Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 21 gennaio 2014

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)

Si calcoli l'integrale

$$S = \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\cosh(a\,x)} dx\,,$$

con $a > 0$.

Soluzione 1

L'integranda è simmetrica quindi

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{\cosh(a\,x)} dx\,.$$

Definiamo il percorso rettangolare Γ_R come

$$\Gamma_R = L(-R,R) \cup L(R,R+i\pi/a) \cup L(R+i\pi/a,-R+i\pi/a) \cup L(-R+i\pi/a,-R)\,,$$

dove $L(z_1,z_2)$ indica il segmento $\overline{z_1 z_2}$, orientato da z_1 a z_2. L'integrale su Γ_R è dato dal residuo dell'unica singolarità interna, ovvero

$$S_{\Gamma_R} = \oint_{\Gamma_R} \frac{\cos(z)}{\cosh(a\,z)} dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[z = i\pi/(2a)\right]\,.$$

Questa identità vale anche nel limite $R \to \infty$. Poiché $z = i\pi/(2a)$ è un polo semplice si ha

$$\mathrm{Res}\left[z = i\pi/(2a)\right] = \lim_{z\to i\pi/2} \frac{\cos(z)}{\cosh(a\,z)}(z - i\pi/(2a)) = -i\frac{\cosh(\pi/(2a))}{a}\,.$$

L'integrale nel limite $R \to \infty$ ha solo i contributi sui tratti orizzontali $L(-R,R)$ e $L(R+i\pi/a,-R+i\pi/a)$, diventa quindi

$$\begin{aligned}
S_{\Gamma_R} &= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{\cosh(a\,x)} dx + \int_{R}^{-R} \frac{\cos(x+i\pi/a)}{\cosh(a\,x+i\pi)} dx \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{\cosh(a\,x)} dx + \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x+i\pi/a)}{\cosh(a\,x)} dx \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{\cosh(a\,x)} dx + \cos(i\pi/a)\int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{\cosh(a\,x)} dx - \sin(i\pi/a)\int_{-R}^{R} \frac{\sin(x)}{\cosh(a\,x)} dx \\
&= \left[1+\cosh(\pi/a)\right]\int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{\cosh(a\,x)} dx\,,
\end{aligned}$$

l'ultima identità segue dal fatto che l'integranda con il seno è dispari. Nel limite $R \to \infty$ si ottiene

$$\lim_{R\to\infty} S_{\Gamma_R} = \left[1+\cosh(\pi/a)\right]\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{\cosh(a\,x)} dx = 2\left[1+\cosh(\pi/a)\right] S\,.$$

Il valore di S_{Γ_R} è noto in termini del residuo in $z = i\pi/a$ e si ha

$$\lim_{R\to\infty} S_{\Gamma_R} = 2\pi \frac{\cosh(\pi/(2a))}{a} = 2\big[1+\cosh(\pi/a)\big] S\,,$$

da cui

$$S = \frac{\pi \cosh(\pi/(2a))}{a\big[1+\cosh(\pi/a)\big]} = \frac{\pi}{2a\cosh(\pi/(2a))}\,.$$

Esercizio 2 (6 punti)

Dato l'integrale in valore principale

$$T(\beta) = \mathrm{PV}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^4-1}dx\,,$$

con $\beta \in \mathbb{C}$, si studino le condizioni di convergenza e si calcoli l'integrale.

Soluzione 2

Affinché l'integrale converga è necessario che β sia un immaginario puro, ovvero $\beta = i\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. L'integranda ha quattro poli semplici

$$z_k = e^{2ik\pi/4}\,, \qquad k = 0,1,2,3\,,$$

$z_0 = 1$ e $z_2 = -1$ appartengono all'asse reale e su di essi è necessario considerare il valore principale. Assumendo $\alpha > 0$ e applicando il Lemma di Jordan nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$ si ha

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= 2i\pi\mathrm{Res}\left[z = e^{i\pi/2}\right] - \int_{-\gamma_{+1}} \frac{e^{i\alpha z}}{z^4-1}dz - \int_{-\gamma_{-1}} \frac{e^{i\alpha z}}{z^4-1}dz \\ &= 2i\pi\mathrm{Res}\left[z = e^{i\pi/2}\right] + \int_{\gamma_{+1}} \frac{e^{i\alpha z}}{z^4-1}dz + \int_{\gamma_{-1}} \frac{e^{i\alpha z}}{z^4-1}dz\,, \end{aligned}$$

dove $\gamma_{\pm 1}$ è una semicirconferenza di raggio infinitesimo centrata in $x = \pm 1$ e immersa nel semipiano superiore. Usando i lemmi per l'integrazione sugli archi infinitesimi si ottiene

$$\int_{\gamma_{\pm 1}} \frac{e^{i\alpha z}}{z^4-1}dz = \pm\frac{i\pi}{4}e^{\pm i\alpha}\,.$$

Il residuo è in $z = e^{i\pi/2}$

$$\mathrm{Res}\left[z = e^{i\pi/2}\right] = \lim_{z\to i} \frac{e^{i\alpha z}}{z^4-1}(z-i) = \frac{i}{4}e^{-\alpha}\,.$$

Si ottiene la soluzione come

$$T(\alpha) = -\frac{\pi}{2}e^{-\alpha} + \frac{i\pi}{4}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = -\frac{\pi}{2}\left[e^{-\alpha} + \sin(\alpha)\right]\,.$$

Il caso $\alpha < 0$ è riconducibile al precedente con la sostituzione $w = -x$, infatti

$$T(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^4-1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha w}}{w^4-1}dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|\alpha| w}}{w^4-1}dw = -\frac{\pi}{2}\left[e^{-|\alpha|} + \sin(|\alpha|)\right]\,,$$

che rappresenta quindi il risultato generale, anche per $\alpha = 0$.

Esercizio 3 (5 punti)

Si scriva lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen}(z)\cosh(z)}\,.$$

Soluzione 3

La funzione è meromorfa ed ha due serie disgiunte di poli semplici $\{x_k = k\pi\}_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}$ e $\{z_j = (2j+1)i\pi/2\}_{j\in\mathbb{Z}}$, entrambe si accumulano ad infinito. I residui sono

$$\begin{aligned} R_k &= \lim_{z\to x_k} \frac{z}{\operatorname{sen}(z)\cosh(z)}(z-x_k) = \frac{k\pi}{\cosh(k\pi)}(-1)^k\,, \\ T_j &= \lim_{z\to z_j} \frac{z}{\operatorname{sen}(z)\cosh(z)}(z-z_j) = \frac{(2j+1)i\pi/2}{\operatorname{senh}((2j+1)\pi/2)}(-1)^{j+1}\,. \end{aligned}$$

Si hanno, inoltre, le seguenti relazioni tra poli e residui con indici diversi

$$R_{-k} = -R_k\,, \qquad x_{-k} = -x_k\,, \qquad\quad T_{-j} = -T_{j-1}\,, \qquad z_{-j} = -z_{j-1}\,.$$

Il comportamento asintotico è

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0\,,$$

quindi lo sviluppo di Mittag-Leffler ha la forma

$$f(z) = \sum_l F_l(z)\,,$$

dove le $F_l(z)$ sono le parti principali delle serie di Laurent in ciascun polo. Tali parti principali hanno un solo termine essendo i poli tutti semplici. In definitiva si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{R_k}{z-z_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{z-x_k} + \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{T_j}{z-z_j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{z-z_j} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} R_k\left(\frac{1}{z-x_k} - \frac{1}{z+x_k}\right) + \sum_{j=0}^{\infty} T_j\left(\frac{1}{z-z_j} - \frac{1}{z+z_j}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} R_k \frac{2x_k}{z^2-x_k^2} + \sum_{j=0}^{\infty} T_j \frac{2z_j}{z^2-z_j^2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 4 (4 punti)

Si sviluppi in serie di Laurent, di centro $z=0$, la funzione

$$h(z) = \frac{1}{(1-z^3)(z^2+4)}\,,$$

in tutti i possibili cerchi e corone circolari centrati nell'origine.

SOLUZIONE 4

Le singolarità della funzione sono i cinque poli semplici:

$$z_1 = 1\,, \quad z_2 = e^{2i\pi/3}\,, \quad z_3 = e^{4i\pi/3}\,, \quad z_4 = -2i\,, \quad z_5 = 2i\,.$$

Si identificano un cerchio di raggio unitario, $|z| < 1$ e due corone circolari: $1 < |z| < 2$ e $|z| > 2$. In tutti e tre questi casi si può usare la serie geometrica. Infatti con $|z| < 1$, il primo fattore ha la forma della somma di una serie geometrica di ragione z^3, convergente poiché $|z^3| = |z|^3 < 1$. Per il secondo fattore si ha

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+(z/2)^2} = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (z/2)^{2j}\,,$$

anche questa serie converge, infatti:

$$\left|\frac{z}{2}\right| < \frac{1}{2} < 1\,.$$

Ovvero avremo

$$h(z) = \frac{1}{(1-z^3)(z^2+4)} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} z^{3k} \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (z/2)^{2j}\,.$$

Se, invece $1 < |z| < 2$, il precedente argomento per il secondo fattore è ancora valido, mentre per il primo

$$\frac{1}{1-z^3} = -\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-1/z^3} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-3k-3} = -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^{3k}\,,$$

che converge poiché: $1/2 < 1/|z| < 1$, quindi

$$h(z) = -\frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{-1} z^{3k} \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (z/2)^{2j}\,.$$

Infine, se $|z| > 2$, usiamo il precedente risultato per il primo fattore, per il secondo invece

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+(2/z)^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j (2/z)^{2j} = \frac{1}{4}\sum_{j=-\infty}^{-1}(-1)^{j+1}(z/2)^{2j}\,,$$

per cui

$$h(z) = -\frac{1}{4}\sum_{k=-\infty}^{-1} z^{3k} \sum_{j=-\infty}^{-1}(-1)^{j+1}(z/2)^{2j}\,.$$

ESERCIZIO 5 (6 PUNTI)

Si risolva l'equazione differenziale

$$\frac{d\phi}{dt} = [O, \phi]\,,$$

dove $\phi(t)$ è una funzione matriciale

$$\phi(t) = \vec{f}(t)\cdot\vec{\sigma}\,,$$

$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ è il vettore delle matrici di Pauli ed O è la matrice

$$O = \alpha\,\sigma_2\,, \qquad \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

Si usi la condizione al contorno

$$\phi(0) = \sigma_1\,.$$

Soluzione 5

Sfruttiamo l'algebra della matrici di Pauli

$$[\sigma_m, \sigma_n] = 2i\epsilon_{mnl}\sigma_l\,, \qquad m,n,l \in \{1,2,3\}\,,$$

per riscrivere il commutatore e quindi l'equazione come

$$\frac{d\phi}{dt} = \alpha[\sigma_2, f_k(t)\sigma_k] \;=\; 2i\alpha\big(f_3(t)\sigma_1 - f_1(t)\sigma_3\big)\,.$$

In forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \dot f_3 & \dot f_1 - i\dot f_2 \\ \dot f_1 + i\dot f_2 & -\dot f_3 \end{pmatrix} \;=\; 2i\alpha \begin{pmatrix} -f_1 & f_3 \\ f_3 & f_1 \end{pmatrix}\,.$$

Si ottengono tre equazioni scalari indipendenti dalle quali è possibile ricavare le componenti della funzione $\vec f(t)$

$$\begin{cases} \dot f_3 &=& -2i\alpha f_1 \\ \dot f_1 - i\dot f_2 &=& 2i\alpha f_3 \\ \dot f_1 + i\dot f_2 &=& 2i\alpha f_3 \end{cases} \;\Longrightarrow\; \begin{cases} \dot f_3 &=& -2i\alpha f_1 \\ \dot f_1 &=& 2i\alpha f_3 \\ f_2 &=& C = \text{cost.} \end{cases} \;\Longrightarrow\; \begin{cases} \ddot f_3 &=& 4\alpha^2 f_3 \\ \dot f_1 &=& 2i\alpha f_3 \\ f_2 &=& C = \text{cost.} \end{cases}\,.$$

La seconda componente è costante, la terza si determina come soluzione di una equazione di secondo ordine e f_1 si calcola in termini della derivata prima di f_3. In particolare, si ha

$$f_3(t) = Ae^{2\alpha t} + Be^{-2\alpha t}\,, \qquad f_1(t) = \frac{i}{2\alpha}\dot f_3(t) = i\left(Ae^{2\alpha t} - Be^{-2\alpha t}\right)\,.$$

Le costanti A, B e C si determinano sfruttando la condizione al contorno

$$\begin{pmatrix} f_3(0) & f_1(0) - if_2(0) \\ f_1(0) + if_2(0) & -f_3(0) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} A+B & i(A-B) - iC \\ i(A-B) + iC & -A-B \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Si ottengono i seguenti valori

$$A = -i/2\,, \qquad B = i/2\,, \qquad C = 0\,.$$

Infine, la funzione vettoriale $\vec f(t)$, soluzione dell'equazione differenziale, è

$$\vec f(t) = \Big(\cosh(2\alpha t), 0, -i\,\mathrm{senh}(2\alpha t)\Big)\,.$$

Esercizio 6 (6 punti)

Data la matrice

$$G(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

con $a,b,c \in \mathbb{R}$, si stabilisca se è diagonalizzabile e si determinino autovalori e autovettori. Calcolare, inoltre, la matrice

$$H(a,b,c,t) = \exp\left[t(G(a,b,c) - I)\right]\,,$$

dove I è la matrice identità 3×3 e studiare la possibilità di scrivere tale matrice $H(a,b,c,t)$ come $G(\alpha,\beta,\gamma)$ con α, β e γ da determinare in termini di a, b, c e t.

Soluzione 6

Si ha un solo autovalore $\lambda = 1$ con autovettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché si hanno due autovettori nulli, la molteplicità geometrica dell'unico autovalore è pari ad uno, mentre quella algebrica è tre, ne consegue che $G(a, b, c)$ non è diagonalizzabile.
La matrice ad esponente dell'espressione di $H(a, b, c)$ è:

$$T \equiv G(a, b, c) - I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È facile verificare che l'unica potenza intera di T, maggiore di uno, diversa dalla matrice nulla è

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tutte le altre potenze T^m, con $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 3$, sono nulle, cioè

$$T^2 T = T^3 = T^4 = \ldots = T^m = \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'esponenziale che definisce $H(a, b, c, t)$ può essere sviluppato in serie, la serie contiene solo i primi tre termini a causa dell'annullamento delle potenze di T dalla terza in poi, si ha quindi la soluzione

$$\exp[tT] \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k T^k}{k!} = I + tT + \frac{t^2}{2} T^2 = \begin{pmatrix} 1 & at & bt + act^2/2 \\ 0 & 1 & ct \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G(at, bt + act^2/2, ct).$$