Metodi Matematici per la Fisica

Appello straordinario invernale - 21 dicembre 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Dopo aver definito il dominio di convergenza D_u nel piano complesso u della rappresentazione integrale

$$\square(u) = \int_0^{\pi/2} \cos^u(b)\,\mathrm{sen}^{2-u}(b)\,db\,,$$

si ottenga il prolungamento analitico della funzione $\square(u)$ nel dominio naturale di analiticità ovvero la sua espressione analitica.

Soluzione del primo problema

Consideriamo la rappresentazione integrale della funzione beta di Eulero

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt\,,$$

è un integrale di primo tipo di Eulero e converge in

$$\mathscr{D} = \left\{(p,q) : (\mathrm{Re}(p), \mathrm{Re}(q)) \in (0,\infty)^2\right\} \subset \mathbb{C}^2\,.$$

Con il cambiamento di variabile $t = \cos^2(\alpha)$, si ha

$$\beta(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}(\alpha)\,\mathrm{sen}^{2q-1}(\alpha)\,d\alpha\,.$$

Confrontando questa espressione con la rappresentazione della funzione $\square(u)$, si evince che quest'ultima coincide con metà della rappresentazione della funzione in $p = (u+1)/2$ e $q = (3-u)/2$. Quindi, le condizioni di convergenza sono

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}(p) = \mathrm{Re}\left(\frac{u+1}{2}\right) > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(u) > -1\,, \\ \mathrm{Re}(q) = \mathrm{Re}\left(\frac{3-u}{2}\right) > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \mathrm{Re}(u) < 3\,, \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad -1 < \mathrm{Re}(u) < 3\,.$$

Il Dominio di convergenza richiesto è $D_u\,\{u : -1 < \mathrm{Re}(u) < 3\} \subset \mathbb{C}$.
Sfruttiamo l'espressione della funzione beta in termini di funzione gamma di Eulero per ottenerne la continuazione analitica, ovvero

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \Rightarrow \qquad \square(u) = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{u+1}{2}, \frac{3-u}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-u}{2}\right)\frac{1}{\Gamma(2)}\,.$$

Usando $\Gamma(2)=1$ e l'equazione di ricorrenza $\Gamma(z)=(z-1)\Gamma(z-1)$, si ha

$$\begin{aligned}\square(u) &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4-(1+u)}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{u+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{u+1}{2}\right)\left(1-\frac{u+1}{2}\right)\\ &=\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{u+1}{2}\right)\frac{1-u}{4}.\end{aligned}$$

Il prodotto della funzioni gamma può essere espresso con la formula di riflessione della funzione gamma

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)},$$

con $z=(u+1)/2$ e si ha

$$\square(u)=\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{u+1}{2}\right)\frac{1-u}{4}=\frac{1-u}{4}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\pi u/2+\pi/2\right)},$$

da cui l'espressione analitica richiesta

$$\square(u)=\frac{\pi}{4}\,\frac{1-u}{\cos\left(\pi u/2\right)}.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\bigtriangleup=\oint_{|z-3i|=4}\frac{dz}{\operatorname{senh}^7(z)}.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa, ha poli di ordine 7 nei punti dell'insieme $\{z_k=ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. La circonferenza di centro $z=3i$ e raggio 4 che rappresenta il percorso d'integrazione avvolge una solo volta i tre poli $z_0=0$, $z_1=i\pi$ e $z_2=2i\pi$. Infatti si hanno le condizioni: $|z_{0,1,2}-3i|=3,\pi-3,2\pi-3<4$; mentre per z_{-1} e z_3, $|z_{-1,3}-3i|=\pi+1,3\pi-3>4$. Ne consegue che l'integrale cercato è proporzionale alla somma dei tre residui nei punti z_0, z_1 e z_2, ovvero

$$\bigtriangleup=2i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)},z_0=0\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)},z_1=i\pi\right]+\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)},z_2=2i\pi\right]\right).$$

In virtù della periodicità della funzione seno iperbolico,

$$\operatorname{senh}(z+z_1)=\operatorname{senh}(z+i\pi)=-\operatorname{senh}(z),\qquad \operatorname{senh}(z+z_2)=\operatorname{senh}(z+2i\pi)=\operatorname{senh}(z),$$

per i residui si ha la relazione

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)},z_2\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)},z_1\right]=\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)},z_0\right],$$

quindi

$$\bigtriangleup=2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)},z_0\right].$$

Calcoliamo il residuo avvalendoci della somma della serie geometrica, o meglio delle sue derivate. Infatti, $\forall\,\alpha$, tale che: $|\alpha|<1$, si ha

$$\frac{1}{1-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k,$$

mentre la derivata n-esima, con $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{1}{1-\alpha}=\frac{n!}{(1-\alpha)^{n+1}}=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)\alpha^{k-n}=n!+(n+1)!\alpha+\frac{(n+2)!}{2!}\alpha^2+\cdots.$$

Consideriamo lo sviluppo della funzione integranda che si ottiene a partire dalla serie di Taylor della funzione seno iperbolico

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)} &= \frac{1}{\left(z+z^3/3!+z^5/5!+\mathcal{O}\left(z^7\right)\right)^7} = \frac{1}{z^7}\frac{1}{\left(1+z^2/3!+z^4/5!+\mathcal{O}\left(z^6\right)\right)^7}\\ &= \frac{1}{z^7}\frac{1}{6!}\left[6!-7!\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)+\frac{8!}{2!}\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^2-\frac{9!}{3!}\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^3+\cdots\right]\\ &= \frac{1}{z^7}\left[1-7\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)+\frac{8\cdot 7}{2!}\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^2-\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!}\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^3+\cdots\right].\end{aligned}$$

Il residuo coincide "-1" con il coefficiente della serie di Laurent, per ottenerlo calcoliamo il coefficiente della potenza z^6 nella parentesi quadra. Ad esso contribuiscono termini dalle quantità nelle prime tre parentesi tonde. Dalla prima si ha: $-z^6/6!$, dalla seconda: $2z^6 8\cdot 7/(2!3!5!)$, infine, dalla terza: $-z^6 9\cdot 8\cdot 7/\left(3!(3!)^3\right)$ e la somma dei tre contributi

$$C_{-1} = \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_0\right] = -\frac{1}{6!}+\frac{2\cdot 8\cdot 7}{2!3!5!}-\frac{9\cdot 8\cdot 7}{(3!)^4} = -\frac{5}{16}.$$

Ne consegue che

$$\triangle = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}^7(z)}, z_0\right] = -\frac{5i\pi}{8}.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga la sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\square(z) = \frac{z}{\operatorname{sen}\left(z^2\right)}.$$

Soluzione del terzo problema

Si consideri la funzione $\square(z)/z = 1/\operatorname{sen}\left(z^2\right)$ che, con il cambiamento di variabile $w = z^2$ diventa

$$f(w) \equiv \frac{\square(z)}{z} = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(z^2\right)} = \left\{w = z^2\right\} = \frac{1}{\operatorname{sen}(w)}.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler di $f(w)$ è noto ed è

$$f(w) = \phi + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{w-k\pi} = \phi + \frac{1}{w} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k w}{w^2-k^2\pi^2},$$

dove ϕ è costante e si ottiene come

$$\phi = \lim_{w\to 0}\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{\operatorname{sen}(w)}\right) = 0.$$

In termini della variabile z si ha

$$\frac{\square(z)}{z} = \frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^2}{z^4-k^2\pi^2},$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per z, si ha lo sviluppo di Mittag-Leffler cercato

$$\square(z) = \frac{1}{z} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z^3}{z^4-k^2\pi^2}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ricavi lo spettro discreto dell'operatore

$$\hat{H} = \exp\left[\vec{\hat{\sigma}}\cdot\left(\vec{\hat{\sigma}}\times\vec{a}\right)\right],$$

$\forall\, \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ e dove $\vec{\hat{\sigma}} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ è l'operatore vettoriale che ha per componenti i tre operatori di Pauli.

Soluzione del quarto problema

Usiamo l'algebra degli operatori di Pauli, ovvero i commutatori e gli anti-commutatri

$$\left[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\right] = 2i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m\,, \qquad \left\{\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k\right\} = 2\delta_{jk}\hat{I}\,, \qquad \forall\, j,k \in \{1,2,3\}\,,$$

dove ϵ_{jkm} è il tensore completamente anti-simmetrico di Levi-Civita, $\hat{I}$ l'operatore identità e si ha la somma sottintesa sull'indice m nella prima relazione. Sommando ambo i membri delle due relazioni si ottiene

$$\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m + \delta_{jk}\hat{I}\,, \qquad \forall\, j,k \in \{1,2,3\}\,.$$

L'operatore ad esponente può essere sviluppato come

$$\vec{\hat{\sigma}} \cdot \left(\vec{\hat{\sigma}} \times \vec{a}\right) = \epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k a_m = \epsilon_{jkm}a_m\left(i\epsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l + \delta_{jk}\hat{I}\right) = i\epsilon_{jkm}\epsilon_{jkl}a_m\hat{\sigma}_l = 2i\vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{a}\,.$$

La matrice che rappresenta questo operatore rispetto alla base degli autovettori del terzo operatore $\hat{\sigma}_3$ è

$$2i\vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{a} \;\hookleftarrow\; 2i\begin{pmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det\begin{pmatrix} 2ia_3 - \lambda & 2ia_1 + 2a_2 \\ 2ia_1 - 2a_2 & -2ia_3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda^2 + 4a_3^2\right) + 4\left(a_1^2 + a_2^2\right) = 0$$

da cui: $\lambda_\pm = \pm 2ia$, dove a è la norma del vettore $\vec{a}$, cioè: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Usando il teorema spettrale, si ha che gli autovalori dell'operatore $\hat{H}$ si ottengono applicando l'operazione che permette di ottenere $\hat{H}$ dall'operatore $2i\vec{\hat{\sigma}} \cdot \vec{a}$, ovvero l'esponenziale. Quindi lo spettro discreto dell'operatore $\hat{H}$ è l'insieme

$$\underbrace{\{-2ia, 2ia\}}_{\text{autovalori di } 2i\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{a}} \;\xrightarrow{\exp}\; \underbrace{\{\exp(-2ia), \exp(2ia)\}}_{\text{autovalori di } \hat{H}}\,.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 5/30)

Si ottenga lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 dalle azioni

$$\hat{A}|u_n\rangle = i\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{njk} b_j |u_k\rangle\,,$$

sui vettori della base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$, dove ϵ_{njk} è il tensore completamente anti-simmetrico di Levi-Civita e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ è un vettore reale diverso dal vettore nullo.

Soluzione del quinto problema

Gli elementi della matrice A che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base canonica $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^3$ si ottengono dai prodotti $A_n^m = \langle u_m|\hat{A}|u_n\rangle$, con $m,n \in \{1,2,3\}$. Usando le azioni note dell'operatore e l'ortonormalità dei vettori della base, si hanno

$$A_n^m = \langle u_m|\hat{A}|u_n\rangle = i\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{njk} b_j \langle u_m|u_k\rangle = i\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{njk} b_j \delta_k^m = i\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{njm} b_j = i\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{mnj} b_j\,, \qquad \forall\, m,n \in \{1,2,3\}\,.$$

La matrice A è

$$\hat{A} \overset{u}{\hookleftarrow} A = i\begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha equazione secolare

$$\det\begin{pmatrix} -\alpha & ib_3 & -ib_2 \\ -ib_3 & -\alpha & ib_1 \\ ib_2 & -ib_1 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono

$$\alpha_0 = 0\,, \qquad \alpha_\pm = \pm\sqrt{|\vec{b}|}\,.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$\boxtimes = \int_{1/2}^{\infty} \delta\left(\Gamma^2(x) - 3\Gamma(x) + 2\right) dx\,,$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione gamma di Eulero.

Utilità. Si ricordi il valore della derivata prima della funzione gamma in $z = 1$ è dato dalla costante di Eulero-Mascheroni $\gamma \simeq 0,5772$.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

I valori di x in cui si annulla l'argomento della delta di Dirac sono quelli che verificano l'equazione

$$(\Gamma(x) - 1)(\Gamma(x) - 2) = 0\,,$$

ovvero

$$\begin{aligned} \Gamma(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_{1,2} = 1, 2\,, \\ \Gamma(x) = 2 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 3\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \boxtimes &= \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\left|\Gamma'(x_j)\left(2\Gamma(x_j) - 3\right)\right|} = \frac{1}{|\Gamma'(1)(2\Gamma(1) - 3)|} + \frac{1}{|\Gamma'(2)(2\Gamma(2) - 3)|} + \frac{1}{|\Gamma'(3)(2\Gamma(3) - 3)|} \\ &= \frac{1}{|\Gamma'(1)|} + \frac{1}{|\Gamma'(2)|} + \frac{1}{|\Gamma'(3)|}\,. \end{aligned}$$

Le derivate in $x_3 = 3$ e $x_2 = 2$ si ottengono sfruttando l'equazione di ricorrenza e si hanno

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\Gamma(z+2)\bigg|_{z=1} &= \frac{d}{dz}(z+1)z\Gamma(z)\bigg|_{z=1} = \left(z\Gamma(z) + (z+1)\Gamma(z) + z(z+1)\Gamma'(z)\right)\Big|_{z=1} \\ \Gamma'(3) &= 1 + 2 - 2\gamma = 3 - 2\gamma\,; \\ \frac{d}{dz}\Gamma(z+1)\bigg|_{z=1} &= \frac{d}{dz}z\Gamma(z)\bigg|_{z=1} = \left(\Gamma(z) + z\Gamma'(z)\right)\Big|_{z=1} \\ \Gamma'(2) &= 1 - \gamma\,. \end{aligned}$$

Da cui il risultato

$$\boxtimes = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{3 - 2\gamma}\,.$$