{Tr}(B) = 1\,, & B\,u_1 = u_1\,. \end{array}$$

- Determinare le matrici A e B.
- Classificarle e calcolare A^{3n}, con $n \in \mathbb{N}$.
- Calcolare il commutatore $[A, B]$.

. . . .

Partiamo da A e indichiamo con α_i $(i = 1, 2, 3)$ gli autovalori si ha:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_3 = 1/\alpha_2 \\ \alpha_2^2+\alpha_2+1 = 0 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \alpha_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{array}.$$

Per B, indicando con β_i $(i = 1, 2, 3)$ gli autovalori, si ha:

$$\begin{array}{l} \beta_1 = 1 \\ \beta_1\beta_2\beta_3 = 2 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 1 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{l} \beta_1 = 1 \\ \beta_3 = 2/\beta_2 \\ \beta_2^2+2 = 0 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{l} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = +i\sqrt{2} \\ \beta_3 = -i\sqrt{2} \end{array}.$$

Quindi le versioni diagonali della matrici sono:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La diagonalizzazione si ottiene come

$$A' = U^\dagger A U\,, \qquad B' = U^\dagger B U\,,$$

dove U è la matrice unitaria che si ottiene disponendo sulle colonne gli autovettori normalizzati

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Per la matrice A si ottiene come:

$$A = UA'U^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1-i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & i\sqrt{3}/2 \\ 0 & i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Per la matrice B si ha invece:

$$B = UB'U^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & i \\ 0 & -i & i \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che le matrici non sono hermitiane. Per verificare che siano normali calcoliamo i commutatori

$$[A, A^\dagger], \qquad [B, B^\dagger].$$

Si hanno per A

$$AA^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & i\sqrt{3}/2 \\ 0 & i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -i\sqrt{3}/2 \\ 0 & -i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^\dagger A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -i\sqrt{3}/2 \\ 0 & -i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & i\sqrt{3}/2 \\ 0 & i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi A è **unitaria** e, ovviamente, normale.

Per la matrice B abbiamo:

$$
\begin{aligned}
BB^\dagger &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
B^\dagger B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

B è **normale**.
Ovviamente il commutatore $[A, B]$ è nullo, infatti:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & i\sqrt{3}/2 \\ 0 & i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3/2} & -i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & -\sqrt{3/2} \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & i\sqrt{3}/2 \\ 0 & i\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3/2} & -i/\sqrt{2} \\ 0 & -i/\sqrt{2} & -\sqrt{3/2} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$