Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 21 febbraio 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$S(a) = \int_0^\infty \frac{x^a \ln(x)}{x^2+1} dx\,,$$

stabilendo per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ si ha convergenza.
Suggerimento. Si usi un percorso che aggira il taglio lungo il semiasse reale positivo.

Soluzione del primo problema

L'integranda

$$f(z) = \frac{z^a \ln(z)}{z^2+1}$$

è una funzione polidroma con punti di diramazione in $z=0$ e all'infinito. Inoltre, per $\mathrm{Re}(a) > -1$, ha solo due poli semplici in $z_{1,2} = \pm i$. La polidromia è generata sia dal logaritmo che dalla potenza z^a, per i valori di a tali che $a \notin \mathbb{Z}$. Le condizioni di convergenza si ottengono richiedendo l'integrebalità agli estremi $x=0$ e $x=\infty$. In particolare, nell'origine, il comportamento dell'integranda e la conseguente condizione di integrabilità sul parametro a sono

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} z^a \ln(x)\,, \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(a) > -1\,.$$

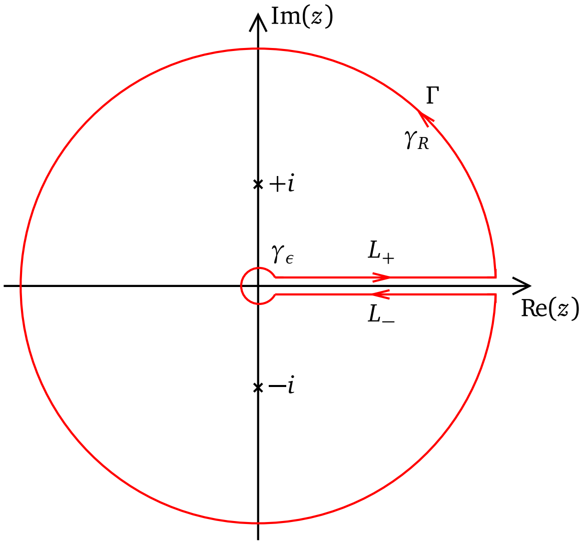
All'infinito si hanno il comportamento la condizione di integrabilità

$$f(x) \underset{x\to \infty}{\sim} z^{a-2} \ln(x)\,, \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(a) < 1\,.$$

Il dominio di convergenza in a dell'integrale è $D = \{a \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Re}(a) < 1\}$, ovvero il rettangolo infinito, parallelo all'asse immaginario delle parti reali comprese tra -1 ed 1, nel piano complesso di a. Poiché $\mathrm{Re}(a) > -1$, le uniche singolarità dell'integranda sono i poli semplici $z_{1,2} = \pm i$. Usiamo la determinazione principale $\arg(z) \in (0, 2\pi)$, quindi il taglio nel dominio dell'integranda coincide con il semiasse reale positivo.

Consideriamo il percorso di integrazione chiuso Γ mostrato in figura, composto dai tratti rettilinei $L_\pm$, sopra e sotto il taglio e dagli archi γ_R e γ_ϵ, centrati nell'origine di raggi R e ϵ rispettivamente, ovvero

$$\Gamma = L_+ \cup L_- \cup \gamma_R \cup (-\gamma_\epsilon)\,.$$



L'integrale su Γ nei limiti $R\to\infty$ e $\epsilon \to 0$ è dato dalla somma dei residui in z_1 e z_2, ovvero

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0} \oint_\Gamma f(z)dz = 2i\pi \left(\mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), z_2\right]\right)\,.$$

I residui in $z_1 = +i = e^{i\pi/2}$ e $z_2 = -i = e^{3i\pi/2}$ sono

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right] = \frac{e^{ia\pi/2} i\pi/2}{2i} = \frac{e^{ia\pi/2}\pi}{4}\,,$$

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_2\right] = \frac{e^{3ia\pi/2} 3i\pi/2}{-2i} = -\frac{3e^{3ia\pi/2}\pi}{4}\,.$$

In definitiva

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0} \oint_\Gamma f(z)dz = \frac{i\pi^2}{2}\left(e^{ia\pi/2} - 3e^{3ia\pi/2}\right)\,.$$

D'altro canto l'integrale può essere calcolato come somme dei contributi

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma} f(z)dz &= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{L_+} f(z)dz + \int_{L_-} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\epsilon}^{R} \frac{x^a\ln(x)}{x^2+1}dx - \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{2ai\pi}x^a(\ln(x)+2i\pi)}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz\right)\\
&= S(a)\left(1-e^{2ia\pi}\right) - 2i\pi e^{2ia\pi}\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx + \lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\gamma_R} f(z)dz - \int_{\gamma_\epsilon} f(z)dz\right).
\end{aligned}
$$

Usando i lemmi per l'integrazione sugli archi infinitesimi ed infiniti si dimostra gli integrali su γ_ϵ e γ_R sono nulli. Questo risultato è conseguenza delle condizioni di convergenza, ovvero del fatto che $-1 < \mathrm{Re}(a) < 1$.
Usando la formula per l'integrazione di funzioni polidrome si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}dx &= -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\mathrm{sen}(\pi a)}\left(\mathrm{Res}\left[f(z), z_1\right] + \mathrm{Res}\left[f(z), z_2\right]\right)\\
&= -\frac{\pi e^{-ia\pi}}{\mathrm{sen}(\pi a)}\left(\frac{e^{ia\pi/2}}{2i} + \frac{e^{3ia\pi/2}}{-2i}\right)\\
&= \frac{\pi\,\mathrm{sen}(\pi a/2)}{\mathrm{sen}(\pi a)} = \frac{\pi}{2\cos(\pi a/2)}.
\end{aligned}
$$

Sostituiamo questo risultato nell'integrale precedente e usiamo il valore dello stesso integrale ottenuto come somma dei residui

$$
\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma} f(z)dz = S(a)\left(1-e^{2ia\pi}\right) - \frac{i\pi^2 e^{2ia\pi}}{\cos(\pi a/2)} = \frac{i\pi^2}{2}\left(e^{ia\pi/2} - 3e^{3ia\pi/2}\right),
$$

risolviamo rispetto a $S(a)$

$$
\begin{aligned}
S(a) &= \left[e^{ia\pi/2} - 3e^{3ia\pi/2} + \frac{2e^{2ia\pi}}{\cos(\pi a/2)}\right]\frac{i\pi^2/2}{1-e^{2ia\pi}} = \left[e^{ia\pi/2} - 3e^{3ia\pi/2} + \frac{4e^{2ia\pi}}{e^{ia\pi/2}+e^{-ia\pi/2}}\right]\frac{i\pi^2/2}{1-e^{2ia\pi}}\\
&= \frac{1-2e^{ia\pi}+e^{2ia\pi}}{e^{ia\pi/2}+e^{-ia\pi/2}}\,\frac{i\pi^2/2}{1-e^{2ia\pi}} = \frac{e^{-ia\pi}-2+e^{ia\pi}}{e^{ia\pi/2}+e^{-ia\pi/2}}\,\frac{i\pi^2/2}{e^{-ia\pi}-e^{ia\pi}} = \frac{(2i\,\mathrm{sen}(a\pi/2))^2}{2\cos(a\pi/2)}\,\frac{i\pi^2/2}{-2i\,\mathrm{sen}(a\pi)},
\end{aligned}
$$

in definitiva

$$
S(a) = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{\mathrm{sen}(a\pi/2)}{\cos^2(a\pi/2)} = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{\tan(a\pi/2)}{\cos(a\pi/2)}.
$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$
J_k = \oint_{C_k}\frac{dz}{z(1-\cosh(z))}, \qquad C_k = \{z : |z| = (2k+1)\pi\}, \qquad k\in\mathbb{N},
$$

con la circonferenza C_k orientata in senso antiorario.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

L'integranda ha un polo triplo in $z = 0$ e poli doppi in $z_m = 2im\pi$, con $m\in\mathbb{Z}$ e $m\neq 0$. Nella circonferenza C_k di raggio $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{N}$ ci sono i $(2k+1)$ poli $2im\pi$, con $m = -2k, -2k+1, \ldots, 0, 1, \ldots, 2k-1, 2k$. Usando il teorema dei residui, si ha

$$
J_k = 2i\pi\sum_{m=-k}^{k}\mathrm{Res}\left[f(z), 2im\pi\right].
$$

Per calcolare i residui otteniamo i coefficienti $C_{-1}^{(m)}$ degli sviluppi di Laurent dell'integranda centrati in ciascuno dei poli $2im\pi$, con $m = -2k, \ldots, 2k$. Sfruttando gli sviluppi di Taylor noti del coseno iperbolico e la serie geometrica, nell'origine si ha

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(1-\cosh(z))} = -\frac{1}{z(z^2/2! + z^4/4! + O(z^6))} = -\frac{1}{z^3/2!\,(1+2z^2/4! + O(z^4))} \\
&= -\frac{2}{z^3}\left[1 - \left(\frac{2z^2}{4!} + O(z^4)\right) + \left(\frac{2z^2}{4!} + O(z^4)\right)^2 + \ldots\right] \\
&= -2\frac{1}{z^3} + \frac{1}{6}\frac{1}{z} + O(z),
\end{aligned}
$$

ne consegue che

$$
\operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{6}.
$$

Nel genetico polo doppio $z_m = 2im\pi \neq 0$

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(1-\cosh(z))} = \frac{1}{z - z_m + z_m}\sum_{j=-2}^{\infty} A_j^{(m)}(z-z_m)^j = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{(z-z_m)^l}{z_m^{l+1}} \sum_{j=-2}^{\infty} A_j^{(m)}(z-z_m)^j \\
&= \frac{1}{(z-z_m)^2}\frac{A_{-2}^{(m)}}{z_m} + \frac{1}{z-z_m}\left(\frac{A_{-1}^{(m)}}{z_m} - \frac{A_{-2}^{(m)}}{z_m^2}\right) + O(1).
\end{aligned}
$$

I coefficienti $\left\{A_j^{(m)}\right\}_{j=-2}^{\infty}$ sono quelli della funzione $(1-\cosh(z))^{-1}$, lo sviluppo di Laurent è

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\cosh(z)} &= -\frac{2}{z^2}\frac{1}{1+2z^2/4! + 2z^4/6! + O(z^6)} \\
&= -\frac{2}{z^2}\left[1 - \left(\frac{2z^2}{4!} + \frac{2z^4}{6!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{2z^2}{4!} + \frac{2z^4}{6!} + O(z^6)\right)^2 + \ldots\right] \\
&= -2\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + O(z^2),
\end{aligned}
$$

ne consegue che i primi tre coefficienti sono

$$
A_{-2}^{(m)} = -2, \qquad A_{-1}^{(m)} = 0, \qquad A_0^{(m)} = \frac{1}{6}.
$$

Il residuo in $z_m = 2im\pi \neq 0$ è quindi

$$
\operatorname{Res}[f(z), 2im\pi] = \frac{A_{-1}^{(m)}}{z_m} - \frac{A_{-2}^{(m)}}{z_m^2} = \frac{2}{(2im\pi)^2} = -\frac{1}{2m^2\pi^2}.
$$

L'integrale cercato vale

$$
J_k = 2i\pi\left(-\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m^2\pi^2} + \frac{1}{6}\right).
$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si calcolino i primi quattro coefficienti della serie di Laurent, centrata nell'origine, della funzione

$$
q(z) = \frac{z^2 + \pi^2}{\operatorname{senh}(z)}
$$

e si determini il raggio di convergenza della stessa serie.

Soluzione del terzo problema

La funzione ha poli semplici in corrispondenza degli zeri della funzione seno iperbolico, ad eccezione di $z_{\pm 1} = \pm i\pi$, che, essendo cancellati dagli zeri del polinomio a numeratore, rappresentano singolarità eliminabili. La funzione è dispari, ne consegue che la serie di Laurent centrata nell'origine ha solo potenze dispari, ovvero tutti i coefficienti pari sono nulli. In definitiva

$$q(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} C_k z^k = C_{-1} z^{-1} + C_1 z + C_3 z^3 + C_5 z^5 + O(z^7)\,,$$

dove abbiamo scritto i coefficienti da calcolare. A tal fine usiamo la serie di Taylor della funzione seno iperbolico

$$\operatorname{senh}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)\,,$$

quindi la funzione $q(z)$ può essere scritta come

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{z^2+\pi^2}{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)} = \frac{z^2+\pi^2}{z\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)} \\ &= \left(z + \frac{\pi^2}{z}\right)\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^2 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^3 + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Si vede facilmente che non si hanno potenze pari in quanto i due fattori hanno rispettivamente solo potenze dispari e solo potenze pari.
La potenza z^{-1} può essere ottenuta con un solo prodotto

$$q(z) = \left(z + \frac{\pi^2}{z}\right)\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^2 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^3 + \ldots\right],$$

quindi

$$C_{-1} = \pi^2\,.$$

La potenza z può essere ottenuta con i due prodotti

$$q(z) = \left(z + \frac{\pi^2}{z}\right)\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^2 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^3 + \ldots\right],$$

quindi

$$C_1 = 1 - \frac{\pi^2}{6}\,.$$

La potenza z^3 si ottiene con i tre prodotti

$$q(z) = \left(z + \frac{\pi^2}{z}\right)\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^4}{(3!)^2} + O(z^6)\right) - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6)\right)^3 + \ldots\right],,$$

dove si è svolto il quadrato della serie di potenze pari nella parentesi quadra. Il corrispondente coefficiente di Laurent è

$$C_3 = -\frac{1}{3!} + \pi^2\left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{7\pi^2}{360}\,.$$

Infine la potenza z^5 si ottiene con cinque prodotti

$$q(z) = \left(z + \frac{\pi^2}{z}\right)\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + O(z^8)\right) + \left(\frac{z^4}{(3!)^2} + \frac{2z^6}{3!5!} + O(z^8)\right) - \left(\frac{z^6}{(3!)^3} + O(z^8)\right) + \ldots\right],$$

in questo si è svolto anche il cubo della serie di potenze pari nella parentesi quadra. Il corrispondente coefficiente di Laurent è

$$C_5 = -\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2} + \pi^2\left(-\frac{1}{7!} + \frac{2}{3!5!} - \frac{1}{(3!)^3}\right) = \frac{7}{360} - \frac{31\pi^2}{15120}.$$

Il raggio di convergenza coincide con la distanza dall'origine, centro dello sviluppo in serie di Laurent, del polo più vicino. Poiché, come detto, gli zeri della funzione seno iperbolico $z_{\pm 1} = \pm i\pi$ rappresentano delle singolarità eliminabili, i poli più vicini sono gli zeri successivi, $z_{\pm 2} = \pm 2i\pi$. Ne consegue che il raggio di convergenza è

$$R = 2\pi\,.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Usando le serie trigonometriche di Fourier della funzione identità $f(x) = x$ e della funzione $g(x) = x^3$, si calcoli la somma della serie numerica

$$S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3}\,.$$

Soluzione del quarto problema

La serie trigonometrica di Fourier di una funzione $h(x)$ è

$$h(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)\right],$$

con i coefficienti

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)h(x)dx\,, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(kx)h(x)dx\,.$$

Poiché entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono dispari, sono non nulli solo i coefficienti $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$. Nel caso della funzione identità

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(kx)x dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)x}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx\right] = -\frac{2\cos(k\pi)}{k} = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}\,.$$

Quindi la serie di Fourier

$$x \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\,.$$

Per la funzione $g(x) = x^3$ si ha

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(kx)x^3 dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)x^3}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)x^2 dx\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi^3(-1)^k}{k} + \frac{3\mathrm{sen}(kx)x^2}{k^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{6}{k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(kx)x dx\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi^3(-1)^k}{k} - \frac{6}{k^2}\pi(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\right]\\
&= 2(-1)^{k+1}\frac{\pi^2k^2-6}{k^3}\,,
\end{aligned}$$

e quindi la serie

$$x^3 \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\pi^2k^2-6}{k^3}\mathrm{sen}(kx)\,.$$

Valutiamo la serie in $x=\pi/2$ dove si ha convergenza puntuale, ovvero sostituiamo il simbolo di Hurwitz con "="

$$\begin{aligned}\frac{\pi^3}{8} &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\pi^2k^2-6}{k^3}\mathrm{sen}(k\pi/2)\\ &= 2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{2j+2}\frac{\pi^2(2j+1)^2-6}{(2j+1)^3}\mathrm{sen}((2j+1)\pi/2)\\ &= 2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j}\left(\frac{\pi^2}{2j+1}-\frac{6}{(2j+1)^3}\right),\end{aligned}$$

otteniamo la serie cercata in funzione di un'altra serie,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^3}=\left(-\frac{\pi^3}{8}+2\pi^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}\right)\frac{1}{12}\,.$$

La serie del membro di destra si calcola usando la serie di Fourier della funzione identità, valutata sempre in $x=\pi/2$, infatti

$$\frac{\pi}{2}=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{sen}(k\pi/2)}{k}=2\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{2j+2}\frac{(-1)^j}{2j+1}\,,$$

da cui

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}=\frac{\pi}{4}\,.$$

Ne consegue che la somma cercata vale

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^3}=\left(-\frac{\pi^3}{8}+2\pi^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{2j+1}\right)\frac{1}{12}=\left(-\frac{\pi^3}{8}+\frac{\pi^3}{2}\right)\frac{1}{12}=\frac{\pi^3}{32}\,.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Data l'equazione matriciale

$$[A,\sigma_1]+\{A,\sigma_2\}=\alpha A$$

dove σ_1 e σ_2 sono le prime due matrici di Pauli, si determinino i valori del parametro $\alpha\in\mathbb{C}$ e le matrici A, 2×2 a elementi complessi, che verificano l'equazione.

Soluzione del quinto problema

L'insieme $\{\sigma_k\}_{k=0}^3$, composto dalle matrici di Pauli e dall'indentità σ_0, rappresenta una base nello spazio delle matrici 2×2 ad elementi complessi. Ne consegue che la matrice cercata può essere decomposta come

$$A=\sum_{k=0}^{3}a_k\sigma_k\,,$$

dove i coefficienti sono

$$a_k=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\sigma_kA]\,,\qquad k=0,1,2,3\,.$$

Usando l'algebra delle matrici di Pauli, ovvero

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkm}\sigma_m\,, \qquad \{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\sigma_0\,, \qquad j,k,m = 1,2,3$$

includendo anche σ_0, si hanno

$$[\sigma_j, \sigma_0] = 0\,, \qquad \{\sigma_j, \sigma_0\} = 2\sigma_j\,, \qquad j = 0,1,2,3\,.$$

Consideriamo il membro sinistro (MS) dell'equazione, trattando a parte il termine in σ_0,

$$\begin{aligned}\mathrm{MS} &= \sum_{k=1}^{3} a_k \left([\sigma_k, \sigma_1] + \{\sigma_k, \sigma_2\}\right) + 2a_0\sigma_2 = \sum_{k=1}^{3} a_k \left(2i\epsilon_{k,1,j}\sigma_j + 2\delta_{k2}\sigma_0\right) + 2a_0\sigma_2 \\ &= 2ia_3\sigma_2 - 2ia_2\sigma_3 + 2a_2\sigma_0 + 2a_0\sigma_2 = 2a_2\sigma_0 + (2ia_3 + 2a_0)\sigma_2 - 2ia_2\sigma_3\,.\end{aligned}$$

Il membro destro (MD) è

$$\mathrm{MD} = \alpha \sum_{k=0}^{3} a_k\sigma_k\,,$$

eguagliando i coefficienti delle stesse matrici della base, si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} -\alpha a_0 + 2a_2 = 0 \\ -\alpha a_1 = 0 \\ 2a_0 - \alpha a_2 + 2ia_3 = 0 \\ -2ia_2 - \alpha a_3 = 0 \end{cases}.$$

La soluzione non banale si ha nel caso in cui il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo, per cui

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\alpha & 2i \\ 0 & 0 & -2i & -\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ \alpha^2(\alpha^2 - 4) - 4\alpha^2 &= 0 \\ \alpha^2(\alpha^2 - 8) &= 0\,,\end{aligned}$$

le quattro soluzioni dell'equazione precedente, che è l'equazione secolare dell'operatore, sono gli autovalori

$$\alpha_{1,2} = 0\,, \qquad \alpha_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}\,.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2i \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ w_k \end{pmatrix} = \alpha_k \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \\ w_k \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3,4\,,$$

da si hanno le equazioni

$$2z_k = \alpha_k x_k\,, \qquad 0 = \alpha_k y_k\,, \qquad 2x_k + 2iw_k = \alpha_k z_k\,, \qquad -2iz_k = \alpha_k w_k\,.$$

Nei casi $\alpha_{1,2} = 0$, posto $x_1 = 1$ e $y_1 = 0$, si hanno

$$z_1 = 0\,, \qquad w_1 = i\,,$$

mentre ponendo $x_2 = 0$ e $y_2 = 1$ possiamo scegliere arbitrariamente anche le altre due componenti che fissiamo a zero, ovvero $z_2 = w_2 = 0$. Infine, nei casi $\alpha_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$, con $x_{3,4} = 1$, si hanno

$$y_{3,4} = 0\,, \qquad z_{3,4} = \pm\sqrt{2}\,, \qquad w_{3,4} = -2i(\pm\sqrt{2})/(\pm 2\sqrt{2}) = -i\,.$$

Gli autovettori sono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -i \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ i \end{pmatrix}.$$

Quindi, le matrici A che verificano l'equazione iniziale sono

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_0 + i\sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}, \\
A_2 &= \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_3 &= \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sqrt{2}\sigma_2 - i\sigma_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & -i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1+i \end{pmatrix}, \\
A_4 &= \frac{1}{2}(\sigma_0 - \sqrt{2}\sigma_2 - i\sigma_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 1+i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Usando il metodo delle trasformate di Fourier si determini la funzione $u(x)$ che verifica l'equazione integrale

$$x u(x) = \alpha \, \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy \,,$$

con $\alpha > 0$ e la condizione al contorno $u(0) = 1$.
Suggerimento. L'integrale in valore principale può essere interpretato come una convoluzione usando la formula di Sokhotsky-Plemelj.

Soluzione del sesto Problema

L'integrale in valore principale può essere scritto per mezzo della formula di Sokhotsky-Plemelj, che in forma operatoriale è

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \frac{\mathrm{Pr}}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0),$$

ovvero

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy = -\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{y-x} dy &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{y - x \pm i\epsilon} \pm i\pi\delta(y-x)\right) u(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x - y \mp i\epsilon} \mp i\pi\delta(x-y)\right) u(y) dy \\
&= \left(\frac{1}{x \mp i\epsilon} \mp i\pi\delta(x)\right) * u(x) = (g * u)(x),
\end{aligned}$$

dove la funzione $g(x)$ è

$$g(x) = \frac{1}{x \mp i\epsilon} \mp i\pi\delta(x),$$

dove lasciamo espresso il doppio segno.
Facendo la trasformata di Fourier dell'equazione si ha

$$\mathscr{F}_k[xu] = \alpha \mathscr{F}_k[g * u] = \alpha\sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k[g]\mathscr{F}_k[u]$$

La prima trasformata di Fourier vale

$$\mathscr{F}_k[xu] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x u(x) e^{-ikx} dx = i\frac{d}{dk}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ikx} dx = i\frac{d\tilde{u}}{dk},$$

con $\tilde{u}(k) = \mathscr{F}_k[u]$. La trasformata di Fourier della funzione $g(x)$ è

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - i\pi\delta(x) \right) e^{-ikx} dx = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 0 & k > 0 \\ 2i\pi & k < 0 \end{cases} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathrm{Sign}(k),$$

dove Sign(k) è la funzione segno

$$\mathrm{Sign}(k) = \begin{cases} +1 & k > 0 \\ -1 & k < 0 \end{cases} .$$

Tale funzione rappresenta anche la derivata del valore assoluto, ovvero

$$\frac{d|k|}{dk} = \mathrm{Sign}(k).$$

L'equazione trasformata

$$i\frac{d\tilde{u}}{dk} = \alpha\sqrt{2\pi} \left(-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sign}(k) \right) \tilde{u}(k) = -i\alpha\pi\, \mathrm{Sign}(k) \tilde{u}(k),$$

rappresenta un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. La soluzione si ottiene integrando direttamente

$$\int_{\tilde{u}(0)}^{\tilde{u}(k)} \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}} = -\alpha\pi \int_0^k \mathrm{Sign}(k')dk'$$
$$\ln(\tilde{u}(k)/\tilde{u}(0)) = -\alpha\pi|k|,$$

da cui

$$\tilde{u}(k) = \tilde{u}(0)\, e^{-\alpha\pi|k|}.$$

La soluzione, cioè la funzione $u(x)$ si ottiene facendo l'anti-trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(k) e^{ikx} dk = \frac{\tilde{u}(0)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\pi|k|}\, e^{ikx} dk = \frac{\tilde{u}(0)}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{k(ix+\alpha\pi)} dk + \int_0^{\infty} e^{k(ix-\alpha\pi)} dk \right) \\ &= \frac{\tilde{u}(0)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ix + \alpha\pi} + \frac{-1}{ix - \alpha\pi} \right) = \frac{\tilde{u}(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\alpha\pi}{x^2 + \alpha^2\pi^2} = \tilde{u}(0)\, \frac{\alpha\sqrt{2\pi}}{x^2 + \alpha^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Infine, imponendo la condizione al contorno $u(0) = 1$ si ha $\tilde{u}(0) = \alpha\pi^{3/2}/\sqrt{2}$, quindi

$$u(x) = \frac{\pi^2\alpha^2}{x^2 + \pi^2\alpha^2}.$$