Metodi Matematici per la Fisica

Secondo appello invernale - 21 febbraio 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli che l'integrale

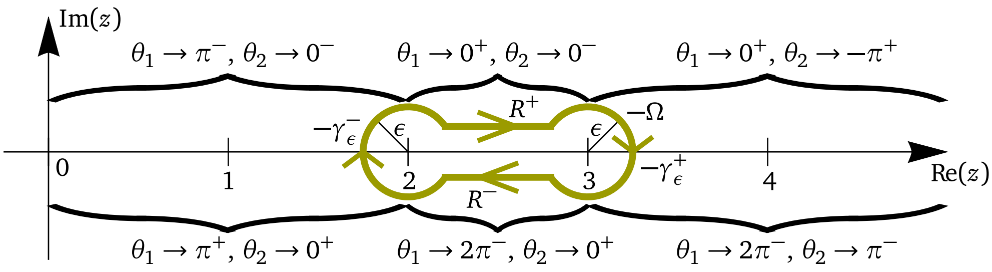
$$\text{⌘} = \int_2^3 \frac{\sqrt{5x - x^2 - 6}}{x^3} dx\,.$$

Soluzione del primo problema

La funzione integranda, che scriviamo nella variabile z in vista di un'integrazione nel piano complesso,

$$f(z) = \frac{\sqrt{5z - z^2 - 6}}{z^3}$$

è polidroma a causa della radice quadrata. I punti di diramazione, ovvero gli zeri dell'argomento della stessa radice quadrata sono $z_1 = 2$ e $z_2 = 3$, sono anche gli estremi del segmento reale che rappresenta il percorso d'integrazione.



Fattorizziamo il polinomio di secondo grado nel prodotto di due binomi come

$$5z - z^2 - 6 = (z-2)(3-z) \equiv f_1(z) f_2(z)\,,$$

con $f_1(z) = z - 2$ e $f_2(z) = 3 - z$. Definiamo le fasi di queste funzioni in modo tale the la regione di discontinuità coincida con il percorso d'integrazione. Possiamo scegliere per entrambe le funzione $\sqrt{f_1(z)}$ e $\sqrt{f_2(z)}$ dei tagli in avanti, quindi, tenendo conto del segno con cui la variabile z compare nelle loro definizioni, si hanno

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z - 2 = |z-2| e^{\theta_1}\,, & \theta_1 &\in (0, 2\pi)\,,\\ f_2(z) &= 3 - z = |3-z| e^{\theta_2}\,, & \theta_2 &\in (-\pi, \pi)\,. \end{aligned}$$

In figura sono indicati i valori delle fasi sopra e sotto il semiasse reale positivo nei tre intervalli $[0,2)$, $[2,3)$ e $[3,\infty)$. Consideriamo il percorso chiuso Ω mostrato in figura in verde, che avvolge il segmento reale $[2,3]$. È composto da due tratti rettilinei

$$R_\eta^+ = [2+i\eta, 3+i\eta], \qquad R_\eta^- = [2-i\eta, 3-i\eta],$$

paralleli all'asse reale giacenti, rispettivamente, sopra e sotto a esso alla stessa distanza η e due archi

$$\gamma_\epsilon^+ = \left\{z : z = 3+\epsilon e^{i\theta}, \theta \in (-\pi+\epsilon, 2\pi-\epsilon)\right\}, \qquad \gamma_\epsilon^- = \left\{z : z = 2+\epsilon e^{i\theta}, \theta \in (\epsilon, 2\pi-\epsilon)\right\},$$

centrati nei punti di diramazione $z_1 = 2$ e $z_2 = 3$, percorsi in senso orario, ovvero orientati negativamente. La funzione integranda nella porzione di piano complesso esterna al percorso chiuso Ω, quindi avvolta del percorso chiuso $-\Omega$, ha un polo di ordine tre nell'origine e una possibile singolarità all'infinito. Quindi, usando il teorema dei residui,

$$\oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3} dz = 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3}, \infty\right]\right),$$

$\forall\, \eta, \epsilon$ tali che $n(0,\Omega) = 0$, cioè per valori di η ed ϵ sufficientemente piccoli da far sì che l'origine non venga avvolta del percorso Ω. Ciò è vero nei limiti $\eta\epsilon \to 0^+$, che vogliamo considerare, per cui si ha

$$\lim_{\eta\to 0^+}\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3} dz = 2i\pi \left(\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3}, \infty\right]\right).$$

Verifichiamo che la funzione integranda non ha una singolarità all'infinito, ovvero che il residuo all'infinito è nullo. Infatti

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3}, \infty\right] = -\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{5/w-1/w^2-6}}{1/w^3}\frac{1}{w^2}, 0\right] = -\operatorname{Res}\left[\sqrt{5w-1-6w^2}, 0\right] = 0,$$

segue dal fatto che la funzione $\sqrt{5w-1-6w^2}$ non ha singolarità nell'origine. Il valore limite dell'integrale è

$$\lim_{\eta\to 0^+}\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3} dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3}, 0\right].$$

In termini dei contributi sulle componenti del percorso chiuso Ω

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to 0^+}\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3} dz = {} & \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\gamma_\epsilon^-} \frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3} dz + \int_{-\gamma_\epsilon^+} \frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3} dz\right) \\ & + \lim_{\eta\to 0^+}\left(\int_{R_\eta^-} \frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3} dz + \int_{R_\eta^+} \frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3} dz\right).\end{aligned}$$

I primi due termini del secondo membro sono nulli, infatti, usando la disuguaglianza di Darboux,

$$\begin{aligned} 0 \le \left|\int_{-\gamma_\epsilon^-} \frac{\sqrt{(z-2)(3-z)}}{z^3} dz\right| \le \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \frac{\left|\sqrt{\epsilon e^{i\theta}\left(1-\epsilon e^{i\theta}\right)}\right|}{\left|2+\epsilon e^{i\theta}\right|^3}\epsilon d\theta & \le \int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}\,(1+\epsilon/2)}{|2-\epsilon|^3}\epsilon d\theta \\ & = \frac{(2+\epsilon)(\pi-\epsilon)}{|2-\epsilon|^3}\epsilon^{3/2} \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0; \\ 0 \le \left|\int_{-\gamma_\epsilon^+} \frac{\sqrt{(z-2)(3-z)}}{z^3} dz\right| \le \int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{\left|\sqrt{\left(1+\epsilon e^{i\theta}\right)\left(-\epsilon e^{i\theta}\right)}\right|}{\left|3+\epsilon e^{i\theta}\right|^3}\epsilon d\theta & \le \int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} \frac{\sqrt{\epsilon}\,(1+\epsilon/2)}{|3-\epsilon|^3}\epsilon d\theta \\ & = \frac{(2+\epsilon)(\pi-\epsilon)}{|3-\epsilon|^3}\epsilon^{3/2} \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Consideriamo gli integrali sui tratti rettilinei R_η^+ e R_η^-, nel limite $\eta \to 0^+$. Si ha $z = x \pm i\eta$, inoltre, il polinomio di secondo grado, argomento della radice può essere scritto come $5z-z^2-6 = (z-2)(3-z) = |z-2||3-z|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ e rispettivamente su R_η^+ e R_η^-, vale

$$\begin{aligned} R_\eta^+ : \quad & \sqrt{5z-z^2-6} = \sqrt{(x-2)(3-x)e^{i(0^+ + 0^-)}} = \sqrt{(x-2)(3-x)} = \sqrt{5x-x^2-6}; \\ R_\eta^- : \quad & \sqrt{5z-z^2-6} = \sqrt{(x-2)(3-x)e^{i(2\pi^- + 0^+)}} = \sqrt{(x-2)(3-x)}e^{i\pi} = -\sqrt{5x-x^2-6}. \end{aligned}$$

Alla luce di questi risultati l'integrale su $-\Omega$ nei limiti $\epsilon,\eta\to 0^+$ è pari a due volte l'integrale richiesto, cioè

$$\lim_{\eta\to 0^+}\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{-\Omega}\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3}dz=2⌘,$$

usando l'espressione dello stesso integrale in termini del residuo nell'origine si ha

$$⌘=i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3},0\right].$$

Il residuo del polo triplo si ottiene come derivata seconda valutata nell'origine della funzione integranda moltiplicata per $z^3/2!$, ovvero

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3},0\right]&=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\sqrt{5z-z^2-6}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{2!}\frac{d}{dz}\frac{5-2z}{2\sqrt{5z-z^2-6}}\bigg|_{z=0}\\&=\frac{1}{4}\frac{-2\sqrt{5z-z^2-6}-(5-2z)^2/\left(2\sqrt{5z-z^2-6}\right)}{5z-z^2-6}\bigg|_{z=0}\\&=\frac{1}{8}\frac{-1}{(5z-z^2-6)^{3/2}}\bigg|_{z=0}=\frac{1}{8}\frac{-1}{(|z-2||3-z|)^{3/2}e^{3i(\theta_1+\theta_2)/2}}\bigg|_{z=0},\end{aligned}$$

i valori delle fasi nell'origine sono: $\theta_1=\pi$ e $\theta_2=0$, ne consegue

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\sqrt{5z-z^2-6}}{z^3},0\right]=\frac{1}{8}\frac{-1}{6^{3/2}e^{3i\pi/2}}=\frac{1}{8}\frac{-1}{6^{3/2}(-i)}=\frac{-i}{48\sqrt{6}}.$$

In definitiva si ha

$$⌘=\frac{\pi}{48\sqrt{6}}.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver ottenuto il dominio di convergenza dell'integrale nel piano complesso z, si dimostri la seguente identità

$$\int_0^\infty\sum_{j=1}^n\frac{t^z}{(t+1)^j}dt=\frac{(-1)^n\pi}{(z-n)\beta(n,z-n)\,\mathrm{sen}(z\pi)},\qquad\forall\,n\in N.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è polidroma, in virtù della presenza della potenza t^z. Possiamo sommare usando la procedura di somma della serie geometrica, si ha

$$\sum_{j=1}^n\frac{t^z}{(t+1)^j}\equiv t^zR(t),$$

dove $R(t)$ è la funzione razionale

$$R(t)=\sum_{j=1}^n\frac{1}{(t+1)^j}=\frac{1}{t+1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(t+1)^j}=\frac{1}{t+1}\frac{1-1/(t+1)^n}{1-1/(t+1)}=\frac{(t+1)^n-1}{t(t+1)^n}.$$

La funzione $R(t)$ ha un polo di ordine n in $t=-1$ e una singolarità eliminabile nell'origine, infatti

$$\lim_{t\to 0}R(t)=\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)^n-1}{t(t+1)^n}=\lim_{t\to 0}\frac{n(t+1)^{n-1}}{nt(t+1)^{n-1}+(t+1)^n}=n.$$

Il comportamento in $t=0$ e $t\to\infty$, estremi d'integrazione è

$$\begin{aligned}R(t)&=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(t+1)^n}=\mathcal{O}(1)\qquad t\to 0^+,\\R(t)&=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(t+1)^n}=\mathcal{O}(1/t)\qquad t\to\infty,\end{aligned}$$

ne consegue che

$$R(t) \underset{t\to 0^+}{\propto} t^0\,, \qquad R(t) \underset{t\to\infty}{\propto} t^{-1}$$

e quindi la condizione di convergenza è

$$-1-0 < \mathrm{Re}(z) < -1-(-1) \qquad \Rightarrow \qquad -1 < \mathrm{Re}(z) < 0\,.$$

Applicando la formula nota per la soluzione di integrali di funzioni polidrome

$$\int_0^\infty x^\alpha Q(x)dx = -\frac{\pi e^{-i\alpha\pi}}{\mathrm{sen}(\alpha\pi)}\sum_{k=1}^N \mathrm{Res}\left[z^\alpha Q(z), z_k\right]\,,$$

dove $\{z_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme dei poli della funzione razionale $Q(z)$ ed e tale che $\{z_k\}_{k=1}^N \cap [0,\infty) = \varnothing$, ovvero non ci sono poli sul semiasse reale positivo.
Nel caso in esame, si ha, $\forall\, z$, tale che $\mathrm{Re}(z) \in (-1,0)$,

$$\int_0^\infty t^z R(t)dt = -\frac{\pi e^{-iz\pi}}{\mathrm{sen}(z\pi)}\mathrm{Res}\left[t^z R(t), -1\right]\,.$$

Calcoliamo il residuo nel polo di ordine n in $t=-1$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[t^z R(t),-1\right] &= \mathrm{Res}\left[t^z\frac{(t+1)^n-1}{t(t+1)^n},-1\right] = \mathrm{Res}\left[t^{z-1}\frac{(t+1)^n-1}{(t+1)^n},-1\right]\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t^{z-1}\left[(t+1)^n-1\right]\Big|_{-1}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{d^j}{dt^j}t^{z-1}\,\frac{d^{n-1-j}}{dt^{n-1-j}}\left[(t+1)^n-1\right]\Big|_{-1}\,,
\end{aligned}$$

l'unica derivata del polinomio $[(t+1)^n-1]$ diversa da zero in $t=-1$ è la derivata zero, ovvero il polinomio stesso, quindi la somma precedente ha solo il termine con $j=n-1$ diverso dallo zero, cioè

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[t^z R(t),-1\right] &= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{d^j}{dt^j}t^{z-1}\,\frac{d^{n-1-j}}{dt^{n-1-j}}\left[(t+1)^n-1\right]\Big|_{-1}\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}t^{z-1}\Big|_{-1}(-1)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1)(-1)^{z-n}(-1)\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n+1)}(-1)^{z-n-1}\,.
\end{aligned}$$

Il rapporto di funzioni gamma si ottiene poiché, in virtù dell'equazione di ricorrenza, si ha

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)(z-2)\Gamma(z-2) = \cdots = (z-1)(z-2)\cdots(z-n+1)\Gamma(z-n+1)\,,$$

da cui si ha

$$(z-1)(z-2)\cdots(z-n+1) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n+1)}\,.$$

D'altro canto si ha $(n-1)! = \Gamma(n)$, quindi il residuo può essere scritto come

$$\mathrm{Res}\left[t^z R(t),-1\right] == \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(n)\Gamma(z-n+1)}(-1)^{z-n-1} = \frac{\Gamma(z)}{(z-n)\Gamma(n)\Gamma(z-n)}(-1)^{z-n-1}\,,$$

dove, per la seconda funzione gamma a denominatore, si è usata ancora l'equazione di ricorrenza scrivendo: $\Gamma(z-n+1) = (z-n)\Gamma(z-n)$. Infine, usando la funzione beta di Eulero, che può essere definita in termini di funzioni gamma come

$$\beta(u,w) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(w)}{\Gamma(u+w)}\,,$$

si ha

$$\operatorname{Res}\left[t^z R(t),-1\right] = = \frac{\Gamma(z)}{(z-n)\Gamma(n)\Gamma(z-n)}(-1)^{z-n-1} = \frac{(-1)^{z-n-1}}{(z-n)\beta(n,z-n)}\,.$$

Sostituiamo questo risultato nell'espressione precedente dell'integrale

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} t^z R(t)dt &= -\frac{\pi e^{-iz\pi}}{\operatorname{sen}(z\pi)}\operatorname{Res}\left[t^z R(t),-1\right] = -\frac{\pi e^{-iz\pi}}{\operatorname{sen}(z\pi)}\frac{(-1)^{z-n-1}}{(z-n)\beta(n,z-n)}\\ &= -\frac{\pi e^{-iz\pi}}{\operatorname{sen}(z\pi)}\frac{\left(e^{i\pi}\right)^{z-n-1}}{(z-n)\beta(n,z-n)} = -\frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}\frac{\left(e^{i\pi}\right)^{-n-1}}{(z-n)\beta(n,z-n)}\\ &= \frac{\pi}{\operatorname{sen}(z\pi)}\frac{(-1)^{-n}}{(z-n)\beta(n,z-n)}\,,\end{aligned}$$

riordinando i termini, si arriva al risultato cercato, cioè

$$\int_0^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{t^z}{(t+1)^j}dt = \frac{(-1)^n\pi}{(z-n)\beta(n,z-n)\operatorname{sen}(z\pi)}\,,$$

convergente per ogni z tale che: $\operatorname{Re}(z)\in(-1,0)$.

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Laurent della funzione

$$\text{🍇}_n(z) = \sum_{k=1}^{n}(z+1)^{-k}\,,$$

con centro nell'origine, convergente in $z_c = 2$ e per un valore generico $n\in\mathbb{N}$.

Soluzione del terzo problema

La funzione $\text{🍇}_n(z)$ è meromorfa, in quanto rapporto di polinomi, infatti, usando la procedura per la somma di una serie geometrica di ragione $(z+1)^{-1}$ si ha

$$\text{🍇}_n(z) = \sum_{k=1}^{n}(z+1)^{-k} = \frac{1}{z+1}\sum_{k=0}^{n-1}(z+1)^{-k} = \frac{1}{z+1}\frac{1-1/(z+1)^n}{1-1/(z+1)} = \frac{(z+1)^n-1}{z(z+1)^n} = \frac{1}{z}-\frac{1}{z(z+1)^n}\,.$$

La funzione ha un polo di ordine n in $z=-1$. Infatti la somma di potenze del binomio $(z+1)$ che la definisce è anche la sua serie di Laurent centrata in $z=-1$, poiché la parte principale di tale serie ha un numero finito di termini, la potenza minore che compare coincide con l'ordine del polo che la funzione ha nel centro della serie. Ne consegue che si hanno due serie di Laurent con centro nell'origine, la prima ha come dominio di convergenza il cerchio unitario $C_1 = \{z : |z|<1\}$, la seconda converge invece nella corona circolare $C_{1,\infty} = \{z : |z|>1\}$. La serie da ottenere è quella convergente in quest'ultima corona circolare, infatti si ha $z_c\in C_{1,\infty}$, ovvero $|z_c| = 2 > 1$.
Come conseguenza della linearità degli integrali con cui si calcolano i coefficienti, la serie di Laurent della somma di due funzioni è la somma delle serie di Laurent, ovvero, il coefficiente k-esimo, con $k\in\mathbb{Z}$, della serie della somma è la somma dei coefficienti k-esimi delle serie delle funzioni addende. Consideriamo la decomposizione

$$\text{🍇}_n(z) = \text{🍇}_{1,n}(z) + \text{🍇}_{2,n}(z)\,,$$

dove

$$\text{🍇}_{1,n}(z) = \frac{1}{z}\,,\qquad \text{🍇}_{2,n}(z) = -\frac{1}{z(z+1)^n}\,.$$

La prima funzione è già la sua serie di Laurent centrata nell'origine e, essendo una somma finita, ha un solo termine, converge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, e quindi anche in $z_c = 2$, come richiesto dal problema. L'insieme dei coefficienti di Laurent della funzione $\text{🍇}_{1,n}(z)$ è $\left\{C_k^{(1)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ha un solo elemento non nullo, ovvero, usando il simbolo di Kronecker, $C_k^{(1)} = \delta_{k,-1}$, $\forall, k\in\mathbb{Z}$.

Per ottenere la serie di Laurent della funzione $🍇_{2,n}(z)$ usiamo la somma della serie geometrica di ragione $1/z$. Mettiamo in evidenza la z nel binomio a denominatore

$$🍇_{2,n}(z) = -\frac{1}{z(z+1)^n} = -\frac{1}{z^{n+1}} \frac{1}{(1+1/z)^n}$$

e verifichiamo che nella corona circolare $C_{1,\infty}$ si ha $|1/z| = 1/|z| < 1$. In generale la derivata k-esima, con $k \in \mathbb{N}$, rispetto alla ragione α di una serie geometrica convergente, quindi con $|\alpha| < 1$, è anch'essa una serie convergente e si ha

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{1}{1-\alpha} = \frac{k!}{(1-\alpha)^{k+1}} = \sum_{j=k}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1)\alpha^{j-k}.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned}
🍇_{2,n}(z) &= -\frac{1}{z^{n+1}} \frac{1}{(1+1/z)^n} = -\frac{z^{-n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=n-1}^{\infty} j(j-1)\cdots(j-n+2)\left(-\frac{1}{z}\right)^{j-n+1} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{j!}{(j-n+1)!}(-1)^{j-n} z^{-j-2} = \sum_{j=n-1}^{\infty} \binom{j}{n-1} (-1)^{j-n} z^{-j-2} \\
&= \{k = -j-2\} = \sum_{k=-\infty}^{-n-1} \binom{-k-2}{n-1} (-1)^{k+n} z^k.
\end{aligned}$$

Poiché $n \in \mathbb{N}$, per l'estremo superiore della serie si ha la condizione $-n-1 \leq -2$, ovvero la serie di Laurent della funzione $🍇_{2,n}(z)$ non ha la parte regolare e ha infiniti coefficienti della parte principale diversi da zero. Indicando con $\left\{C_k^{(2)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ l'insieme dei coefficienti della serie di Laurent della funzione $🍇_{2,n}(z)$ centrata nell'origine e convergente nella corona circolare $C_{1,\infty}$, si ha

$$C_k^{(2)} = \begin{cases} 0 & k \geq -n \\ \binom{-k-2}{n-1}(-1)^{k+n} & k \leq -n-1 \end{cases}.$$

In definitiva, i coefficienti della serie di Laurent della funzione completa $🍇_n(z)$,

$$🍇_n(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k,$$

centrata nell'origine e convergente nella corona circolare $C_{1,\infty}$ sono

$$C_k = C_k^{(1)} + C_k^{(2)} = \begin{cases} \delta_{k,-1} & k \geq -n \\ \delta_{k,-1} + \binom{-k-2}{n-1}(-1)^{k+n} & k \leq -n-1 \end{cases}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si consideri l'insieme $\left\{\hat{S}_k\right\}_{k=1}^{3}$ dei tre operatori delle componenti dello spin $S = 1$, la cui algebra è descritta dalle regole di commutazione

$$\left[\hat{S}_j, \hat{S}_k\right] = i \sum_{m=1}^{3} \epsilon_{jkm} \hat{S}_m\,, \qquad \forall\, j,k \in \{1,2,3\}\,,$$

dove ϵ_{jkm} è il tensore di Levi-Civita a tre dimensioni, completamente anti-simmetrico definito come

$$\epsilon_{jkm} = \begin{cases} 1 & \text{se } (j,k,m) = (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2) \\ -1 & \text{se } (j,k,m) = (3,2,1),\ (2,1,3),\ (1,3,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\,.$$

Gli elementi della matrice 3×3 S_k, che rappresenta il k-esimo operatore $\hat{S}_k$, con $k = 1,2,3$, rispetto alla base canonica sono

$$(S_k)_{ln} = -i\epsilon_{kln}\,, \qquad \forall\, l,n \in \{1,2,3\}.$$

Si ottengano le tre matrici 3×3 dell'insieme $\{T_k\}_{k=1}^{3}$ che rappresentano gli operatori di spin $S = 1$ rispetto alla base degli autovettori del terzo di questi, ovvero dell'operatore $\hat{S}_3$.

Soluzione del quarto problema

Dalla definizione data, le tre matrici che rappresentano gli operatori di spin uno rispetto alla base canonica sono

$$\begin{aligned}
S_1 &= -i \begin{pmatrix} \epsilon_{111} & \epsilon_{112} & \epsilon_{113} \\ \epsilon_{121} & \epsilon_{122} & \epsilon_{123} \\ \epsilon_{131} & \epsilon_{132} & \epsilon_{133} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
S_2 &= -i \begin{pmatrix} \epsilon_{211} & \epsilon_{212} & \epsilon_{213} \\ \epsilon_{221} & \epsilon_{222} & \epsilon_{223} \\ \epsilon_{231} & \epsilon_{232} & \epsilon_{233} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
S_3 &= -i \begin{pmatrix} \epsilon_{311} & \epsilon_{312} & \epsilon_{313} \\ \epsilon_{321} & \epsilon_{322} & \epsilon_{323} \\ \epsilon_{331} & \epsilon_{332} & \epsilon_{333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

sono normali, in quanto hermitiane e quindi gli insiemi degli autovettori sono ortonormali. Otteniamo gli autovalori dell'operatore $\hat{S}_3$ come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned}
\det\left(\hat{S}_3 - \sigma \hat{I}\right) &= 0 \\
\det \begin{pmatrix} -\sigma & -i & 0 \\ i & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{pmatrix} &= 0 \\
-\sigma\left(\sigma^2 - 1\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Lo spettro discreto, ovvero l'insieme degli autovalori, è $\{\sigma_1 = -1, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 1\}$. Le componenti contro-varianti dei vettori che, rispetto alla base canonica, rappresentano gli autovettori, si ottengono come soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -\sigma_k & -i & 0 \\ i & -\sigma_k & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_k^1 \\ s_k^2 \\ s_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3\,,$$

dove s_k^j è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, cioè, dell'autovettore relativo all'autovalore σ_k, con $k, j \in \{1, 2, 3\}$. Per il primo e il terzo autovettore si hanno i sistemi

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & -i & 0 \\ i & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1,3}^1 \\ s_{1,3}^2 \\ s_{1,3}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

assegnando un valore comune non nullo alle prima componenti, cioè, posti: $s_1^1 = s_3^1 = s$, dalle prime equazioni, si hanno le seconde componenti $s_1^2 = -s_3^2 = -is$. Mentre, per l'autovettore nullo, il secondo, si ha il sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2^1 \\ s_2^2 \\ s_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalla prima e seconda equazione si ottengono $s_2^2 = s_2^1 = 0$, quindi, si ha una solo componente non nulla, la terza, che poniamo uguale ad uno, cioè: $s_2^3 = 1$. In definitiva i tre autovettori normalizzati hanno le rappresentazioni matriciali

$$s_1 = \frac{1}{s\sqrt{2}} \begin{pmatrix} s \\ -is \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \frac{1}{s\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s_3 = \frac{1}{s\sqrt{2}} \begin{pmatrix} s \\ is \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},$$

il parametro s, in termini del quale sono stati definiti il primo e il terzo autovettore, è stato posto, senza perdita di generalità, uguale all'unità. La matrice unitaria diagonalizzante U, avente per elementi le componenti contro-varianti degli autovettori, ovvero $U_k^m = s_k^m$, con $k, m \in \{1, 2, 3\}$, è

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifica che $T_3 = U^\dagger S_3 U = \operatorname{diag}(-1, 0, 1)$, infatti

$$\begin{aligned} U^\dagger S_3 U &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_3 . \end{aligned}$$

Le altre due matrici richieste sono

$$\begin{aligned} T_1 = U^\dagger S_1 U &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_2 = U^\dagger S_2 U &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la soluzione $\text{👽}(x)$ dell'equazione differenziale

$$\frac{d^n \text{👽}}{dx^n}(x) = \left(\text{👽} * \text{👽} * \cdots * \text{👽}\right)_{n+1}(x)\,,$$

per un generico $n \in \mathbb{N}$, sapendo che il simbolo

$$\left(\text{👽} * \text{👽} * \cdots * \text{👽}\right)_{n+1}(x)\,,$$

indica la convoluzione di $n+1$ funzioni $\text{👽}(x)$.

Soluzione del quinto problema

Facciamo le trasformate di Fourier di ambo i media dell'equazione

$$(ik)^n \tilde{\text{👽}}(k) = (2\pi)^{n/2} \left(\tilde{\text{👽}}(k)\right)^{n+1}\,,$$

dove abbiamo usato il teorema della convoluzione. Infatti, nel caso di due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ si ha che la trasformata di Fourier della convoluzione è data dal prodotto delle trasformare di Fourier moltiplicato per $\sqrt{2\pi}$, ovvero

$$\mathscr{F}_k\left[f_1 * f_2\right] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[f_1\right]\mathscr{F}_k\left[f_2\right].$$

Nel caso di tre funzioni,$f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$, la loro convoluzione

$$(f_1 * f_2 * f_3)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2\, f_1(x-y_1) f_2(y_1-y_2) f_3(y_2)\,,$$

può essere interpretata come la convoluzione di una di esse con la convoluzione delle altre due, ad esempio di $f_1(x)$ con la convoluzione $(f_2 * f_3)(x)$. Si ha, cioè, la proprietà associativa

$$(f_1 * (f_2 * f_3)) = (f_2 * (f_1 * f_3)) = (f_3 * (f_1 * f_2)) \equiv (f_1 * f_2 * f_3)\,.$$

In generale, la convoluzione di $n+1$ funzioni, con $n \in \mathbb{N}$, è data dall'integrale mutiplo

$$(f_1 * f_2 * \cdots * f_{n+1})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_n\, f_1(x-y_1) f_2(y_1-y_2) \cdots f_n(y_{n-1}-y_n) f_{n+1}(y_n)\,.$$

La tesi del teorema della convoluzione per tre funzioni, considerando lo loro convoluzione come quella della prima funzione per la convoluzione della seconda con la terza è

$$\mathscr{F}_k\left[f_1 * f_2 * f_3\right] = \mathscr{F}_k\left[f_1 * (f_2 * f_3)\right] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[f_1\right]\mathscr{F}_k\left[f_2 * f_3\right],$$

applicando lo stesso teorema all'ultima trasformata di Fourier, si ha

$$\mathscr{F}_k\left[f_1 * f_2 * f_3\right] = \left(\sqrt{2\pi}\right)^2 \mathscr{F}_k\left[f_1\right]\mathscr{F}_k\left[f_2\right]\mathscr{F}_k\left[f_3\right].$$

Ne consegue che per $n+1$ funzioni

$$\mathscr{F}_k\left[f_1 * f_2 * \cdots * f_{n+1}\right] = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \mathscr{F}_k\left[f_1\right]\mathscr{F}_k\left[f_2\right]\cdots\mathscr{F}_k\left[f_{n+1}\right].$$

Considerando la stessa funzione $f(x)$ avremo

$$\mathscr{F}_k\Big[\underbrace{f * f * \cdots * f}_{n+1\text{ volte}}\Big] = (2\pi)^{n/2} \left(\mathscr{F}_k\left[f\right]\right)^{n+1}\,,$$

che è l'espressione usata per il caso in esame, ovvero

$$(ik)^n \tilde{\text{👽}}(k) = (2\pi)^{n/2} \left(\tilde{\text{👽}}(k)\right)^{n+1}\,.$$

Dalla quale possiamo ottenere la trasformata di Fourier della funzione generalizzata cercata come

$$\left(\tilde{\text{👽}}(k)\right)^n = (ik)^n\,(2\pi)^{-n/2} = \left(\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\text{👽}}(k) = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

L'anti-trasformata di Fourier dà la soluzione

$$\text{👽}(x) = \mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{\text{👽}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ik}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ike^{ikx}dk\,,$$

l'ultimo integrale può essere scritto come un derivata rispetto alla x, cioè

$$\text{👽}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ike^{ikx}dk = \frac{d}{dx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk\,,$$

usando, infine, la rappresentazione in forma di integrale della funzione generalizzata delta di Dirac

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk}dk\,,$$

si ha che la funzione generalizzata, soluzione dell'equazione integrale è la derivata prima della delta di Dirac, cioè

$$\text{👽}(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \delta'(x)\,.$$

Possiamo verificare il risultato, calcolando la convoluzione di $n+1$ derivate prime di delta di Dirac, si ha

$$\left(\delta' * \delta' * \cdots * \delta'\right)_{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_n \delta'(x-y_1)\delta'(y_1-y_2)\cdots\delta'(y_{n-1}-y_n)\delta'(y_n)\,,$$

integriamo per parti le ultime due funzioni generalizzate rispetto a y_n

$$\begin{aligned}\left(\delta' * \delta' * \cdots * \delta'\right)_{n+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_{n-1} \delta'(x-y_1)\delta'(y_1-y_2)\cdots\delta'(y_{n-2}-y_{n-1}) \\ &\quad \Bigg(\underbrace{-\delta(y_{n-1}-y_n)\delta'(y_n)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy_n \delta(y_{n-1}-y_n)\delta''(y_n)}_{=\delta''(y_{n-1})}\Bigg) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_{n-1} \delta'(x-y_1)\delta'(y_1-y_2)\cdots\delta'(y_{n-2}-y_{n-1})\delta''(y_{n-1})\,.\end{aligned}$$

Integriamo per parti in y_{n-1} le ultime due funzioni generalizzate, ovvero $\delta'(y_{n-2}-y_{n-1})\delta''(y_{n-1})$, si ha

$$\begin{aligned}\left(\delta' * \delta' * \cdots * \delta'\right)_{n+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_{n-2} \delta'(x-y_1)\delta'(y_1-y_2)\cdots\delta'(y_{n-3}-y_{n-2}) \\ &\quad \Bigg(\underbrace{-\delta(y_{n-2}-y_{n-1})\delta''(y_{n-1})\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy_{n-1} \delta(y_{n-2}-y_{n-1})\delta'''(y_{n-1})}_{=\delta'''(y_{n-2})}\Bigg) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dy_{n-2} \delta'(x-y_1)\delta'(y_1-y_2)\cdots\delta'(y_{n-3}-y_{n-2})\delta'''(y_{n-2})\,,\end{aligned}$$

dopo $n-1$ integrazioni per parti si arriva all'espressione

$$\left(\delta' * \delta' * \cdots * \delta'\right)_{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \delta'(x-y_1)\delta^n(y_1)\,,$$

che dà

$$\begin{aligned}\left(\delta' * \delta' * \cdots * \delta'\right)_{n+1} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \delta'(x-y_1)\delta^{(n)}(y_1)\,, \\ &= -\delta(x-y_1)\delta^{(n)}(y_1)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \delta(x-y_1)\delta^{(n+1)}(y_1) = \delta^{(n+1)}(x)\,.\end{aligned}$$

Poiché la derivata $(n+1)$-esima non è altro che la derivata n-esima della derivata prima, usando $\text{👽}(x) = \delta'(x)$, dalla precedente espressione si ottiene l'identità cercata, infatti

$$\left(\text{👽} * \text{👽} * \cdots * \text{👽}\right)_{n+1} = \left(\delta' * \delta' * \cdots * \delta'\right)_{n+1} = \delta^{(n+1)}(x) = \frac{d^n \delta'}{dx^n}(x) = \frac{d^n \text{👽}}{dx^n}(x)\,.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

In uno spazio di Hilbert a dimensione finita $N \in \mathbb{N}$, siano $\hat{A}$ e $\hat{B}$ due operatori hermitiani e definiti positivi, ovvero aventi autovalori non negativi. Si dimostri che, se l'operatore $\hat{A}$ è invertibile, anche l'operatore prodotto $\hat{P} = \hat{A}\hat{B}$ è definito positivo.

Soluzione del sesto Problema

Indichiamo con $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, $\{|b_k\rangle\}_{k=1}^N$ e $\{|p_k\rangle\}_{k=1}^N$ gli insiemi degli autovettori dei tre operatori $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{P} = \hat{A}\hat{B}$, e con $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, $\{\beta_k\}_{k=1}^N$ e $\{\pi_k\}_{k=1}^N$, gli insiemi dei relativi autovalori, cosicché si abbiano le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle\,, \qquad \hat{B}|b_k\rangle = \beta_k|b_k\rangle\,, \qquad \hat{P}|p_k\rangle = \pi_k|p_k\rangle\,, \qquad \forall k \in \{1,2,\ldots,N\},.$$

Poiché l'operatore hermitiano $\hat{A}$ è invertibile si ha che anche l'operatore inverso è hermitiano e che l'aggiunto dell'inverso coincide con l'inverso dell'aggiunto. Infatti, dalla coniugazione hermitiana dalle relazioni $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{I}$, che definiscono l'operatore inverso $\hat{A}^{-1}$,

$$\left(\hat{A}\hat{A}^{-1}\right)^\dagger = \left(\hat{A}^{-1}\hat{A}\right)^\dagger = \hat{I}^\dagger \qquad \to \qquad \left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger \hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger \left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger = \hat{I}$$

si evince l'operatore $\left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger$ è l'inverso dell'operatore $\hat{A}^\dagger$, cioè

$$\left(\hat{A}^\dagger\right)^{-1} = \left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger\,,$$

ovvero, l'inverso dell'aggiunto coincide con l'aggiunto dell'inverso. Ne consegue che se un operatore invertibile è hermitiano anche il suo inverso lo sarà, infatti

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger = \left(\hat{A}^\dagger\right)^{-1} = \hat{A}^{-1}\,.$$

Consideriamo l'equazione agli autovalori dell'operatore prodotto

$$\hat{P}|p_k\rangle = \hat{A}\hat{B}|p_k\rangle = \pi_k|p_k\rangle\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

applichiamo da sinistra su ambo i membri l'operatore inverso $\hat{A}^{-1}$ e moltiplichiamo per il vettore "bra" $\langle p_k|$ si ha

$$\hat{B}|p_k\rangle = \pi_k\hat{A}^{-1}|p_k\rangle \qquad \to \qquad \langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle = \pi_k\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

I due prodotti scalari o valori di aspettazione dell'ultima relazione sono reali come conseguenza dell'hermitianità degli operatori $\hat{B}$ e $\hat{A}^{-1}$, infatti, $\forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}$,

$$\begin{aligned} \langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle^* = \langle p_k|\hat{B}^\dagger|p_k\rangle^* = \langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle^* \qquad &\Rightarrow \qquad \langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle \in \mathbb{R}\,,\\ \langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle^* = \langle p_k|\left(\hat{A}^{-1}\right)^\dagger|p_k\rangle^* = \langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle^* \qquad &\Rightarrow \qquad \langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Inoltre, della definizione positiva e invertibilità dell'operatore $\hat{A}$ segue che il valore di aspettazione $\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle$ è strettamente maggiore di zero. Considerando, infatti, la decomposizione del vettore $|p_k\rangle$,

$$|p_k\rangle = p_k^j|a_j\rangle\,,$$

rispetto alla base ortonormale $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ degli autovettori dell'operatore $\hat{A}$, che sono anche quelli dell'operatore inverso $\hat{A}^{-1}$, per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}^{-1}|a_k\rangle = \alpha_k^{-1}|a_k\rangle\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,\ldots,N\}\,.$$

In particolare, p_k^j è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore dell'operatore $\hat{P}$ rispetto alla base ortonormale $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$, quindi è il prodotto scalare $p_k^j = \langle a_j|p_k\rangle$, $\forall\, k, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Usando per l'operatore inverso $\hat{A}^{-1}$ la rappresentazione spettrale

$$\hat{A}^{-1} = \sum_{j=1}^N \alpha_j^{-1} |a_j\rangle\langle a_j| \,,$$

il valore di aspettazione ha la forma

$$\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j^{-1} \underbrace{\langle p_k|a_j\rangle}_{=\left(p_k^j\right)^*} \underbrace{\langle a_j|p_k\rangle}_{=p_k^j} = \sum_{j=1}^N \alpha_j^{-1} \left|p_k^j\right|^2 \,,$$

poiché l'operatore $\hat{A}$ è definito positivo, $\alpha_k \geq 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, essendo, inoltre invertibile non può avere l'autovalore nullo, quindi deve valere la disuguaglianza stretta, $\alpha_k > 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, che implica la stessa condizione per gli inversi degli autovalori, cioè $\alpha_k^{-1} > 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Alla luce di queste considerazioni, il valore di aspettazione $\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle$ è strettamente positivo, ovvero

$$\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j^{-1} \left|p_k^j\right|^2 > 0 \,,$$

è infatti la combinazione lineare non banale, almeno uno dei moduli quadri $\left|p_k^j\right|^2$, $\forall\, k, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, deve essere strettamente positivo altrimenti il k-esimo autovettore sarebbe il vettore nullo. Infine, dalla definizione positiva dell'operatore $\hat{B}$, si ha la non negatività del valore di aspettazione $\langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Infatti, usando la rappresentazione spettrale dell'operatore rispetto alla base ortonormale $\{|b_k\rangle\}_{j=1}^N$ dei sui autovettori,

$$\hat{B} = \sum_{j=1}^N \beta_k |b_k\rangle\langle b_k| \,,$$

con $\beta_k \geq 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, si ha

$$\langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle = \sum_{j=1}^N \beta_k \langle p_k|b_j\rangle\langle b_j|p_k\rangle = \sum_{j=1}^N \beta_k \underbrace{\left|\langle p_k|b_j\rangle\right|^2}_{\geq 0} \geq 0 \,.$$

Infine, dalla relazione che lega π_k, il k-esimo autovalore dell'operatore $\hat{P}$, ai valori di aspettazione degli operatori $\hat{B}$ e $\hat{A}^{-1}$ rispetto all'autovettore $|p_k\rangle$ relativo allo stesso autovalore,

$$\langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle = \pi_k \langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle \,,$$

si ha

$$\pi_k = \frac{\langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle}{\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle} \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\} \,,$$

la liceità dell'operazione è garantita dalla condizione di non nullità del valore di aspettazione $\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle$ che è strettamente positivo. Avendo dimostrato che $\langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle \geq 0$ e, come appena ribadito, che $\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle > 0$, si ha la condizione richiesta,

$$\pi_k = \frac{\langle p_k|\hat{B}|p_k\rangle}{\langle p_k|\hat{A}^{-1}|p_k\rangle} \geq 0 \,, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\} \,,$$

ovvero, l'operatore $\hat{P}$, avendo tutti gli autovalori reali e non negativi è definito positivo.