Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 21 febbraio 2022

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri che l'identità

$$\mathrm{Pr}\int_a^b \frac{P'(x)}{P(x)}dx = \ln\left(\left|\frac{P(b)}{P(a)}\right|\right),$$

vale $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$ e per ogni polinomio non costante e a coefficienti reali $P(x)$, tale che $P(a) \neq 0 \neq P(b)$.

Soluzione del primo problema

È immediato osservare che la funzione integranda è la derivata logaritmica del polinomio $P(x)$. Indichiamo con $N \in \mathbb{N}$ il grado del polinomio, le cui espressioni nella forma di somma di potenze e in quella di prodotto di binomi, che si ottiene fattorizzando gli zeri, sono

$$P(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j z^j = a_N \prod_{k=1}^{N}(x - z_k),$$

con $a_N \neq 0$ e dove $\{z_k\}_{k=1}^N$ è l'insieme degli zeri. Questo insieme può essere scomposto nell'unione di quattro sottoinsiemi:

- $\left\{x_{q_j}\right\}_{j=1}^J \subset (a,b)$, gli zeri reali contenuti nell'intervallo d'integrazione $[a,b]$;
- $\{\bar{x}_{r_h}\}_{h=1}^H \not\subset [a,b]$, gli zeri reali non contenuti nell'intervallo d'integrazione $[a,b]$;
- $\{z_{s_l}\}_{l=1}^L \subset \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, gli zeri non reali con parti immaginarie strettamente positive, contenuti nel semi-piano superiore $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$;
- $\left\{z_{s_l}^*\right\}_{l=1}^L \subset \{z : \mathrm{Im}(z) < 0\}$, gli zeri non reali con parti immaginarie strettamente negative, contenuti nel semi-piano inferiore $\{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Il fatto che gli zeri siano o reali o coppie di numeri complessi coniugati è conseguenza della realtà dei coefficienti del polinomio e quindi del fatto che assuma valori reali sull'asse reale, cioè: $P(z) \in \mathbb{R}$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$. Esplicitamente si ha

$$\{z_k\}_{k=1}^N = \left\{x_{q_j}\right\}_{j=1}^J \cup \{\bar{x}_{r_h}\}_{h=1}^H \cup \{z_{s_l}\}_{l=1}^L \cup \left\{z_{s_l}^*\right\}_{l=1}^L,$$

con: $J + H + 2L = N$. Il valore principale sarà relativo solo agli zeri dell'insieme $\left\{x_{q_j}\right\}_{j=1}^J \subset [a,b]$ e l'integrale può essere riscritto nella forma

$$\begin{aligned}\mathrm{Pr}\int_a^b \frac{P'(x)}{P(x)}dx &= \mathrm{Pr}\int_a^b \frac{d\ln(P(x))}{dx}dx = \sum_{k=1}^{N}\mathrm{Pr}\int_a^b \frac{dx}{x - z_k}\\ &= \sum_{j=1}^{J}\mathrm{Pr}\int_a^b \frac{dx}{x - x_{q_j}} + \sum_{h=1}^{H}\int_a^b \frac{dx}{x - \bar{x}_{r_h}} + \sum_{l=1}^{L}\left(\int_a^b \frac{dx}{x - z_{s_l}} + \int_a^b \frac{dx}{x - z_{s_l}^*}\right).\end{aligned}$$

Usando per gli integrali in valore principale l'espressione nella forma di limite, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pr}\int_a^b \frac{P'(x)}{P(x)}dx &= \sum_{j=1}^{J}\mathrm{Pr}\int_a^b \frac{dx}{x-x_{q_j}}+\sum_{h=1}^{H}\int_a^b \frac{dx}{x-\bar{x}_{r_h}}+\sum_{l=1}^{L}\left(\int_a^b \frac{dx}{x-z_{s_l}}+\int_a^b \frac{dx}{x-z^*_{s_l}}\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{j=1}^{J}\left(\int_a^{x_{q_j}-\epsilon}\frac{dx}{x-x_{q_j}}+\int_{x_{q_j}+\epsilon}^{b}\frac{dx}{x-x_{q_j}}\right)+\sum_{h=1}^{H}\ln\left(\frac{b-\bar{x}_{r_h}}{a-\bar{x}_{r_h}}\right)\\
&\quad+\sum_{l=1}^{L}\left(\ln\left(\frac{b-z_{s_l}}{a-z_{s_l}}\right)+\ln\left(\frac{b-z^*_{s_l}}{a-z^*_{s_l}}\right)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{J}\left(\ln\left(\frac{b-x_{q_j}}{a-x_{q_j}}\right)+\underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\ln(-\epsilon)-\ln(\epsilon)\right)}_{=\ln(-1)}\right)+\sum_{h=1}^{H}\ln\left(\frac{b-\bar{x}_{r_h}}{a-\bar{x}_{r_h}}\right)\\
&\quad+2\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-z_{s_l}\right|}{\left|a-z_{s_l}\right|}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{J}\ln\left(\frac{b-x_{q_j}}{x_{q_j}-a}\right)+\sum_{h=1}^{H}\ln\left(\frac{b-\bar{x}_{r_h}}{a-\bar{x}_{r_h}}\right)+2\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-z_{s_l}\right|}{\left|a-z_{s_l}\right|}\right).
\end{aligned}
$$

Gli argomenti delle funzioni logaritmo naturale sono tutti reali e positivi, quindi coincidono con i rispettivi moduli. Infatti

- poiché $\left\{x_{q_j}\right\}_{j=1}^{J}\subset(a,b)$, si hanno: $(b-x_{q_j}),(x_{q_j}-a)>0$, $\forall\, j\in\{1,2,\ldots,J\}$, quindi

$$
\frac{b-x_{q_j}}{x_{q_j}-a}=\frac{\left|b-x_{q_j}\right|}{\left|a-x_{q_j}\right|},\qquad \forall\, j\in\{1,2,\ldots,J\}\ ;
$$

- i rimanenti zeri reali, ovvero gli elementi dell'insieme $\left\{\bar{x}_{r_h}\right\}_{h=1}^{H}$, verificano o la condizione $\bar{x}_{r_h}>b>a$, ovvero $\bar{x}_{r_h}<a<b$, da cui, rispettivamente: $(a-\bar{x}_{r_h}),(b-\bar{x}_{r_h})<0$, ovvero $(a-\bar{x}_{r_h}),(b-\bar{x}_{r_h})>0$. Quindi i rapporti sono tutti strettamente positivi avendo numeratore e dominatore lo stesso segno, cioè

$$
\frac{b-\bar{x}_{r_h}}{a-\bar{x}_{r_h}}=\frac{\left|b-\bar{x}_{r_h}\right|}{\left|a-\bar{x}_{r_h}\right|},\qquad \forall\, h\in\{1,2,\ldots,H\}\ ;
$$

- infine, avendo: $\left|b-z_{s_l}\right|=\left|b-z^*_{s_l}\right|$ e $\left|a-z_{s_l}\right|=\left|a-z^*_{s_l}\right|$, $\forall\, j\in\{1,2,\ldots,L\}$, la terza somma può essere scritta come

$$
2\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-z_{s_l}\right|}{\left|a-z_{s_l}\right|}\right)=\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-z_{s_l}\right|}{\left|a-z_{s_l}\right|}\right)+\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-z^*_{s_l}\right|}{\left|a-z^*_{s_l}\right|}\right).
$$

Alla luce di questi risultati, le tre somme di logaritmi, la cui somma dà l'integrale cercato, possono essere riscritte nella forma

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pr}\int_a^b \frac{P'(x)}{P(x)}dx &= \sum_{j=1}^{J}\ln\left(\frac{b-x_{q_j}}{x_{q_j}-a}\right)+\sum_{h=1}^{H}\ln\left(\frac{b-\bar{x}_{r_h}}{a-\bar{x}_{r_h}}\right)+2\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-z_{s_l}\right|}{\left|a-z_{s_l}\right|}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{J}\ln\left(\frac{\left|b-x_{q_j}\right|}{\left|a-x_{q_j}\right|}\right)+\sum_{h=1}^{H}\ln\left(\frac{\left|b-\bar{x}_{r_h}\right|}{\left|a-\bar{x}_{r_h}\right|}\right)+\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-z_{s_l}\right|}{\left|a-z_{s_l}\right|}\right)+\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-z^*_{s_l}\right|}{\left|a-z^*_{s_l}\right|}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{J}\sum_{h=1}^{H}\sum_{l=1}^{L}\ln\left(\frac{\left|b-x_{q_j}\right|}{\left|a-x_{q_j}\right|}\frac{\left|b-\bar{x}_{r_h}\right|}{\left|a-\bar{x}_{r_h}\right|}\frac{\left|b-z_{s_l}\right|}{\left|a-z_{s_l}\right|}\frac{\left|b-z^*_{s_l}\right|}{\left|a-z^*_{s_l}\right|}\right)\\
&= \ln\left(\prod_{j=1}^{J}\prod_{h=1}^{H}\prod_{l=1}^{L}\frac{\left|\left(b-x_{q_j}\right)\left(b-\bar{x}_{r_h}\right)\left(b-z_{s_l}\right)\left(b-z^*_{s_l}\right)\right|}{\left|\left(a-x_{q_j}\right)\left(a-\bar{x}_{r_h}\right)\left(a-z_{s_l}\right)\left(a-z^*_{s_l}\right)\right|}\right).
\end{aligned}
$$

Usando la forma fattorizzata del polinomio e la decomposizione dell'insieme dei poli nell'unione dei quattro sottoinsiemi di poli reali, appartenenti e non appartenenti all'intervallo (a, b) e dei complessi con parti immaginarie strettamente positive e negative, si ha

$$P(x) = a_N \prod_{k=1}^{N} (x - z_k) = \prod_{j=1}^{J} \prod_{h=1}^{H} \prod_{l=1}^{L} \left(x - x_{q_j}\right)\left(x - \bar{x}_{r_h}\right)\left(x - z_{s_l}\right)\left(x - z_{s_l}^*\right),$$

quindi l'espressine precedente coincide con quella richiesta, ovvero

$$\Pr \int_a^b \frac{P'(x)}{P(x)} dx = \ln \left(\prod_{j=1}^{J} \prod_{h=1}^{H} \prod_{l=1}^{L} \frac{\left|\left(b - x_{q_j}\right)\left(b - \bar{x}_{r_h}\right)\left(b - z_{s_l}\right)\left(b - z_{s_l}^*\right)\right|}{\left|\left(a - x_{q_j}\right)\left(a - \bar{x}_{r_h}\right)\left(a - z_{s_l}\right)\left(a - z_{s_l}^*\right)\right|} \right) = \ln\left(\frac{|P(b)|}{|P(a)|}\right).$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$C = \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)}{(z-1)^4} dz\,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa in quanto rapporto di funzioni intere. Ha una singolarità in $z = 1$, questo punto è uno zero sia della funzione a numeratore che di quella a denominatore. In particolare, come si evince facilmente, è uno zero di ordine quattro del polinomio a denominatore, è di ordine uno per la funzione a numeratore, infatti

$$\lim_{z \to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)}{z - 1} = \lim_{z \to 1} 2\pi z \cos\left(\pi z^2\right) = -2\pi\,.$$

Ne consegue che la funzione integranda ha un polo di ordine tre in $z = 1$. Usando il teorema dei residui si ha

$$C = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)}{(z-1)^4}, z = 1\right].$$

Calcoliamo il residuo come coefficiente della potenza -1 della serie di Laurent della funzione integranda centrata in $z = -1$. Si ottiene a partire dalla serie di Taylor della funzione seno a numeratore, arrestandosi al terzo ordine, che corrisponde all'ordine -1 per la serie di Laurent, infatti

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)}{(z-1)^4} = \frac{d}{dz}\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)\Big|_{z=1} (z-1)^{-3} + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)\Big|_{z=1} (z-1)^{-2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)\Big|_{z=1} (z-1)^{-1} + \mathcal{O}(1)\,.$$

Il residuo è proporzionale alla derivata terza della funzione seno, ovvero

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)}{(z-1)^4}, z = 1\right] &= \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)\Big|_{z=1} \\
&= \frac{1}{3!}\frac{d^2}{dz^2}\left(2\pi z \cos\left(\pi z^2\right)\right)\Big|_{z=1} \\
&= \frac{1}{3!}\frac{d}{dz}\left(2\pi \cos\left(\pi z^2\right) - 4\pi^2 z^2 \operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)\right)\Big|_{z=1} \\
&= \frac{1}{3!}\left(-4\pi^2 z \operatorname{sen}\left(\pi z^2\right) - 8\pi^2 z \operatorname{sen}\left(\pi z^2\right) - 8\pi^3 z^3 \cos\left(\pi z^2\right)\right)\Big|_{z=1} \\
&= \frac{4\pi^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

In definitiva, il valore dell'integrale è

$$C = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\pi z^2\right)}{(z-1)^4}, z = 1\right] = \frac{8i\pi^4}{3}\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$D = \oint_{|z|=2} \frac{(z-1)^2}{z^4 \mathrm{sen}\,(z)} dz\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione integranda è meromorfa, ha singolarità polari in corrispondenza degli zeri della funzione seno a denominatore, l'insieme dei poli è quello dei multipli interi positivi, negativi e nullo di π, ovvero la successione $\{z_k = k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. I poli diversi da zero, così come gli zeri corrispondenti della funzione seno, sono semplici, mentre il polo nell'origine, come conseguenza della potenza z^4 a denominatore, è di ordine cinque. Il percorso d'integrazione, la circonferenza di raggio due e centro nell'origine avvolge una sola volta un unico polo, quello nell'origine. Infatti, si verifica immediatamente che,

$$|z_k| = |k|\pi > 2\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\,.$$

Applicando il teorema dei residui si ha

$$D = 2i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{(z-1)^2}{z^4 \mathrm{sen}(z)}, z=0\right].$$

Come è noto, il residuo di un polo di ordine cinque è dato dalla derivata quarta della funzione integranda moltiplicata per la potenza z^5 valutata nel polo e divisa per $4!$. In questo caso, però, una tale procedura porterebbe ad un'espressione complicata e difficilmente valutabile nell'origine, ovvero

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{(z-1)^2}{z^4 \mathrm{sen}(z)}, z=0\right] &= \frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}\frac{(z-1)^2 z}{\mathrm{sen}(z)}\\
&= \frac{1}{4!\,\mathrm{sen}(z)}\left[(z-7)z(z+5) + 4\left(z(13-5(z-2)z) + 6(z-1)^2 z\frac{1}{\mathrm{sen}^2(z)} - 12\right)\frac{1}{\mathrm{sen}^2(z)} + \right.\\
&\qquad \left. 4\cot(z)\left(z(3z-4) - 6(z-1)(3z-1)\frac{1}{\mathrm{sen}^2(z)} - 5\right) + 24\right].
\end{aligned}$$

Una procedura meno laboriosa consiste nel ricavare il residuo come coefficiente della potenza z^{-1} della serie di Laurent centrata, per l'appunto, nell'origine della funzione integranda. I coefficienti delle potenze più piccole, cioè più vicine allo zero, tra le quali c'è quella voluta, possono essere ottenuti a partire dalla serie di Taylor della funzione seno. Nel limite $z \to 0$, sfruttando come al solito la somma della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{(z-1)^2}{z^4 \mathrm{sen}(z)} &= \left(\frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{z - z^3/3! + z^5/5! + \cdots}\\
&= \left(\frac{1}{z^5} - \frac{2}{z^4} + \frac{1}{z^3}\right)\frac{1}{1 - (z^2/3! - z^4/5! + \cdots)}\\
&= \left(\frac{1}{z^5} - \frac{2}{z^4} + \frac{1}{z^3}\right)\left[1 + \left(\frac{z^2}{3}! - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right) + \left(\frac{z^2}{3}! - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \ldots\right].
\end{aligned}$$

Siamo interessati solo al coefficiente della potenza z^{-1}, ad esso contribuiscono i tre termini del primo fattore tra parentesi tonde. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{(z-1)^2}{z^4 \mathrm{sen}(z)} &= \cdots + \frac{1}{z}\Bigg(\underbrace{-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}}_{\text{dal termine } 1/z^5} + \underbrace{0}_{\text{dal termine } -2/z^4} + \underbrace{\frac{1}{3!}}_{\text{dal termine } 1/z^3}\Bigg) + \cdots\\
&= \cdots + \frac{1}{z}\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{6} + 1\right) + \cdots\\
&= \cdots + \frac{1}{z}\frac{67}{360} + \cdots,
\end{aligned}$$

da cui si ottiene il residuo

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^2}{z^4\operatorname{sen}(z)}, z=0\right]=\frac{67}{360}\,.$$

Infine l'integrale cercato vale

$$D=2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{(z-1)^2}{z^4\operatorname{sen}(z)}, z=0\right]=\frac{67i\pi}{180}\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che la convoluzione delle due distribuzioni gaussiane

$$f_{1,2}(x)=e^{-g_{1,2}x^2}\,,$$

con $\operatorname{Re}\left(g_{1,2}\right)>0$, è ancora una distribuzione gaussiana e si determinino i valori dei parametri g_1 e g_2 affinché sia verificata l'identità

$$(f_1 * f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)\,.$$

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La convoluzione è definita come l'integrale

$$(f_1 * f_2)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-x')f_2(x')dx'=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-g_1(x-x')^2}e^{-g_2x'^2}dx'\,.$$

Consideriamo due procedure.

IL METODO DIRETTO

Calcoliamo direttamente la convoluzione

$$(f_1 * f_2)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-g_1(x-x')^2}e^{-g_2x'^2}dx'\,,=e^{-g_1x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(g_1+g_2)x'^2+2g_1xx'}dx'\,,$$

l'esponente della funzione integranda può essere posto nella forma dell'opposto del quadrato di un binomio, i cui due termini sono proporzionali l'uno a x e l'altro a x'. Esplicitamente, indicando con A e B, da determinare i coefficienti di x e x', si ha

$$\left(Ax+Bx'\right)^2=A^2x^2+B^2x'^2+2ABxx'=A^2x^2+(g_1+g_2)x'^2-2g_1xx'\,,$$

da cui si ottengono i valori dei coefficienti

$$B=\sqrt{g_1+g_2}\,,\qquad AB=A\sqrt{g_1+g_2}=-g_1\qquad\Rightarrow\qquad A=-\frac{g_1}{\sqrt{g_1+g_2}}\,.$$

Sommando e sottraendo ad esponente della funzione integranda il termine mancante, ovvero il quadrato del primo termine del binomio, $A^2x^2=g_1x^2/(g_1+g_2)^2$, si ha

$$\begin{aligned}(f_1 * f_2)(x)&=e^{-g_1x^2+g_1^2x^2/(g_1+g_2)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(g_1+g_2)x'^2+2g_1xx'-g_1^2x^2/(g_1+g_2)}dx'\,,\\&=e^{-x^2g_1g_2/(g_1+g_2)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{g_1+g_2}x'-g_1x/\sqrt{g_1+g_2}\right)^2}dx'\,.\end{aligned}$$

L'integrale è quello di una distribuzione gaussiana, al fine di verificarlo, facciamo la sostituzione

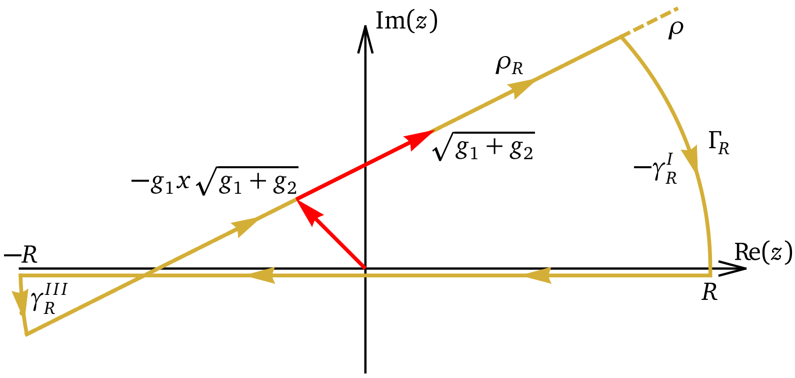
$$z=\sqrt{g_1+g_2}x'-g_1x/\sqrt{g_1+g_2}\,,\qquad dz=\sqrt{g_1+g_2}\,dx'\,,$$

il percorso d'integrazione è la retta ρ, tratteggiata nella figura sottostante, del piano complesso z passante per il punto $-g_1x/\sqrt{g_1+g_2}$ che si estende nella direzione identificata dal numero complesso $\sqrt{g_1+g_2}$, i due numeri complessi sono rappresentati in rosso, in notazione vettoriale nella figura. Poiché g_1 e g_2 hanno parti reali strettamente positive, tali saranno anche le parti reali della somma e della radice quadrata, da cui segue $\arg\left(\sqrt{g_1+g_2}\right) \in (-\pi/2, \pi/2)$. La retta ρ ha rappresentazione

$$\rho = \left\{z : z = -g_1 x\sqrt{g_1+g_2} + r\sqrt{g_1+g_2},\, r \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ne consegue che l'integrale della convoluzione assume la forma

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{e^{-x^2 g_1 g_2/(g_1+g_2)}}{\sqrt{g_1+g_2}} \int_\rho e^{-z^2} dz\,.$$



Consideriamo il percorso chiuso Γ_R che, come mostrato in figura, è l'unione di due archi γ_R^I e γ_R^{III}, centrati nell'origine e di raggio $R > 0$, appartenenti o al primo e terzo, o al quarto e secondo quadrante, il segmento reale simmetrico $[-R, R]$ e il tratto ρ_R della retta ρ, staccato dalla circonferenza centrata nell'origine di raggio R. L'integrale su tale percorso chiuso è nullo in quanto lo stesso non avvolge alcuna singolarità della funzione integranda. Poiché la funzione integranda è intera l'integrale su Γ_R non dipende dal parametro R, quindi

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz &= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\rho_R} e^{-z^2} dz + \int_{-\gamma_R^I} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_R^{III}} e^{-z^2} dz + \int_R^{-R} e^{-x^2} dx \right) \\ &= \int_\rho e^{-z^2} dz - \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\,, \end{aligned} \tag{1}$$

dove si sono usati i due limiti

$$\lim_{R\to\infty} \rho_R = \rho\,, \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R^{I,III}} e^{-z^2} dz = 0\,.$$

Il primo è ovvio e segue dalla definizione del segmento ρ_R, i secondi si ottengono, a loro volta, dal limite uniforme

$$\lim_{R\to\infty} e^{-z^2} z \stackrel{\text{U.}}{=} 0\,,$$

valido su entrambi gli archi γ_R^I e γ_R^{III}. Infatti su tali archi si ha la $z = Re^{i\theta_{I,III}}$, con $-\pi/4 < \theta_I < \pi/4$ e $3\pi/4 < \theta_{III} < 5\pi/4$, da cui

$$0 \le \left| e^{-z^2} z \right| = Re^{-\mathrm{Re}\left(z^2\right)} = Re^{-R^2\cos^2\left(2\theta_{I,III}\right)} = Re^{-R^2\delta} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\,,$$

dove $\delta > 0$ è il minimo di entrambi i valori $\cos^2(\theta_{I,III})$, che, come conseguenza delle limitazioni degli angoli $\theta_{I,III}$, è sempre strettamente maggiore di zero, infatti gli angoli $2\theta_{I,III}$ non assumono mai i valori $\pm\pi/2$ e $3\pi/2$, in cui la funzione coseno si annulla.
Dall'identità dell'equazione (1), si ha

$$\int_\rho e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,,$$

e quindi l'integrale di convoluzione vale

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{e^{-x^2 g_1 g_2/(g_1+g_2)}}{\sqrt{g_1+g_2}} \int_\rho e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{g_1+g_2}}\, e^{-x^2 g_1 g_2/(g_1+g_2)} .$$

Questo risultato dimostra che la convoluzione di due distribuzioni gaussiane è una distribuzione gaussiana.
Rimane da dimostrare l'identità tra la convoluzione e il prodotto, cioè

$$(f_1 * f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) ,$$

che, alla luce del risultato precedente, diventa

$$\sqrt{\frac{\pi}{g_1+g_2}}\, e^{-x^2 g_1 g_2/(g_1+g_2)} = e^{-x^2(g_1+g_2)}$$

e si verifica se

$$\sqrt{\frac{\pi}{g_1+g_2}} = 1 , \qquad \frac{g_1 g_2}{g_1+g_2} = g_1 + g_2 .$$

Dal quadrato della prima si ha: $g_2 = \pi - g_1$, che, sostituito nella seconda $g_1 g_2 = (g_1+g_2)^2$, dà

$$g_1(\pi - g_1) = \pi^2 \quad \Rightarrow \quad g_1^2 - \pi g_1 + \pi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_1^{\pm} = \pi \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \pi\, e^{\pm i\pi/3} ,$$

avendo anche $g_1 g_2 = (g_1+g_2)^2 = \pi^2$ si hanno le soluzioni per g_2

$$g_2^{\pm} = \frac{\pi^2}{g_1^{\pm}} = \pi\, e^{\mp i\pi/3} .$$

I valori ottenuti soddisfano la condizione di positività delle parti reali, in particolare sono coppie di complessi coniugati, infatti

$$g_1^{\pm} = \pi e^{\pm i\pi/3} = \pi \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} , \qquad g_2^{\pm} = \pi e^{\pm i\pi/3} = \pi \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} .$$

Le funzioni così ottenute e la loro convoluzione, che coincide con il prodotto, considerando la soluzione con il segno alto, sono

$$f_1(x) = e^{-x^2(1+i\sqrt{3})/2} , \qquad f_2(x) = e^{-x^2(1-i\sqrt{3})/2} , \qquad (f_1 * f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) = e^{-x^2 \pi} .$$

Il metodo della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier del primo membro dell'identità cercata, cioè della convoluzione, è

$$\mathscr{F}_k\left[(f_1 * f_2)\right] = \sqrt{2\pi}\, \mathscr{F}_k\left[f_1\right] \mathscr{F}_k\left[f_2\right] .$$

Poiché la trasformata di Fourier di una distruzione gaussiana è una distribuzione gaussiana e il prodotto di distribuzioni gaussiane è ancora una distribuzione gaussiana, si è dimostrato che la convoluzione è una distribuzione gaussiana.
Utilizziamo il metodo della trasformata di Fourier per calcolare la convoluzione, infatti, la trasformata di Fourier della distribuzione gaussiana è nota e vale

$$\mathscr{F}_k\left[f_{1,2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2 g_{1,2}}} e^{-k^2/(4 g_{1,2})} .$$

Ne consegue che la trasformata di Fourier della convoluzione è

$$\mathscr{F}_k\left[(f_1 * f_2)\right] = \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2g_1}} e^{-k^2/(4g_1)} \frac{1}{\sqrt{2g_2}} e^{-k^2/(4g_2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2 g_1 g_2}} e^{-k^2(g_1+g_2)/(4 g_1 g_2)} .$$

L'anti-trasformata di Fourier della trasformata di Fourier della convoluzione, ovvero la quantità cercata, è

$$\begin{aligned}(f_1 * f_2)(x) &= \mathscr{F}_{-x}\left[\mathscr{F}_k\left[(f_1 * f_2)\right]\right]\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2g_1g_2}}\,\mathscr{F}_{-x}\left[e^{-k^2(g_1+g_2)/(4g_1g_2)}\right]\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2g_1g_2}}\sqrt{\frac{2g_1g_2}{g_1+g_2}}\,e^{-x^2g_1g_2/(g_1+g_2)}\end{aligned}$$

in definitiva

$$(f_1 * f_2)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{g_1+g_2}}\,e^{-x^2g_1g_2/(g_1+g_2)}\,.$$

Per ciò che concerne la determinazione dei valori dei parametri g_1 e g_2 in corrispondenza dei quali si verifichi l'identità

$$(f_1 * f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)\,,$$

si procede come nel caso precedente.

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}\,.$$

Suggerimento. Potrebbe essere di notevole aiuto l'utilizzo dello sviluppo di Mittag-Leffler della funzione, che consta della somma di soli quattro termini.

Soluzione del quinto problema

Seguendo saggiamente il suggerimento definiamo lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione, che è meromorfa ed ha solo due poli doppi in $x_\pm = \pm 1$. Ne consegue che lo sviluppo cercato ha solo le due parti principali delle serie di Laurent centrate nei due poli, ciascuna parte principale consta di due termini, essendo i poli di ordine due. Inoltre, la funzione è regolare all'infinito, cioè nel limite $z \to \infty$, essa tende uniformemente a zero per cui la parte intera è nulla. Alla luce di queste considerazioni e valutando la funzione nel piano complesso e quindi in z anziché in x, lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$f(z) = \frac{C^-_{-2}}{(z-z_-)^2} + \frac{C^-_{-1}}{z-z_-} + \frac{C^+_{-2}}{(z-z_+)^2} + \frac{C^+_{-1}}{z-z_+} = \frac{C^-_{-2}}{(z+1)^2} + \frac{C^-_{-1}}{z+1} + \frac{C^+_{-2}}{(z-1)^2} + \frac{C^+_{-1}}{z-1}\,.$$

I quattro coefficienti di Laurent possono essere calcolati con la ben nota formula integrale

$$C_k = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_0}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\,,$$

per il k-esimo coefficiente della serie di Laurent della funzione $f(z)$ centrata in $z = z_0$, che converge nella corona circolare contenente il percorso chiuso γ_0, che avvolge una volta il punto z_0, cioè tale che $n(\gamma_0, z_0) = 1$. I quattro coefficienti delle parti principali delle due serie di Laurent con centri nei poli doppi $z_\pm = \pm 1$ della funzione data sono

$$\begin{aligned}C^-_{-2} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_-}\frac{f(z)}{(z+1)^{-2+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_-}\frac{dz}{(z-1)^2(z+1)} = \left.\frac{1}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{1}{4}\,,\\ C^-_{-1} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_-}\frac{f(z)}{(z+1)^{-1+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_-}\frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2} = \left.\frac{d}{dz}\frac{1}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \left.\frac{-2}{(z-1)^3}\right|_{z=-1} = \frac{1}{4}\,,\\ C^+_{-2} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_+}\frac{f(z)}{(z-1)^{-2+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_+}\frac{dz}{(z-1)(z+1)^2} = \left.\frac{1}{(z+1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{1}{4}\,,\\ C^+_{-1} &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_+}\frac{f(z)}{(z-1)^{-1+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_+}\frac{dz}{(z-1)^2(z+1)^2} = \left.\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+1)^2}\right|_{z=1} = \left.\frac{-2}{(z+1)^3}\right|_{z=1} = -\frac{1}{4}\,,\end{aligned}$$

e quindi si ha lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}\right).$$

Dovendo fare la trasformata di Fourier, possiamo scrivere i poli doppi in forma di derivate di poli semplici, cioè

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(-\frac{d}{dz}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+1}-\frac{d}{dz}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}\right).$$

Sfruttando la linearità della trasformata di Fourier e la regola di trasformazione della derivata di una funzione, si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[f]=\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]&=\frac{1}{4}\mathscr{F}_k\left[-\frac{d}{dx}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{d}{dx}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right]\\&=\frac{1}{4}\left(-ik\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+1}\right]+\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+1}\right]-ik\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x-1}\right]-\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x-1}\right]\right),\end{aligned}$$

dobbiamo quindi calcolare le due trasformate di Fourier $\mathscr{F}_k[1/(x\pm 1)]$.
Consideriamo il caso generale del polo semplice reale $-a\in\mathbb{R}$, cioè

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+a}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x=-a}dx\,,$$

dove si considera il valore principale poiché il polo appartiene al percorso d'integrazione. Usando la formula di Sokhotsky-Plemelj si ha

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+a}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x+a}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x-a+i\epsilon}dx+i\pi e^{-ikx}\big|_{x=a}\right),$$

con $\epsilon\to 0^+$, per cui il polo $-a-i\epsilon$ della funzione integranda dell'ultimo membro appartiene al semipiano della parti immaginarie negative. Ne consegue che, sfruttando il lemma di Jordan, per valori negativi di k, l'integrale è nullo, poiché il percorso deve essere chiuso nel semipiano delle parti immaginarie positive che non contiene singolarità. Per valori positivi di k, invece, il percorso va chiuso nel semipiano della parti immaginarie negative, che contiene l'unica singolarità dell'integranda, il polo semplice in $a-i\epsilon$, in tal caso l'integrale è pari a l'opposto di $2i\pi$ volte il residuo, l'opposto perché il percorso chiuso è orientato in senso negativo, cioè orario. In definitiva si ha

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+a}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\begin{array}{ll}0+i\pi e^{ika}=i\pi e^{ika} & k<0\\[2ex] -2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^{-ikz}}{z+a},z=-a\right]+i\pi e^{ika}=-i\pi e^{ika} & k>0\end{array}\right\}=-\mathrm{Segno}[k]\,i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ika}\,,$$

quindi le due trasformate di Fourier cercate, che si hanno per $a=\pm 1$, valgono

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x\pm 1}\right]=-\mathrm{Segno}[k]\,i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\pm ik}.$$

Alla luce di questo risultato, la trasformata di Fourier della funzione $f(x)=1/\left(x^2+1\right)^2$ richiesta dal problema vale

$$\mathscr{F}_k[f]=-\mathrm{Segno}[k]i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(-ike^{ik}+e^{ik}-ike^{-ik}-e^{-ik}\right)=-\mathrm{Segno}[k]i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(-2ik\cos(k)+2i\,\mathrm{sen}(k)\right),$$

che, facendo le opportune semplificazioni, assume la forma finale

$$\mathscr{F}_k[f]=\mathrm{Segno}[k]\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{sen}(k)-k\cos(k)\right).$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si consideri la successione di operatori

$$\left\{\hat{A}_n = \left(\hat{A}^n - \hat{I}\right)\left(\hat{A} - \hat{I}\right)^{-1}\right\}_{n=0}^{\infty},$$

dove l'operatore $\hat{A}$ e quindi anche il generico $\hat{A}_n$, con $n \in \mathbb{N}$, sono definiti nello spazio di Hilbert a tre dimensione E_3.
Dopo aver determinato le condizioni di convergenza, si calcoli l'operatore limite della successione.
Nel caso in cui la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base canonica sia

$$\hat{A} \;\hookleftarrow\; A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si ottengano gli spettri discreti degli operatore $\hat{A}$ e $\hat{A}_n$, ovvero dell'n-esimo operatore della successione.
Infine, si stabilisca se questa particolare successione sia convergente o divergente.

Soluzione del sesto Problema

Il primo fattore dell'n-esimo della successione operatore della successione, con $n \in \mathbb{N}$, può essere ulteriormente fattorizzato come

$$\hat{A}^n - \hat{I} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\hat{A} - \lambda_k \hat{I}\right),$$

dove il numero $\lambda_k = e^{2ik\pi/n}$ è la k-esima delle n radici n-esime dell'unità, con $k = 0, 1, \ldots, n-1$, ovvero la k-esima soluzione dell'equazione $z^n - 1 = 0$. La fattorizzazione segue anche dal fatto che l'operatore $\hat{A}$ commuta con l'operatore identità. Estraendo il primo fattore, quello per $k = 0$ e $\lambda_k = 1$, si ha

$$\hat{A}^n - \hat{I} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\hat{A} - \lambda_k \hat{I}\right)\right)\left(\hat{A} - \hat{I}\right),$$

che sostituita nell'espressione dell'n-esimo operatore della successione dà

$$\hat{A}_n = \left(\hat{A}^n - \hat{I}\right)\left(\hat{A} - \hat{I}\right)^{-1} = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\hat{A} - \lambda_k \hat{I}\right)\right)\left(\hat{A} - \hat{I}\right)\left(\hat{A} - \hat{I}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\hat{A} - \lambda_k \hat{I}\right).$$

Inoltre, sfruttando la procedura per ottenere la somma parziale $(n-1)$-esima della serie geometrica di ragione z, ovvero, si moltiplica numeratore e denominatore per $(z-1)$, cosicché

$$\sum_{j=0}^{n-1} z^j = \frac{z-1}{z-1}\sum_{j=0}^{n-1} z^j = \frac{z^n - 1}{z-1},$$

si ha, per il polinomio, l'espressione

$$z^n - 1 = (z-1)\sum_{j=0}^{n-1} z^j,$$

che, considerando la fattorizzazione,

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \lambda_k) = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \lambda_k)$$

conduce all'identità

$$\sum_{j=0}^{n-1} z^j = \prod_{k=1}^{n-1}(z - \lambda_k).$$

Quest'ultima vale anche al livello degli operatori, cioè

$$\hat{A}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(\hat{A} - \lambda_k \hat{I}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}^j = \hat{I} + \hat{A} + \hat{A}^2 + \cdots \hat{A}^{n-1} .$$

Si evince che l'n-esimo operatore della successione rappresenta la somma parziale $(n-1)$-esima della serie geometrica avente come ragione l'operatore $\hat{A}$, ne consegue che la condizione di convergenza della serie è $\left\|\hat{A}\right\| < 1$, in questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} \hat{A}_n = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}^j = \left(\hat{I} - \hat{A}\right)^{-1} .$$

Questo risultato equivale al valore limite

$$\lim_{n\to\infty} \hat{A}^n = \hat{0} ,$$

dove $\hat{0}$ indica l'operatore nullo. Questo limite, a sua volta, segue dal fatto che la norma dell'operatore $\hat{A}$ sia strettamente minore dell'unità, per tanto la norma del limite tende a zero e quindi il limite è l'operatore nullo.
Lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ nel caso in cui la matrice che lo rappresenta rispetto alla base canonica sia quella data, si ottiene risolvendo l'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(A - I\alpha) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 2-\alpha & 0 & 2 \\ 0 & -1-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ \left[(2-\alpha)(\alpha-1)+2\right](\alpha+1) &= 0 \\ -\alpha(\alpha-3)(\alpha+1) &= 0 , \end{aligned}$$

i tre autovalori e quindi gli elementi dello spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ sono

$$\alpha_1 = -1 , \qquad \alpha_2 = 0 , \qquad \alpha_3 = 3 .$$

Per calcolare gli autovalori dell'n-esimo operatore della successione, ne sfruttiamo l'espressione in termini della somma di potenze dell'operatore $\hat{A}$. Indicando con $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^{3}$ l'insieme degli autovettori dello stesso operatore $\hat{A}$, per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \alpha_k |a_k\rangle , \qquad k = 1,2,3 ,$$

questi sono anche autovettori dell'operatore $\hat{A}_n$, infatti

$$\hat{A}_n|a_k\rangle = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}^j\right)|a_k\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}^j|a_k\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_k^j |a_k\rangle = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_k^j\right)|a_k\rangle = \frac{\alpha_k^n - 1}{\alpha_k - 1}|a_k\rangle \equiv \sigma_k^{(n)}|a_k\rangle ,$$

dove abbiamo ancora una volta sfruttato la procedura di calcolo della somma parziale della serie geometrica e indicato con $\sigma_k^{(n)}$ il k-esimo autovalore dell'operatore $\hat{A}_n$, con $k = 1,2,3$ e $n \in \mathbb{N}$. Usando i autovalori noti dell'operatore $\hat{A}$ si hanno

$$\sigma_1^{(n)} = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} , \qquad \sigma_2^{(n)} = 1 , \qquad \sigma_3^{(n)} = \frac{3^n - 1}{2} .$$

L'espressione del terzo autovalore può essere ulteriormente sviluppata come

$$\sigma_3 = \frac{(2+1)^n - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - 1\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} .$$

Infine, è immediato osservare come la norma dell'operatore $\hat{A}$ non sia limitata dall'unità, ovvero come non valga la condizione necessaria alla convergenza e che quindi la successione, nel caso particolare del problema, sia divergente. A tal fine, consideriamo la definizione di norma

$$\left\|\hat{A}\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\{ \left\|\hat{A}|x\rangle\right\| \right\} ,$$

e verifichiamo che essa è limitata inferiormente dal modulo dell'autovalore con modulo maggiore. Infatti, usando l'autovettore $|a_3\rangle$, di norma unitaria, relativo all'autovalore $\alpha_3 = 3$, di norma maggiore, si ha

$$\left\|\hat{A}\right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\{ \left\|\hat{A}|x\rangle\right\| \right\} \geq \left\|\hat{A}|a_3\rangle\right\| = \|3|a_3\rangle\| = 3\,,$$

da cui, avendo $\left\|\hat{A}\right\| \geq 3$, si evince la divergenza della successione.