Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 21 febbraio 2012

Esercizio 1 (6 punti)
Si studi la funzione complessa a variabile reale positiva r definita come

$$S(r) = \oint_{C_r} \frac{e^z}{z(z-1)^3(z-2)^2} dz\,,$$

con $C_r = \left\{z : z = re^{i\theta}, \theta \in (0, 2\pi)\right\}$.

. . . .

Soluzione
L'integranda

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^3(z-2)^2}\,,$$

ha tre poli: $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ e $z_2 = 2$ di ordine: 1, 3 e 2 rispettivamente.
I Residui sono:

- nel punto z_0, polo semplice,

$$\mathrm{Res}[f(z), 0] = \lim_{z\to 0} z\, f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-1)^3(z-2)^2} = -\frac{1}{4}\,;$$

- nel punto z_1, polo di ordine 3,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), 1] &= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[f(z)(z-1)^3\right] = \lim_{z\to 1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{e^z}{z(z-2)^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \left[\left(\frac{d^2}{dz^2} \frac{e^z}{z} \right) \frac{1}{(z-2)^2} + 2 \left(\frac{d}{dz} \frac{e^z}{z} \right) \frac{d}{dz} \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{e^z}{z} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{(z-2)^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} e^z \left[\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z^3} \right) \frac{1}{(z-2)^2} + 2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right) \frac{-2}{(z-2)^3} + \frac{1}{z} \frac{6}{(z-2)^4} \right] \\
&= \frac{7}{2}\, e\,;
\end{aligned}$$

- nel punto z_2, polo di ordine 2,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z), 2] &= \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz} \left[f(z)(z-2)^2\right] = \lim_{z\to 2} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{z(z-1)^3} \\
&= \lim_{z\to 2} e^z \left[\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right) \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{3}{z(z-1)^4} \right] \\
&= -\frac{5}{4}\, e^2\,.
\end{aligned}$$

Quindi per la funzione $S(r)$ si ha

$$S(r) = 2\pi\, i \begin{cases} -\frac{1}{4} & 1 < r < 1 \\ \\ -\frac{1}{4} + \frac{7}{2}\, e & 1 < r < 2 \\ \\ -\frac{1}{4} + \frac{7}{2}\, e - \frac{5}{4}\, e^2 & r > 2 \end{cases} .$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
La funzione $F(z)$ ha la seguente rappresentazione integrale

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, z^t\, dt\, .$$

- Qual è il dominio, D', di questa rappresentazione?
- Qual è il dominio di analiticità, D, di $F(z)$?
- Si calcoli

  $$J = \oint_{c_r} \frac{dF}{dz}(z)\, dz\, ,$$

  con $c_r = \left\{z : z = e^{i\theta}, \theta \in (-\pi, +\pi)\right\}$.

. . . .

Soluzione

- Per ottenere il dominio della rappresentazione si richiede che l'integrale esista, ovvero che l'integranda si comporti "bene" agli estremi dell'intervallo d'integrazione. Per prima cosa riscriviamo l'integranda come

  $$e^{-t}\, z^t = e^{-t}\, e^{\ln(z^t)} = e^{-t[1-\ln(z)]}\, .$$

  Nel limite $t \to 0$ si ha

  $$e^{-t[1-\ln(z)]} \underset{t\to 0}{\sim} 1 - t[1 - \ln(z)] \to 1\, ,$$

  mentre per $t \to \infty$

  $$\left|e^{-t[1-\ln(z)]}\right| \underset{t\to\infty}{\sim} e^{-t\,\mathrm{Re}[1-\ln(z)]}\, .$$

  Quindi, per avere la convergenza, dobbiamo richiedere che

  $$\begin{aligned} \mathrm{Re}[1 - \ln(z)] &> 0 \\ 1 - \ln|z| &> 0 \\ \ln|z| &< 1 \\ |z| &< e\, . \end{aligned}$$

Il dominio di validità della rappresentazione integrale è

$$D' = \{z : |z| < e\} \, ,$$

ovvero il cerchio di raggio e centrato nell'origine.

- L'integrale può essere calcolato esplicitamente come

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-t[1-\ln(z)]}\, dt = -\frac{e^{-t[1-\ln(z)]}}{1-\ln(z)}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{1-\ln(z)} \, .$$

Si vede immediatamente che la funzione $F(z)$ ha come dominio di analiticità tutto il piano complesso ad eccezione di un taglio sul semiasse reale negativo ed un polo semplice in $z = e$, ovvero

$$D = \big\{z : z \notin \{(-\infty, 0), e\}\big\} \, .$$

- Infine, l'integrale della derivata sarà:

$$\begin{aligned} J = \int_{c_r} \frac{dF}{dz}(z)\, dz &= F(e^{i\pi}) - F(e^{-i\pi}) \\ &= \frac{1}{1-\ln(e^{i\pi})} - \frac{1}{1-\ln(e^{-i\pi})} \\ &= \frac{1}{1-i\pi} - \frac{1}{1+i\pi} \\ &= \frac{2\,i\,\pi}{1+\pi^2} \, . \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Si dimostri che, dato

$$c_n = \int_\gamma \frac{dz}{\ln^n(z)} \, , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

dove γ è il cammino rettilineo che unisce i punti $z_1 = -1 + i\,(y+1)$ e $z_2 = i\,y$, $y \in \mathbb{R}$ e $y > 0$, vale la disuguaglianza

$$|c_n| \le \frac{\sqrt{2}}{\big[\ln^2(y) + \pi^2/4\big]^{n/2}} \, .$$

. . . .

Soluzione
Il cammino d'integrazione può essere parametrizzato come

$$\gamma(t) = t + i(y - t) \, , \qquad t \in [-1, 0] \, ,$$

infatti

$$\gamma(-1) = -1 + i(y+1) = z_1\,,$$
$$\gamma(0) = i\,y = z_2\,.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Darboux si ha

$$|c_n| = \left|\int_\gamma \frac{dz}{\ln^n(z)}\right| \leq L(\gamma)\,\max_{z\in\gamma}\left|\frac{1}{\ln^n(z)}\right| = L(\gamma)\,\frac{1}{\min\limits_{z\in\gamma}|\ln^n(z)|}\,,$$

$L(\gamma)$ è la lunghezza del cammino e si ha banalmente:

$$L(\gamma) = \sqrt{2}\,.$$

Il minimo a denominatore si ottiene come

$$|\ln^n(z)| = |\ln(z)|^n = \left[\ln^2|z| + \mathrm{Arg}(z)^2\right]^{n/2} = \left[\ln^2\sqrt{2t^2-2yt+y^2} + \mathrm{atan}^2\left(\frac{y-t}{t}\right)\right]^{n/2}$$
$$\geq \left[\ln^2(y) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^{n/2}\,.$$

Ovviamente si avrà anche

$$\min_{z\in\gamma}|\ln^n(z)| \geq \left[\ln^2(y) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^{n/2}\,,$$

quindi la disuguaglianza di Darboux diventa

$$|c_n| = \left|\int_\gamma \frac{dz}{\ln^n(z)}\right| \leq \frac{L(\gamma)}{\min\limits_{z\in\gamma}|\ln^n(z)|} \leq \frac{\sqrt{2}}{\left[\ln^2(y) + (\pi/2)^2\right]^{n/2}}\,.$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}\,,$$

- si verifichi che sono matrici normali;
- trovare i valori di θ per i quali A e B sono simultaneamente diagonalizzabili;
- determinare, in uno di questi casi, gli autovalori e gli autovettori comuni.

. . . .

Soluzioni

- Per verificare che si tratta di matrici normali calcoliamo il commutatori delle matrici stesse e le loro coniugate hermitiane:

$$
\begin{aligned}
[A,A^\dagger] &= \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[B,B^\dagger] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0\,.
\end{aligned}
$$

- Affinché siano diagonalizzabili simultaneamente è necessario che commutino, essendo normali. Cerchiamo i valori di θ che annullano il commutatore. Richiediamo cioè $[A,B]=0$, ovvero risolviamo l'equazione matriciale in θ:

$$
\begin{aligned}
0 = [A,B] &= \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2(\theta) & -2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) & \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) & -2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & 2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) & \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\mathrm{sen}^2(\theta) & -2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ 2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) & 0 & 2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & -2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta) & 2\mathrm{sen}^2(\theta) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

da cui si ha la condizione

$$\text{sen}(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = k\,\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,.$$

- Scegliamo $k = 0$, quindi le matrici assumono le forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sono una la coniugata hermitiana dell'altra, cioè:

$$A^\dagger = B\,.$$

Cerchiamo gli autovalori di A, l'equazione secolare e gli autovalori sono

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ -\lambda^3 + 1 &= 0 \\ \lambda_k &= e^{2\,i\,k\,\pi/3}, \quad k = 0, 1, 2\,, \end{aligned}$$

quindi i tre autovalori sono

$$\lambda_0 = 1\,, \qquad \lambda_1 = e^{2\,i\,\pi/3}, \qquad \lambda_2 = e^{4\,i\,\pi/3} = e^{-2\,i\,\pi/3} = 1/\lambda_1 = \lambda_1^*\,.$$

Gli autostati corrispondenti

$$\begin{aligned} A\,u_k &= \lambda_k\,u_k \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} &= \lambda_k \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_k \\ \gamma_k \\ \alpha_k \end{pmatrix} &= \lambda_k \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ponendo $\alpha_k = 1$ si hanno

$$\beta_k = \lambda_k\,, \qquad \gamma_k = \lambda_k^2\,,$$

ovvero

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{1 + |\lambda_k|^2 + |\lambda_k|^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \end{pmatrix}.$$

I tre autovettori sono

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^* \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1^* \\ \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

La matrice che diagonalizza A è dunque:

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^* \\ 1 & \lambda_1^* & \lambda_1 \end{pmatrix} .$$

Si ha cioè

$$U^\dagger A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^* \end{pmatrix} \equiv A_D \,.$$

È facile verificare che U diagonalizza anche la matrice B, che è la coniugata hermitiana di A, infatti

$$U^\dagger B U = (U^\dagger B^\dagger U)^\dagger = (U^\dagger A U)^\dagger = A_D^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} .$$

Gli ultimi due autostati di B sono invertiti rispetto a quelli di A, cioè, posto

$$B\, v_k = \lambda_k\, v_k \,, \qquad k = 0, 1, 2 \,,$$

si avranno le identità:

$$v_0 = u_0 \,, \qquad v_1 = u_2 \,, \qquad v_2 = u_1 \,.$$

Esercizio 5 (5 punti)
Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(i+z)^3}$$

e si verifichi il risultato facendone l'antitrasformata.

. . . .

Soluzione
Calcoliamo direttamente l'integrale

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{(i+z)^3} dz \,.$$

L'integranda ha un polo di ordine 3 nel punto $z = -i$. Nel caso in cui $k > 0$ possiamo usare il lemma di Jordan nel semipiano superiore, dove non ci sono singolarità e si ha

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{(i+z)^3} dz = 0 \,.$$

Per valori negativi di k, invece,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{(i+z)^3} dz \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{e^{ikz}}{(i+z)^3}, -i\right] \\
&= -\sqrt{2\pi}\, i\, \frac{1}{2} \lim_{z\to -i} \frac{d^2}{dz^2} e^{ikz} \\
&= -\sqrt{2\pi}\, i\, \frac{1}{2} \lim_{z\to -i} (-k^2) e^k \\
&= i \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, k^2\, e^k\,.
\end{aligned}$$

Combinando i due risultati si può scrivere la trasformata di Fourier in forma compatta come:

$$\tilde{f}(k) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, k^2\, e^k\, \theta(-k)\,,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside.
L'antitrasformata è:

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{f}}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, k^2\, e^k\, \theta(-k)\, e^{-ikz} dk \\
&= \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{0} k^2\, e^{k(1-iz)} dk \\
&= \frac{i}{2} \left[\frac{k^2\, e^{k(1-iz)}}{1-iz} \bigg|_{-\infty}^{0} - 2 \int_{-\infty}^{0} \frac{k\, e^{k(1-iz)}}{1-iz} dk \right] \\
&= -i \int_{-\infty}^{0} \frac{k\, e^{k(1-iz)}}{1-iz} dk \\
&= -i \left[\frac{k\, e^{k(1-iz)}}{(1-iz)^2} \bigg|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{k(1-iz)}}{(1-iz)^2} dk \right] \\
&= i \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{k(1-iz)}}{(1-iz)^2} dk \\
&= i\, \frac{e^{k(1-iz)}}{(1-iz)^3} \bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{i}{(-i)^3 (z+i)^3} = \frac{1}{(z+i)^3} = f(z)\,.
\end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Risolvere l'equazione integrale

$$f(x) = x + \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} (x+y)^2\, f(y)\, dy\,,$$

con il metodo della serie di Neumann e con quello del nucleo separabile.

. . . .

Soluzione
La serie può essere scritta nella forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,,$$

dove le funzioni $f_k(x)$ si ottengono applicando l'operatore integrale k volte sulla funzione termine noto che in questo caso è x, quindi

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x \\
f_1(x) &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (x+y)^2 y\, dy = \frac{1}{3}\,x = \frac{1}{3} f_0(x) \\
f_2(x) &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (x+y)^2 f_1(x)\, dy = \left(\frac{1}{3}\right)^2 x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 f_0(x) \\
&\vdots \\
f_k(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^k f_0(x)\,.
\end{aligned}$$

La soluzione si ottiene sommando la serie geometrica con termine 1/3, quindi convergente,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k f_0(x) = \frac{3}{2}\,x\,.$$

Il nucleo è separabile, infatti

$$K(x,y) = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = \sum_{k=1}^{3} M_k(x) N_k(y)\,.$$

con

$$\begin{aligned}
M_1(x) &= x^2 \qquad & N_1(y) &= 1 \\
M_2(x) &= 2x \qquad & N_2(y) &= y \\
M_3(x) &= 1 \qquad & N_3(y) &= y^2\,.
\end{aligned}$$

Definiamo quindi:

$$F_k = \int_{-1}^{1} N_k(x) f(x)\, dx\,, \qquad B_k = \int_{-1}^{1} N_k(x)\, x\, dx\,, \qquad M_{ik} = \int_{-1}^{1} N_i(x) M_k(x)\, dx\,,$$

e si hanno le espressioni esplicite

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 2 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si deve risolvere il sistema

$$\left(I - \frac{1}{4}A\right) F = B$$

$$\begin{pmatrix} 5/6 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ -1/10 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è ovviamente non nullo, infatti

$$\det \begin{pmatrix} 5/6 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ -1/10 & 0 & 5/6 \end{pmatrix} = \frac{58}{135} \neq 0 .$$

Il sistema ammette la soluzione

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

quindi

$$f(x) = x + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{3} M_k(x) F_k = x + \frac{1}{4}\, 2\, x = \frac{3}{2}\, x .$$