Metodi Matematici per la Fisica

Quinto appello estivo - 20 settembre 2023

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\boxdot = \oint_{|z-20|=10} \frac{dz}{\operatorname{sen}(\ln(z))}\,,$$

il percorso di integrazione è orientato in senso anti-orario.

Curiosità. Il simbolo $\boxdot$ rappresenta la lettera M in uno dei tre alfabeti alieni che appaiono in alcuni episodi del cartone animato *Futurama* concepito da Matt Groening ([illegible]). Lo chiameremo semplicemente alfabeto *Futurama*.

Soluzione del primo problema

Le singolarità della funzione integranda sono gli zeri della funzione $\operatorname{sen}(\ln(z))$, che ne costituisce il denominatore. Si ha, quindi,

$$\operatorname{sen}(\ln(z)) = 0\,, \qquad \ln(x_k) = k\pi\,, \qquad x_k = e^{k\pi}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,,$$

l'insieme delle singolarità è $\left\{x_k = e^{k\pi}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset (0,\infty)$, sono numeri reali e non negativi.
Le quattro più vicine al centro della circonferenza $\left\{z : z = 20 + 10e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\right\}$ sono

$$x_{-1} = \frac{1}{e^{\pi}} \simeq 0{,}04\,, \qquad x_0 = 1\,, \qquad x_1 = e^{\pi} \simeq 23{,}14\,, \qquad x_2 = e^{2\pi} \simeq 535{,}49\,.$$

È immediato verificare che solo la singolarità x_1 è avvolta dalla circonferenza, infatti $|x_1 - 20| < 10$. In particolare, le singolarità con indice non positivo sono numeri reali compresi nell'intervallo $(0,1]$, quindi, $\forall\, k$, tale che $-k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$|x_k - 20| = 20 - e^{k\pi} \geq 19 > 10\,.$$

Le singolarità sono ordinate in modo crescente, cioè $x_{k+1} > x_k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, per quelle con indice maggiore dell'unità: $x_{k+2} > x_2 \simeq 535{,}49$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Ne consegue che, $\forall\, k$, tale che $(k-1) \in \mathbb{N}$, quindi con $k \geq 2$, si ha

$$|x_k - 20| = e^{k\pi} - 20 > 515 > 10\,.$$

Le singolarità sono poli semplici, come si verifica considerando il limite

$$\lim_{z\to x_k} \frac{z - x_k}{\operatorname{sen}(\ln(z))} = \lim_{z\to x_k} \frac{z}{\cos(\ln(z))} = \frac{e^{k\pi}}{\cos(k\pi)} = (-1)^k e^{k\pi}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il valore dell'integrale cercato si ottiene usando il teorema dei residui, infatti

$$\boxdot = \oint_{|z-20|=10} \frac{dz}{\operatorname{sen}(\ln(z))} = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}(\ln(z))}, x_1 = e^{\pi}\right] = 2i\pi \lim_{z\to x_1} \frac{z - x_1}{\operatorname{sen}(\ln(z))}\,,$$

da cui il risultato finale

$$\mathcal{I} = -2i\pi e^{\pi}\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\operatorname{senh}\left(\ln(z)\right)\right)}\,.$$

Curiosità. Il simbolo $\mathcal{R}$ rappresenta la lettera R dell'alfabeto *Futurama*.

Soluzione del secondo problema

Le singolarità della funzione sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{\mathcal{R}(z)}{1} = \operatorname{sen}\left(\operatorname{senh}\left(\ln(z)\right)\right) = 0\,.$$

Usando l'espressione di Eulero per la funzione seno iperbolico,

$$0 = \frac{\mathcal{R}(z)}{1} = \operatorname{sen}\left(\operatorname{senh}\left(\ln(z)\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{z - z^{-1}}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{z^2 - 1}{2z}\right),$$

da cui si ottiene l'equazione che definisce le singolarità

$$z^2 - 2k\pi z - 1 = 0\,,$$

la soluzioni sono

$$z_k^{\pm} = k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2 + 1}\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Le singolarità sono poli semplici, infatti, si hanno i residui

$$r_k^{\pm} = \lim_{z \to z_k^{\pm}} \frac{z - z_k^{\pm}}{\operatorname{sen}\left(\operatorname{senh}\left(\ln(z)\right)\right)} = \lim_{z \to z_k^{\pm}} \frac{z}{\cos\left(\operatorname{senh}\left(\ln(z)\right)\right)\cosh\left(\ln(z)\right)} = \frac{(-1)^k z_k^{\pm}}{\cosh\left(z_k^{\pm}\right)} = (-1)^k \frac{\pm k\pi + \sqrt{k^2\pi^2+1}}{\sqrt{k^2\pi^2+1}}\,,$$

$\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Ne consegue che le singolarità dell'insieme $S = \left\{z_k^- = k\pi - \sqrt{k^2\pi^2+1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \left\{z_k^+ = k\pi + \sqrt{k^2\pi^2+1}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sono poli semplici i cui residui sono gli elementi dell'insieme $R = \left\{r_k^-\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \left\{r_k^+\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, definiti dell'espressione precedente.

Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(z) &= \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{r_-}{z - z_k^-} + \frac{r_+}{z - z_k^+}\right) \\
&= \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2\pi^2+1}}\left(\frac{-k\pi + \sqrt{k^2\pi^2+1}}{z - k\pi + \sqrt{k^2\pi^2+1}} + \frac{k\pi + \sqrt{k^2\pi^2+1}}{z - k\pi - \sqrt{k^2\pi^2+1}}\right) \\
&= \phi(z) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2\pi^2+1}}\,\frac{k\pi\sqrt{k^2\pi^2+1} + \sqrt{k^2\pi^2+1}\,(z - k\pi)}{(z-k\pi)^2 - k^2\pi^2 - 1} \\
&= \phi(z) + 2z\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^2 - 1 - 2k\pi z}\,,
\end{aligned}$$

dove la funzione $\phi(z)$ rappresenta la parte intera della funzione $\mathcal{R}(z)$. Separiamo le serie per valori di k negativi, positivi e nullo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(z) &= \phi(z) + \frac{2z}{z^2-1} + 2z\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z^2 - 1 - 2k\pi z} + \frac{1}{z^2 - 1 + 2k\pi z}\right) \\
&= \phi(z) + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + 4z\left(z^2-1\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(z^2-1)^2 - 4k^2\pi^2 z^2}\,.
\end{aligned}$$

Asintoticamente la funzione $\mathcal{A}(z)$ è regolare. Infatti, per ogni successione $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, che si accumula all'infinito, cioè

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$$

e tale che: $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \cap S = \varnothing$, si ha

$$\lim_{k\to\infty} \left|\mathcal{A}(a_k)\right| = \frac{1}{|\operatorname{senh}(\operatorname{sen}(\ln(a_k)))|} < \infty \,,$$

in quanto $|\operatorname{senh}(\operatorname{sen}(\ln(a_k)))| > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Ne consegue che la funzione $\phi(z)$ è una costante, poniamo $\phi(z) \equiv \phi$. Ne otteniamo il valore calcolando la funzione nel polo semplice $z_0^+ = 1$ che ha anche residuo unitario, ovvero $r_0^+ = 1$. Lo sviluppo di Laurent con centro in $z = z_0^+ = 1$ ha la forma

$$\mathcal{A}(z) = \frac{1}{z-1} + C_0 + C_1(z-1) + \mathscr{O}\left((z-1)^2\right) ,$$

il coefficiente C_0 può essere calcolato con il limite

$$C_0 = \lim_{z\to 1}\left(\mathcal{A}(z) - \frac{1}{z-1}\right) = \lim_{z\to 1} \frac{z - 1 - \operatorname{sen}(\operatorname{senh}(\ln(z)))}{(z-1)\operatorname{sen}(\operatorname{senh}(\ln(z)))} \,.$$

È un forma zero su zero, applichiamo due volte il teorema di de l'Hôpital, dopo aver riscritto l'argomento della funzione seno come $\operatorname{senh}(\ln(z)) = z/2 - 1/(2z)$,

$$C_0 = \lim_{z\to 1} \frac{z - 1 - \operatorname{sen}(z/2 - 1/(2z))}{(z-1)\operatorname{sen}(z/2 - 1/(2z))} = \lim_{z\to 1} \frac{1 - \cos(z/2 - 1/(2z))\left(1/2 + 1/\left(2z^2\right)\right)}{\operatorname{sen}(z/2 - 1/(2z)) + (z-1)\cos(z/2 - 1/(2z))\,(1/2 + 1/(2z^2))} \,,$$

è ancora una forma zero su zero, deriviamo ulteriormente scrivendo solo i termini non nulli nel limite considerato

$$C_0 = \lim_{z\to 1} \frac{\overbrace{-\cos(z/2 - 1/(2z))\left(-1/z^3\right)}^{\to 1} + \mathscr{O}(z-1)}{\underbrace{\cos(z/2 - 1/(2z))\left(1/2 + 1/\left(2z^2\right)\right)}_{\to 1} + \underbrace{\cos(z/2 - 1/(2z))\left(1/2 + 1/\left(2z^2\right)\right)}_{\to 1} + \mathscr{O}(z-1)} = \frac{1}{2} \,,$$

Calcoliamo lo stesso limite usando lo sviluppo di Mittag-Leffler con il valore costante della parte intera

$$C_0 = \frac{1}{2} = \lim_{z\to 1}\left(\mathcal{A}(z) - \frac{1}{z-1}\right) = \lim_{z\to 1}\left(\phi + \frac{1}{z+1} + 4z\left(z^2-1\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z^2-1)^2 - 4k^2\pi^2 z^2}\right) = \phi + \frac{1}{2} \,,$$

ne consegue che la parte intera è nulla, cioè: $\phi = 0$. Lo sviluppo di Mittag-Leffler completo è quindi

$$\mathcal{A}(z) = \frac{2z}{z^2 - 1} + 4z\left(z^2 - 1\right)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z^2-1)^2 - 4k^2\pi^2 z^2} \,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Facendo unicamente uso dell'espansione di Weierstrass della funzione seno iperbolico e della sua derivata prima, si dimostri l'identità

$$z\coth(z) = 1 + 2z^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + k^2\pi^2} \,.$$

Soluzione del terzo problema

Per ottenere l'espansione di Weirstrass della funzione seno iperbolico, partiamo da quella ben nota della funzione seno, o meglio della funzione $\operatorname{sen}(z)/z$ priva dello zero nell'origine, ovvero

$$\frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) ,$$

da cui

$$\operatorname{sen}(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

La relazione che lega le funzioni seno e seno iperbolico è

$$\operatorname{sen}(z) = -i \operatorname{senh}(iz) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{senh}(z) = -i \operatorname{sen}(iz),$$

usando la precedente relazione

$$\operatorname{senh}(z) = -i \operatorname{sen}(iz) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

La derivata prima della funzione seno iperbolico è

$$\frac{d \operatorname{senh}(z)}{dz} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z^2}{j^2\pi^2} \prod_{k=1, k\neq j}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Ri-inseriamo il fattore $\left(1 + z^2/\left(j^2\pi^2\right)\right)$ nel secondo prodotto, moltiplicando e dividendo per lo stesso, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d \operatorname{senh}(z)}{dz} &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z^2}{j^2\pi^2} \left(1 + \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \\
&= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z^2}{j^2\pi^2} \left(1 + \frac{z^2}{j^2\pi^2}\right)^{-1}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \\
&= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2z^2}{j^2\pi^2} \frac{j^2\pi^2}{z^2 + j^2\pi^2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \\
&= \left(1 + 2z^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + j^2\pi^2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).
\end{aligned}$$

Sapendo che la derivata prima della funzione seno iperbolico è la funzione coseno iperbolico e che il prodotto che compare nell'ultimo membro è l'espansione di Weirstrass dell'opposto della funzione seno iperbolico divisa per la z, si ha

$$\cosh(z) = \frac{d \operatorname{senh}(z)}{dz} = \left(1 + 2z^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + j^2\pi^2}\right) \underbrace{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}_{= \operatorname{senh}(z)/z} = \left(1 + 2z^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + j^2\pi^2}\right) \frac{\operatorname{senh}(z)}{z}.$$

La quantità tra parentesi tonde è quella cercata per cui si ha

$$z \frac{\cosh(z)}{\operatorname{senh}(z)} = 1 + 2z^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + j^2\pi^2},$$

ovvero l'identità richiesta

$$z \coth(z) = 1 + 2z^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + j^2\pi^2}.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si verifichi il principio di indeterminazione di Heisenberg per i primi due operatori di Pauli $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$, e lo stato $|\psi\rangle$, sapendo che

$$\hat{\sigma}_3 |\psi\rangle = \frac{|z_+\rangle - 2|z_-\rangle}{\sqrt{5}},$$

dove i vettori $|z_+\rangle$ e $|z_-\rangle$ sono gli autostati del terzo operatore di Pauli, verificano, quindi, le due equazioni agli autovalori

$$\hat{\sigma}_3 |z_\pm\rangle = \pm |z_\pm\rangle.$$

Soluzione del quarto problema

Il principio di indeterminazione di Heisenberg per i primi due operatori di Pauli rispetto allo stato $|\psi\rangle$ è

$$\Delta\sigma_{1\psi}\Delta\sigma_{2\psi} \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2]\rangle_\psi\right| ,$$

dove $\Delta\sigma_{j\psi}$ è lo scarto quadratico medio dell'operatore $\hat{\sigma}_j$ rispetto allo stato $|\psi\rangle$, con $j = 1, 2$, ed è definito come

$$\Delta\sigma_{j\psi} = \sqrt{\langle\hat{\sigma}_j^2\rangle_\psi - \langle\hat{\sigma}_j\rangle_\psi^2} ,$$

mentre $\langle\hat{\sigma}_j\rangle_\psi$ e $\langle\hat{\sigma}_j^2\rangle_\psi$ sono i valori di aspettazione degli operatori $\hat{\sigma}_j$ e $\hat{\sigma}_j^2$ rispetto allo stato $|\psi\rangle$, definiti come

$$\langle\hat{\sigma}_j\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{\sigma}_j|\psi\rangle , \qquad \langle\hat{\sigma}_j^2\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{\sigma}_j^2|\psi\rangle , \qquad j = 1, 2 .$$

Usiamo come base canonica quella degli autostati del terzo operatore di Pauli, sono gli elementi dell'insieme $\{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}$. Come è noto, le matrici che rappresentano gli operatori di Pauli rispetto a questa base sono le cosiddette matrici di Pauli

$$\hat{\sigma}_1 \overset{z}{\hookleftarrow} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \hat{\sigma}_2 \overset{z}{\hookleftarrow} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \hat{\sigma}_3 \overset{z}{\hookleftarrow} \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Inoltre, usando l'azione del terzo operatore di Pauli sullo stato $|\psi\rangle$, è possibile ottenere il vettore matriciale che rappresenta lo stato $|\psi\rangle$ rispetto alla base $\{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}$. Si ha la decomposizione

$$|\psi\rangle = \psi^+|z_+\rangle + \psi^-|z_-\rangle ,$$

dove $\psi^\pm$ è la componente contro-variante del vettore $|\psi\rangle$ rispetto a $|z_\pm\rangle$ e quindi

$$|\psi\rangle \overset{z}{\hookleftarrow} \psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} .$$

L'azione dell'operatore $\hat{\sigma}_3$ sul vettore $|\psi\rangle$, considerandone la decomposizione rispetto alla base $\{|z_+\rangle, |z_-\rangle\}$, è

$$\hat{\sigma}_3|\psi\rangle = \hat{\sigma}_3\left(\psi^+|z_+\rangle + \psi^-|z_-\rangle\right) = \psi^+\hat{\sigma}_3|z_+\rangle + \psi^-\hat{\sigma}_3|z_-\rangle = \psi^+|z_+\rangle - \psi^-|z_-\rangle ,$$

confrontando questo risultato con il dato del problema

$$\hat{\sigma}_3|\psi\rangle = \frac{|z_+\rangle - 2|z_-\rangle}{\sqrt{5}} ,$$

si ottengono le componenti contro-varianti

$$\psi^+ = \frac{1}{\sqrt{5}} , \qquad \psi^- = \frac{2}{\sqrt{5}} ,$$

da cui la rappresentazione matriciale

$$|\psi\rangle \overset{z}{\hookleftarrow} \psi = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Per calcolare gli scarti quadrataci medi, calcoliamo i valori di aspettazione degli operatori $\hat{\sigma}_1$ e $\hat{\sigma}_2$ e dei lori quadrati, si hanno

$$\langle\sigma_1\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{\sigma}_1|\psi\rangle = \psi^\dagger\sigma_1\psi = \frac{1}{5}(1\ 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} ,$$
$$\langle\sigma_2\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{\sigma}_2|\psi\rangle = \psi^\dagger\sigma_2\psi = \frac{1}{5}(1\ 2)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

e, poiché $\hat{\sigma}_j^2 = \hat{I}$, con $j = 1, 2, 3$, i valori di aspettazione degli operatori al quadrato sono

$$\langle\sigma_j^2\rangle_\psi = \langle I\rangle_\psi = \langle\psi|\psi\rangle = 1 , \qquad \forall\, j \in \{1, 2, 3\} .$$

Ne consegue che gli scarti quadratici medi sono

$$\Delta\sigma_{1\psi} = \sqrt{\langle\sigma_1^2\rangle_\psi - \langle\sigma_1\rangle_\psi^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}\,,$$
$$\Delta\sigma_{2\psi} = \sqrt{\langle\sigma_2^2\rangle_\psi - \langle\sigma_2\rangle_\psi^2} = \sqrt{1} = 1\,.$$

Per ciò che concerne il valore di aspettazione rispetto allo stato $k\psi$ del commutatore, usando l'algebra degli operatori di Pauli, si ha

$$\langle[\hat\sigma_1,\hat\sigma_2]\rangle_\psi = \langle 2i\hat\sigma_3\rangle_\psi = 2i\langle\psi|\hat\sigma_3|\psi\rangle = 2i\langle\psi|\hat\sigma_3|\psi\rangle = \frac{2i}{5}\,(1\ 2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = -\frac{6i}{5}\,,$$

quindi il secondo membro della disuguaglianza del principio di indeterminazione di Heisenberg è

$$\frac{1}{2}\left|\langle[\hat\sigma_1,\hat\sigma_2]\rangle_\psi\right| = \frac{1}{2}\left|-\frac{6i}{5}\right| = \frac{3}{5}\,.$$

Il primo membro della stessa è

$$\Delta\sigma_{1\psi}\Delta\sigma_{2\psi} = \frac{3}{5}\,,$$

concludiamo verificando che il principio è verificato avendo

$$\Delta\sigma_{1\psi}\Delta\sigma_{2\psi} = \frac{1}{2}\left|\langle[\hat\sigma_1,\hat\sigma_2]\rangle_\psi\right| = \frac{3}{5}\,.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 5/30)

Avvalendosi dei teoremi sulle trasformate di Fourier si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 e^{-|x_1|-|x_2|-|x_3+x_1|-|x_3+x_2|} = \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)^4}\,.$$

Soluzione del quinto problema

La funzione integranda a primo membro può essere scritta come il prodotto di due convoluzioni. Infatti con la sostituzione $x_3' = -x_3$, fattorizzando e riordinando opportunamente i fattori esponenziali, si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 e^{-|x_1|-|x_2|-|x_3+x_1|-|x_3+x_2|} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3' e^{-|x_1|-|x_2|-|-x_3'+x_1|-|-x_3'+x_2|}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_3' \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{-|x_1|-|x_1-x_3'|}\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{-|x_2|-|x_2-x_3'|}\,.\end{aligned}$$

Gli integrali in dx_1 e dx_2 sono delle convoluzioni, ovvero, cambiando i segni negli argomenti dei moduli,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{-|x_1|-|x_1-x_3'|} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 e^{-|x_1|}e^{-|x_3'-x_1|} = \left(e^{-|x|} * e^{-|x|}\right)(x_3')\,,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{-|x_2|-|x_2-x_3'|} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 e^{-|x_2|}e^{-|x_3'-x_2|} = \left(e^{-|x|} * e^{-|x|}\right)(x_3')\,.$$

Sono convoluzioni della stessa funzione, l'esponenziale dell'opposto del modulo $e^{-|x|}$, che è una funzione a quadrato sommabile e quindi si può applicare il teorema di Plancherel. L'integrale di partenza, ponendo $x_3' = x$, diventa

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 e^{-|x_1|-|x_2|-|x_3+x_1|-|x_3+x_2|} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-|x|} * e^{-|x|}\right)(x)\left(e^{-|x|} * e^{-|x|}\right)(x)dx\\ &= \left(\left(e^{-|x|} * e^{-|x|}\right),\left(e^{-|x|} * e^{-|x|}\right)\right)\,,\end{aligned}$$

dove la quantità dell'ultimo membro indica il prodotto scalare definito in $L^2(\mathbb{R})$ come

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx\,, \qquad \forall\, f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})\,.$$

Usiamo l'identità di Parseval generalizzata, tesi del teorema di Plancherel. Si ha che, $\forall\, f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$,

$$(f,g) = (\mathscr{F}_k[f], \mathscr{F}_k[g])\,,$$

ovvero, i prodotti scalari delle funzioni e delle loro trasformate di Fourier sono uguali. Nel caso in esame otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 e^{-|x_1|-|x_2|-|x_3+x_1|-|x_3+x_2|} &= \left(\left(e^{-|x|} * e^{-|x|}\right), \left(e^{-|x|} * e^{-|x|}\right)\right) \\ &= \left(\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|} * e^{-|x|}\right], \mathscr{F}_k\left[e^{-|x|} * e^{-|x|}\right]\right)\,.\end{aligned}$$

Sfruttando il teorema della convoluzione,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|} * e^{-|x|}\right] &= \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|}\right]^2 = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dk\right)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-x(ik-1)}dk + \int_{0}^{\infty} e^{-x(ik+1)}dk\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}\right)^2 \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(1+k^2)^2}\,.\end{aligned}$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 e^{-|x_1|-|x_2|-|x_3+x_1|-|x_3+x_2|} &= \left(\mathscr{F}_k\left[e^{-|x|} * e^{-|x|}\right], \mathscr{F}_k\left[e^{-|x|} * e^{-|x|}\right]\right) \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(1+k^2)^4}\,,\end{aligned}$$

che, con la sostituzione $y = k$ nell'ultimo integrale, rappresenta l'identità richiesta

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 e^{-|x_1|-|x_2|-|x_3+x_1|-|x_3+x_2|} = \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^4}\,.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/30)

Sapendo che l'operatore $\widehat{\pitchfork}$, definito nello spazio di Hilbert a quattro dimensioni E_4, è tale che

$$\widehat{\pitchfork}|e_1\rangle = |e_2\rangle\,, \qquad \widehat{\pitchfork}|e_3\rangle = |e_4\rangle\,, \qquad \widehat{\pitchfork}^2 = \widehat{\pitchfork} + \hat{I}\,,$$

dove $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4 \subset E_4$ è una base canonica ortonormale dello spazio di Hilbert E_4, si determinino: lo spettro discreto dell'operatore $\widehat{\pitchfork}$, la matrice 4×4 $\pitchfork$ e i vettori 4×1 che rappresentano, rispetto alla base canonica data $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^4$, l'operatore stesso e i suoi autovettori.

Curiosità. Il simbolo $\pitchfork$ rappresenta la lettera A dell'alfabeto *Futurama*.

Soluzione del sesto Problema

Per ottenere la matrice $\pitchfork$, tale che $\widehat{\pitchfork} \overset{e}{\longleftrightarrow} \pitchfork$ usiamo le due azioni date e le due ulteriori che si ottengono dalla relazione $\widehat{\pitchfork}^2 = \widehat{\pitchfork} + \hat{I}$. Applichiamo l'operatore su ambo i membri dell'identità $\widehat{\pitchfork}|e_1\rangle = |e_2\rangle$

$$\begin{aligned}\widehat{\pitchfork}^2|e_1\rangle &= \widehat{\pitchfork}|e_2\rangle && \text{a primo membro usiamo: } \widehat{\pitchfork}^2 = \widehat{\pitchfork} + \hat{I} \\ \left(\widehat{\pitchfork} + \hat{I}\right)|e_1\rangle &= \widehat{\pitchfork}|e_2\rangle && \\ \widehat{\pitchfork}|e_1\rangle + |e_1\rangle &= \widehat{\pitchfork}|e_2\rangle && \\ |e_2\rangle + |e_1\rangle &= \widehat{\pitchfork}|e_2\rangle && \text{a primo membro usiamo: } \widehat{\pitchfork}|e_1\rangle = |e_2\rangle\,,\end{aligned}$$

da cui si ha l'azione sul secondo vettore della base

$$\widehat{\text{⚓}}|e_2\rangle = |e_1\rangle + |e_2\rangle\,.$$

Usiamo lo stesso procedimento per l'identità $\widehat{\text{⚓}}|e_3\rangle = |e_4\rangle$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{⚓}}^2|e_3\rangle &= \widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle && \text{a primo membro usiamo: } \widehat{\text{⚓}}^2 = \widehat{\text{⚓}} + \hat{I}\\
\left(\widehat{\text{⚓}} + \hat{I}\right)|e_3\rangle &= \widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle && \\
\widehat{\text{⚓}}|e_3\rangle + |e_3\rangle &= \widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle && \\
|e_4\rangle + |e_3\rangle &= \widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle && \text{a primo membro usiamo: } \widehat{\text{⚓}}|e_3\rangle = |e_4\rangle\,,
\end{aligned}$$

da cui si ha l'azione sul quarto vettore della base

$$\widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle = |e_3\rangle + |e_4\rangle\,.$$

La matrice che rappresenta l'operatore $\widehat{\text{⚓}}$ rispetto alla base canonica è

$$\widehat{\text{⚓}} \overset{e}{\hookleftarrow} \text{⚓} = \begin{pmatrix} \langle e_1|\widehat{\text{⚓}}|e_1\rangle & \langle e_1|\widehat{\text{⚓}}|e_2\rangle & \langle e_1|\widehat{\text{⚓}}|e_3\rangle & \langle e_1|\widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle \\ \langle e_2|\widehat{\text{⚓}}|e_1\rangle & \langle e_2|\widehat{\text{⚓}}|e_2\rangle & \langle e_2|\widehat{\text{⚓}}|e_3\rangle & \langle e_2|\widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle \\ \langle e_3|\widehat{\text{⚓}}|e_1\rangle & \langle e_3|\widehat{\text{⚓}}|e_2\rangle & \langle e_3|\widehat{\text{⚓}}|e_3\rangle & \langle e_3|\widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle \\ \langle e_4|\widehat{\text{⚓}}|e_1\rangle & \langle e_4|\widehat{\text{⚓}}|e_2\rangle & \langle e_4|\widehat{\text{⚓}}|e_3\rangle & \langle e_4|\widehat{\text{⚓}}|e_4\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'operatore è hermitiano, in quanto la matrice che lo rappresenta rispetto a una base ortonormale è reale e simmetrica. Per ottenere lo spettro discreto, o almeno parte di esso, è utile la relazione $\widehat{\text{⚓}}^2 = \widehat{\text{⚓}} + \hat{I}$. Le equazioni agli autovalori sono

$$\widehat{\text{⚓}}|a_k\rangle = \alpha_k|a_k\rangle\,, \qquad k \in \{1,2,3,4\}\,,$$

applichiamo su ambo i membri lo stesso operatore e sfruttiamo la relazione data a primo membro e la stessa equazione agli autovalori a secondo membro, si ha

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{⚓}}^2|a_k\rangle &= \alpha_k\widehat{\text{⚓}}|a_k\rangle \\
\left(\widehat{\text{⚓}} + \hat{I}\right)|a_k\rangle &= \alpha_k^2|a_k\rangle \\
(\alpha_k + 1)\,|a_k\rangle &= \alpha_k^2|a_k\rangle\,, \qquad \forall\, k \in \{1,2,3,4\}\,.
\end{aligned}$$

Ne consegue che gli autovalori verificano l'equazione di secondo grado $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, i primi due autovalori sono

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

L'equazione secolare è

$$\begin{aligned}
\det(\text{⚓} - \alpha I) &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\
-\alpha\det\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1-\alpha \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\
-\alpha(1-\alpha)\left[\alpha(\alpha-1)-1\right] - \left[\alpha(\alpha-1)-1\right] &= 0 \\
\left[\alpha(\alpha-1)-1\right]^2 &= 0\,,
\end{aligned}$$

la soluzioni e quindi gli autovalori sono i due già trovati, entrambi degeneri com molteplicità due, cioè

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \qquad \alpha_2 = \alpha_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

Le componenti contro-varianti dei vettori che rappresentano gli autovettori sono le soluzioni dei quattro sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -\alpha_k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k^1 \\ a_k^2 \\ a_k^3 \\ a_k^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \{1,2,3,4\},$$

dove a_k^j è la j-esima componente contro-variante del vettore che rappresenta il k-esimo autovettore, con $k,j \in \{1,2,3,4\}$. È possibile usare una notazione a blocchi $(2\times 2)\times(2\times 2)$. Per i primi due autovettori poniamo $a_{1,2}^3 = a_{1,2}^4 = 0$ e $a_{1,2}^1 = a$, i due sistemi omogenei sono

$$\begin{pmatrix} -\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left(1\mp\sqrt{5}\right)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \left(1\mp\sqrt{5}\right)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a_{1,2}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dall'equazione che si ottiene dal primo elemento si ha

$$a_{1,2}^2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}a\,.$$

I primi due autovettori sono rappresentati da

$$|a_{1,2}\rangle \overset{e}{\hookleftarrow}, a_{1,2} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \left(1\pm\sqrt{5}\right)/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

scegliamo dei valori per a tali da normalizzare all'unità i vettori corrispondenti. I prodotti scalari sono

$$\langle a_{1,2}|a_{1,2}\rangle = |a|^2 \left(1 + \frac{\left(1\pm\sqrt{5}\right)^2}{4}\right) = |a|^2 \frac{5\pm\sqrt{5}}{2},$$

imponendo $\langle a_{1,2}|a_{1,2}\rangle = 1$ e scegliendo valori reali si ottiene

$$a = \sqrt{\frac{2}{5\pm\sqrt{5}}}\,.$$

Le espressioni dei vettori normalizzati sono

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \left(1+\sqrt{5}\right)/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \left(1-\sqrt{5}\right)/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per la seconda coppia di autovettori usiamo la stessa procedura, annullando, questa volta, le prime due componenti, ovvero poniamo $a_{3,4}^1 = a_{3,4}^2 = 0$ e $a_{3,4}^3 = a$, i due sistemi omogenei sono

$$\begin{pmatrix} -\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \left(1\mp\sqrt{5}\right)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1\pm\sqrt{5}\right)/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \left(1\mp\sqrt{5}\right)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ a_{1,2}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori a_3 e a_4 hanno i primi due elementi nulli e i secondi due uguali ai primi due dei vettori a_1 e a_2, cioè

$$a_3 = \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \left(1+\sqrt{5}\right)/2 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \left(1-\sqrt{5}\right)/2 \end{pmatrix}.$$