

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA SCRITTA DEL 20 SETTEMBRE 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di semplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

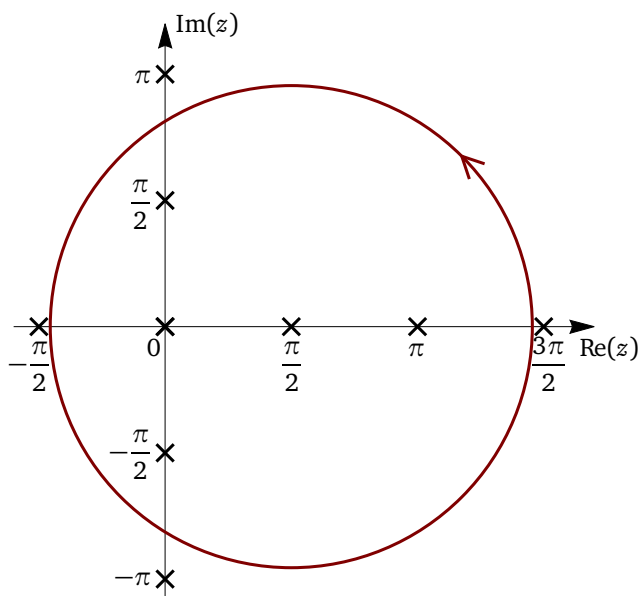
PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$M = \oint_{|z-\pi/2|=3} \frac{dz}{\operatorname{sen}(z) \cos(z) \operatorname{senh}(z) \operatorname{cosh}(z)}.$$

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Il percorso d'integrazione è la circonferenza mostrata in figura, essa ha centro in $z_0 = \pi/2$ e raggio $r = 3$. È infatti il luogo geometrico dei punti z che verificano la condizione indicata a pedice: $|z - \pi/2| = 3$. Come sempre, l'orientamento della stessa circonferenza è quello positivo ovvero in verso anti-orario.



Riscriviamo l'integrale usando le formule di duplicazione della funzione seno e seno iperbolico, si ha

$$M = 4 \oint_{|z-\pi/2|=2} \frac{dz}{\operatorname{sen}(2z) \operatorname{senh}(2z)}.$$

In questa forma, si deducono agevolmente le caratteristiche delle singolarità della funzione integranda. Si tratta di una funzione meromorfa, in quanto rapporto di funzioni intere. I poli hanno posizioni e ordini coincidenti con quelli

degli zeri della funzione a denominatore $\text{sen}(2z) \sinh(2z)$. L'insieme dei poli, evidenziati in figura con il simbolo "x", è quindi

$$\{\rho_k = k\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \cup \{\eta_k = ik\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \cup \{\rho_0 = 0\}.$$

Il polo nell'origine, $\rho_0 = 0$ è doppio, mentre tutti gli altri sono semplici. Il percorso d'integrazione avvolge i cinque poli: $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = \pi/2$, $\rho_2 = \pi$, $\eta_1 = \pi/2$, $\eta_{-1} = -\pi/2$, quindi, usando il teorema dei residui si ha

$$M = 4 \oint_{|z-\pi/2|=2} \frac{dz}{\text{sen}(2z) \sinh(2z)} = 2i\pi \left(\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}\left[f(z), \frac{\pi}{2}\right] + \text{Res}[f(z), \pi], \right. \\ \left. \text{Res}\left[f(z), i\frac{\pi}{2}\right] + \text{Res}\left[f(z), -i\frac{\pi}{2}\right] \right),$$

dove $f(z) = 4/(\text{sen}(2z) \sinh(2z))$ è la funzione integranda.

Il residuo nell'origine è nullo come conseguenza della parità della funzione integranda, per cui si ha l'identità $f(z) = f(-z)$. Infatti, avendo che l'origine rappresenta un polo doppio, la serie di Laurent in essa centrata ha la forma

$$f(z) = \frac{C_{-2}}{z^2} + C_0 + C_2 z^2 + \dots,$$

contiene necessariamente solo le potenze pari, quindi si ha: $C_{-1} = 0$ e il residuo nell'origine, coincidente con questo coefficiente, è nullo.

I residui nei poli $\eta_{\pm 1}$ sono

$$\text{Res}[f(z), \pm i\pi/2] = \lim_{z \rightarrow \pm i\pi/2} 4 \frac{z \mp i\pi/2}{\text{sen}(2z) \sinh(2z)} = \frac{4}{\pm \text{sen}(i\pi)} \frac{1}{2 \cosh(\pm i\pi)} = \mp \frac{2}{i \sinh(\pi)} = \pm i \frac{2}{\sinh(\pi)},$$

mentre per quelli nei poli reali semplici si hanno

$$\text{Res}[f(z), \pi/2] = \lim_{z \rightarrow \pi/2} 4 \frac{z - \pi/2}{\text{sen}(2z) \sinh(2z)} = \frac{4}{\sinh(\pi)} \frac{1}{2 \cos(\pi)} = -\frac{2}{\sinh(\pi)};$$

$$\text{Res}[f(z), \pi] = \lim_{z \rightarrow \pi} 4 \frac{z - \pi}{\text{sen}(2z) \sinh(2z)} = \frac{4}{\sinh(2\pi)} \frac{1}{2 \cos(2\pi)} = \frac{2}{\sinh(2\pi)}.$$

La somma dei residui dà il risultato finale

$$M = 2i\pi (\text{Res}[f(z), \pi/2] + \text{Res}[f(z), \pi]) = 4i\pi \left(\frac{1}{\sinh(2\pi)} - \frac{1}{\sinh(\pi)} \right).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$J = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\sinh(x) \cosh(x)} dx.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Usando le formule di duplicazione del funzione seno iperbolico, possiamo riscrivere l'integrale nella forma

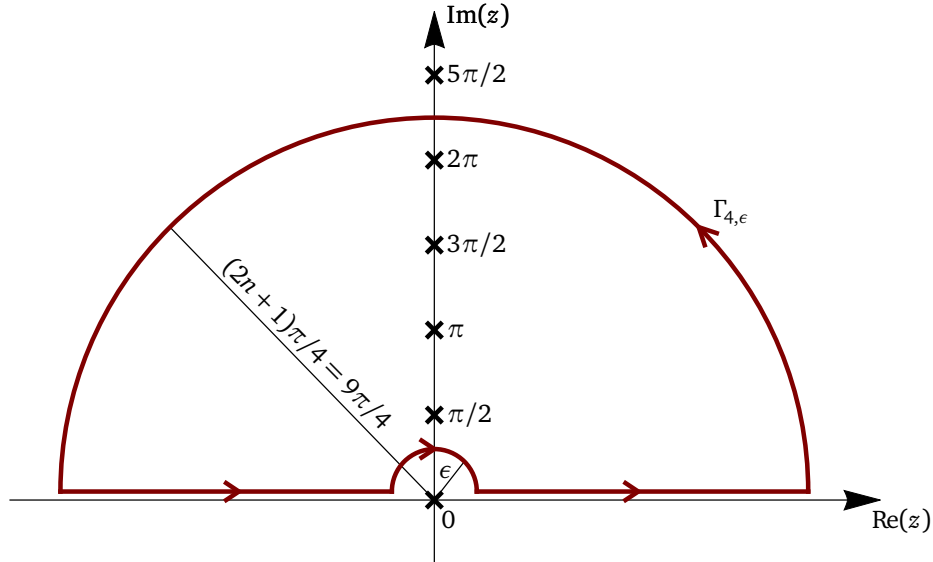
$$J = 2 \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\sinh(2x)} dx.$$

La funzione integranda è meromorfa, ha poli semplici in corrispondenza degli zeri semplici della funzione a denominatore, $\sinh(2z)$, quindi nei punti della successione $\{z_k = ik\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Solo l'origine $z_0 = 0$ appartiene al percorso d'integrazione ed è quindi rispetto ad essa che si considera il valore principale.

Consideriamo il percorso chiuso

$$\Gamma_{\epsilon, n} = [-(2n+1)\pi/4, -\epsilon] \cup (-\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}) \cup [\epsilon, (2n+1)\pi/4] \cup \{z : z = e^{i\theta}(2n+1)\pi/4, \theta \in [0, \pi]\},$$

con $n \in \mathbb{N}$, mostrato in figura nel caso $n = 4$. Tale percorso si ottiene dall'unione dei due tratti rettilinei, reali e simmetrici rispetto all'origine $[-(2n+1)\pi/4, -\epsilon]$ e $[\epsilon, (2n+1)\pi/4]$, e le semicirconferenze centrate nell'origine, immerse nel semipiano delle parti immaginari positive, di raggi, rispettivamente, ϵ e $(2n+1)\pi/4$. La curva $\Gamma_{\epsilon, n}$ avvolge i primi n poli della funzione integranda con parte immaginaria positiva, cioè gli elementi dell'insieme $\{z_k = ik\pi/2\}_{k=1}^n$. Questi poli sono evidenziati dal simbolo "x" nella figura in cui sono riportati quelli per $n = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 . Considerando i limiti per n che diverge e ϵ tende a zero e usando il teorema dei residui si ha



$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \oint_{\Gamma_{n, \epsilon}} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz &= J + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \oint_{-\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz + \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \oint_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz \\ &= 2i\pi \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left[\frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)}, ik\pi/2 \right], \end{aligned}$$

dove γ_ϵ e γ_n sono le semicirconferenze centrate nell'origine, immerse nel semipiano delle parti immaginarie positive di raggi, rispettivamente, ϵ e $(2n+1)\pi/4$. Dalla precedente relazione si ricava l'integrale cercato come

$$J = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \oint_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \oint_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz + 2i\pi \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left[\frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)}, ik\pi/2 \right],$$

dove abbiamo usato la linearità dell'integrale ponendo: $-\int_{-\gamma_\epsilon} = \int_{\gamma_\epsilon}$.

Calcoliamo i contributi dati dagli integrali sulle semicirconferenze, usando i lemmi d'integrazione sugli archi si hanno

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz = i\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)} z = i\pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz = i\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)} z = 0,$$

che sono conseguenza, rispettivamente dei limiti uniformi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)} z \stackrel{U.}{=} 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)} z \stackrel{U.}{=} 0.$$

Il residuo nel k -esimo polo $z_k = ik\pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$, vale

$$\operatorname{Res} \left[\frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)}, ik\pi/2 \right] = (-1)^k e^{-k\pi/2} = (-e^{-\pi/2})^k.$$

Alla luce dei precedenti risultati si ha

$$\begin{aligned} J &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \oint_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \oint_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz + 2i\pi \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left[\frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)}, ik\pi/2 \right] \\ &= i\pi + 2i\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-e^{-\pi/2})^k = i\pi \left(1 + \frac{2}{1 + e^{-\pi/2}} - 2 \right) = i\pi \frac{1 - e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi/2}}, \end{aligned}$$

infine, moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{\pi/4}$ e usando le funzioni iperboliche si arriva al risultato finale

$$J = i\pi \frac{e^{i\pi/4} - e^{-\pi/4}}{e^{i\pi/4} + e^{-\pi/4}} = i\pi \frac{\sinh(\pi/4)}{\cosh(\pi/4)} = i\pi \tanh(\pi/4).$$

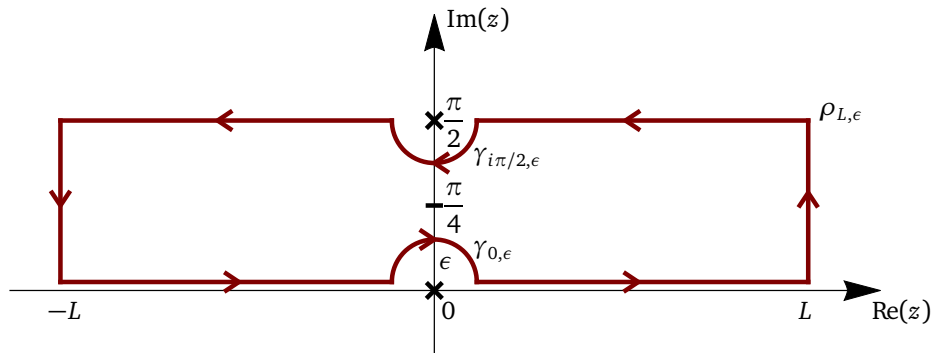
UN'ALTRA POSSIBILITÀ

Un metodo di calcolo dell'integrale J alternativo al precedente è quello che consiste nell'utilizzo di un integrale della stessa funzione integranda sul percorso chiuso rappresentato dal rettangolo $\rho_{L,\epsilon}$, mostrato in figura, dentato internamente sulle basi inferiore e superiore, di larghezza pari a $2L$ e altezza $\pi/2$. In particolare si ha la definizione

$$\begin{aligned} \rho_{L,\epsilon} = & [-L, -\epsilon] \cup (-\gamma_{0,\epsilon}) \cup [\epsilon, L] \cup [L, L + i\pi/2] \cup [L + i\pi/2, \epsilon + i\pi/2] \\ & \cup (-\gamma_{i\pi/2,\epsilon}) \cup [-\epsilon + i\pi/2, -L + i\pi/2] \cup [-L + i\pi/2, -L], \end{aligned}$$

dove il simbolo $[z_1, z_2]$ è il segmento rettilineo di estremi z_1 e z_2 percorso nel verso che va da z_1 a z_2 , e gli archi sono

$$\gamma_{0,\epsilon} = \{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}, \quad \gamma_{i\pi/2,\epsilon} = \{z : z = i\pi/2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\}.$$



Nei limiti $L \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$, usando il teorema dei residui e considerando i singoli contributi all'integrale si ha

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \oint_{\rho_{L,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz &= 0 \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2 \oint_{\rho_{L,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{\sinh(2z)} dz &= J - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_{0,\epsilon}} + \int_{\gamma_{i\pi/2,\epsilon}} \right) + \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\int_{[L, L+i\pi/2]} + \int_{[-L+i\pi/2, -L]} \right) \\ & \quad + \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(2e^{-\pi/2} \int_L^\epsilon \frac{e^{-x}}{-\sinh(2x)} dx + 2e^{-\pi/2} \int_{-\epsilon}^{-L} \frac{e^{-x}}{-\sinh(2x)} dx \right), \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{=0}$ $\underbrace{\hspace{15em}}_{J e^{-\pi/2}}$

con i limiti uniformi sugli archi di raggio ϵ , centrati rispettivamente nell'origine e in $i\pi/2$.

$$A_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)} z \stackrel{U.}{=} 1, \quad A_{i\pi/2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{2e^{iz}}{\sinh(2z)} \left(z - \frac{i\pi}{2} \right) \stackrel{U.}{=} -e^{-\pi/2},$$

Dell'identità precedente si ottiene l'equazione per l'integrale J

$$J = i\pi \frac{1 - e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi/2}} = i\pi \frac{e^{\pi/4} - e^{-\pi/4}}{e^{\pi/4} + e^{-\pi/4}},$$

in termini della tangente iperbolica, si arriva al risultato precedente

$$J = i\pi \tanh(\pi/4).$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si determini la serie di Pierre Alphonse Laurent centrata in $z = 0$ e convergente in $z_0 = \pi$ della funzione

$$f_n(z) = \frac{z^n}{(1+z^{n+1})^2},$$

con $n \in \mathbb{N}$. Si ottenga, in particolare, l'espressione che definisce il generico coefficiente di Laurent in funzione dell'indice, ovvero della potenza di z cui si riferisce e del numero naturale n , da cui dipende la funzione data.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione è meromorfa ed ha, come singolarità, $n+1$ poli doppi in corrispondenza delle $n+1$ radici $(n+1)$ -esime di -1 . Essa può essere facilmente integrata e quindi scritta in termini della derivata prima nella forma seguente

$$f_n(z) = \frac{z^n}{(1+z^{n+1})^2} = -\frac{1}{n+1} \frac{d}{dz} \frac{1}{1+z^{n+1}}.$$

Consideriamo lo sviluppo di Laurent della funzione primitiva

$$F_n(z) = -\frac{1}{n+1} \frac{1}{1+z^{n+1}},$$

quindi, derivando membro a membro, otteniamo lo sviluppo di Laurent richiesto ovvero quello per la funzione originaria $f_n(z)$ centrato nell'origine e convergente in $z_0 = \pi$.

Poiché la funzione primitiva ha, come singolarità $n+1$ poli semplici esattamente negli stessi punti in cui la funzione $f_n(z)$ ha i poli doppi, ovvero in corrispondenza delle $n+1$ radici $(n+1)$ -esime di -1 . Ne consegue che si hanno solo due serie di Laurent centrate nell'origine, la prima avente come dominio di convergenza il cerchio unitario $C_1 = \{z : |z| < 1\}$, la seconda convergente nella corona circolare $C_{1\infty} = \{z : 1 < |z| < \infty\}$. Il punto z_0 appartiene alla corona circolare $C_{1\infty}$, di conseguenza la serie di Laurent da calcolare è la seconda.

Usiamo la somma della serie geometrica di ragione $1/z^{n+1}$ per ottenere in $C_{1\infty}$ la serie di Laurent della funzione primitiva, si ha

$$F_n(z) = -\frac{1}{n+1} \frac{1}{1+z^{n+1}} = -\frac{1}{(n+1)z^{n+1}} \frac{1}{1+1/z^{n+1}} = -\frac{1}{(n+1)z^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-(n+1)k}$$
$$F_n(z) = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-(n+1)(k+1)}.$$

La convergenza della serie è garantita dalla condizione: $|1/z^{n+1}| = 1/|z|^{n+1} < 1$, verificata da ogni $z \in C_{1\infty}$. In ogni insieme chiuso contenuto nella corona circolare $C_{1\infty}$ la serie converge uniformemente, ne consegue che la serie di Laurent della derivata coincide con la derivata membro a membro della serie, ovvero

$$f_n(z) = -\frac{1}{n+1} \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{-(n+1)(k+1)} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{d}{dz} z^{-(n+1)(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) z^{-(n+1)k-n-2}.$$

Al fine di ottenere la forma corretta della serie di Laurent e cioè una legge che ne descriva i coefficienti, procediamo come segue, scriviamo la serie formale

$$f_n(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{n,j} z^j = \sum_{j=-\infty}^{-n-2} C_{n,j} z^j,$$

dove $\{C_{n,j}\}_{j=-\infty}^{-n-2}$ è l'insieme dei coefficienti di Laurent della funzione $f_n(z)$. Ovviamente non è detto che siano tutti diversi da zero. D'altro canto, la nullità dei coefficienti con indice maggiore di $-n-2$ si deduce osservando che, al divergere di k , la potenza $-(n+1)k-n-2$ tende a $-\infty$, essendo $n+1 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Confrontando le due espressioni precedenti si ottiene la legge multipla per i coefficienti

$$C_{n,j} = \begin{cases} (-1)^k (k+1) & \forall j \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, -n-2] : k = -\frac{j+n+2}{n+1} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Il primo valore di j nell'insieme $\mathbb{Z} \cap (-\infty, -n-2] = \{-\infty, \dots, -n-3, -n-2\}$ che verifica la condizione per cui il rapporto $-(j+n+2)/(n+1)$ sia un numero intero positivo o lo zero è $j = -n-2$, infatti, in questo caso si ha $k = 0$, quindi $C_{n, -n-2} = 1$. Il successivo è $j = -2n-3$ cosicché $k = -(-2n-3+n+2)/(n+1) = 1$ e $C_{n, -2n-3} = -2$. Il terzo termine si ha per $j = -3n-4$, quindi $k = 2$. In definitiva i valori di j devono essere tali che il numeratore dell'espressione che dà k sia un multiplo negativo di $n+1$. I primi tre termini della serie di Laurent, quelli con le potenze maggiori, sono

$$f_n(z) = z^{-n-2} - 2z^{-2n-3} + 3z^{-3n-4} + \mathcal{O}(z^{-4n-5}).$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore \bar{O} è definito nello spazio di Hilbert a quattro dimensioni M_4 delle matrici 2×2 ad elementi complessi dalle sue azioni

$$\bar{O}\sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{O}\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{O}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{O}\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

sui vettori della base ortonormale $\{\sigma_k\}_{k=0}^3$, formata dalla matrice identità 2×2 σ_0 , unitamente alle tre matrici di Wolfgang Ernst Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ricordando che nello spazio vettoriale delle matrici il prodotto scalare è definito in termini della traccia, ovvero, per ogni coppia di matrici $a, b \in M_4$, si ha

$$(a, b) = \frac{1}{2} \text{Tr}(a^\dagger b),$$

si determinino lo spettro discreto $\sigma_d = \{\omega_j\}_{j=1}^4$ e gli autovettori dell'operatore \bar{O} , ovvero gli scalari e le matrici 2×2 dell'insieme $\{v_j\}_{j=1}^4 \subset M_4$, che verificano le equazioni agli autovalori

$$\bar{O}v_j = \omega_j v_j, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

L'operatore \bar{O} è rappresentato, rispetto alla base $\{\sigma_k\}_{k=0}^3$, da una matrice 4×4 , che indichiamo semplicemente con il simbolo O , i cui elementi si ottengono dai prodotti scalari

$$O_j^k = (\sigma_k, \bar{O}\sigma_j),$$

con $k, j = 0, 1, 2, 3$. Usando i dati del problema, gli elementi della prima riga della matrice O sono

$$\begin{aligned} O_0^0 &= (\sigma_0, \bar{O}\sigma_0) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix} \right] = -1, \\ O_1^0 &= (\sigma_0, \bar{O}\sigma_1) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0, \\ O_2^0 &= (\sigma_0, \bar{O}\sigma_2) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] = 0, \\ O_3^0 &= (\sigma_0, \bar{O}\sigma_3) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] = 1, \end{aligned}$$

quelli della seconda riga

$$\begin{aligned} O_0^1 &= (\sigma_1, \bar{O}\sigma_0) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right] = 0, \\ O_1^1 &= (\sigma_1, \bar{O}\sigma_1) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 1, \\ O_2^1 &= (\sigma_1, \bar{O}\sigma_2) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right] = 0, \\ O_3^1 &= (\sigma_1, \bar{O}\sigma_3) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 1, \end{aligned}$$

quelli della terza riga

$$\begin{aligned} O_0^2 &= (\sigma_2, \bar{O}\sigma_0) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 1, \\ O_1^2 &= (\sigma_2, \bar{O}\sigma_1) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right] = 0, \\ O_2^2 &= (\sigma_2, \bar{O}\sigma_2) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = -1, \\ O_3^2 &= (\sigma_2, \bar{O}\sigma_3) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} -i & -2i \\ 0 & i \end{pmatrix}\right] = 0, \end{aligned}$$

infine, la quarta riga

$$\begin{aligned} O_0^3 &= (\sigma_3, \bar{O}\sigma_0) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 2 \end{pmatrix}\right] = 1, \\ O_1^3 &= (\sigma_3, \bar{O}\sigma_1) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0, \\ O_2^3 &= (\sigma_3, \bar{O}\sigma_2) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right] = 0, \\ O_3^0 &= (\sigma_3, \bar{O}\sigma_3) = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right] = -1. \end{aligned}$$

Alla luce di quanto ottenuto, si ha la matrice

$$O = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(O - \omega I) &= 0 \\ \begin{pmatrix} -1-\omega & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\omega & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1-\omega & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\omega \end{pmatrix} &= 0 \\ -(1+\omega)^3(1-\omega) + (1-\omega)(1+\omega) &= 0 \\ (1+\omega)(1-\omega)[1-(1+\omega)^2] &= 0 \\ (1+\omega)(1-\omega)(-\omega)(2+\omega) &= 0, \end{aligned}$$

da cui si hanno i quattro autovalori

$$\omega_1 = -2, \quad \omega_2 = -1, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = 1.$$

Le rappresentazioni rispetto alla base data degli autovettori si ottengono come soluzioni dei quattro sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -1-\omega_j & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\omega_j & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1-\omega_j & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\omega_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^0 \\ v_j^1 \\ v_j^2 \\ v_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

dove v_j^k indica la k -esima componente contro-variante del j -esimo autovettore, relativo, quindi, al j -esimo autovalore ω_j , con $j = 1, 2, 3, 4$ e $k = 0, 1, 2, 3$. Per il primo autovettore si ha

$$v_1^0 = -v_1^3, \quad 3v_1^1 = -v_1^3, \quad v_1^0 = -v_1^2,$$

ponendo $v_1^1 = 1$ si hanno: $v_1^3 = -3$, $v_1^0 = 3$ e $v_1^2 = -3$, ovvero

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Nello spazio vettoriale delle matrici il vettore colonna v_1 rappresenta la matrice 2×2 V_1 , che si ottiene combinando la matrice identità e le matrici di Pauli con le componenti contro-varianti di v_1 e si ha

$$V_1 = \frac{1}{2\sqrt{7}} \sum_{j=0}^3 v_1^j \sigma_j = \frac{1}{2\sqrt{7}} \left[v_1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + v_1^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + v_1^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + v_1^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$V_1 = \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 0 & 1+3i \\ 1-3i & 6 \end{pmatrix}.$$

Per il secondo autovettore, relativo all'autovalore $\omega_2 = -1$, si ha

$$v_2^0 = v_2^3 = 0, \quad 2v_2^1 = -v_2^2 = 0, \quad v_2^2 = 1,$$

quindi si hanno le rappresentazioni vettoriale 4×1 v_2 e matriciale 2×2 V_2

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Il terzo autovettore, relativo all'autovalore $\omega_3 = 0$, si ottiene ponendo $v_3^0 = 1$ per cui si ha

$$v_3^3 = v_3^0 = v_3^2 = -v_3^1 = 1,$$

quindi si hanno le rappresentazioni vettoriale 4×1 v_3 e matriciale 2×2 V_3

$$v_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \frac{1}{2} (\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine l'autovettore relativo al quarto autovalore $\omega_4 = 1$ ha componenti

$$v_4^3 = 0, \quad v_4^0 = v_4^3/2 = 0, \quad v_4^2 = v_4^0/2 = 0, \quad v_4^1 = 1,$$

le rappresentazioni vettoriale 4×1 v_4 e matriciale 2×2 V_4 sono quindi

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che se l'operatore \hat{S} definito nello spazio di Hilbert E_n a dimensione finita $n \in \mathbb{N}$ è normale e ha lo spettro discreto reale allora è hermitiano. Ovvero: $\forall \hat{S} : E_n \rightarrow E_n$, tale che: $[\hat{S}, \hat{S}^\dagger] = 0$ e $\Omega_d = \{\sigma_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R} \implies \hat{S} = \hat{S}^\dagger$. Dove si è indicato con Ω_d lo spettro discreto dell'operatore.

Infine, si verifichi che l'operatore \hat{T} , definito nello spazio di Hilbert E_n dalle azioni sui vettori della base canonica ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^n$,

$$\begin{aligned}\hat{T}|e_j\rangle &= \sum_{m=j+1}^n |e_m\rangle + \tau_j |e_j\rangle, & j \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ \hat{T}|e_n\rangle &= \tau_n |e_n\rangle,\end{aligned}$$

con $\{\tau_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$, costituisce un contro esempio, in quanto \hat{T} è un operatore non normale, con autovalori reali, ma, appunto, non hermitiano.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Per la prima dimostrazione si procede come segue. Poiché l'operatore è normale esso è diagonalizzabile simultaneamente con il suo aggiunto, esiste quindi un insieme di autovettori ortonormali $\{|s_k\rangle\}_{k=1}^n \subset E_n$, comuni ai due operatori \hat{S} e \hat{S}^\dagger , che rappresenta una base dello spazio vettoriale. Le k -esime equazioni agli autovalori, $\forall k \in \{1, 2, \dots\}$, sono

$$\hat{S}|s_k\rangle = \sigma_k |s_k\rangle, \quad \hat{S}^\dagger |s_k\rangle = \eta_k |s_k\rangle,$$

dove indichiamo con $\Phi_d = \{\eta_k\}_{k=1}^n$ lo spettro discreto dell'operatore aggiunto \hat{S}^\dagger , considerandolo in generale, diverso da quello dell'operatore originale, ovvero l'insieme $\Phi_d \neq \Omega_d$.

Moltiplichiamo per il "bra" $\langle s_k|$ ambo i membri della duale della prima equazione e della seconda, e sfruttiamo la realtà degli autovalori σ_k per ottenere le due identità scalari

$$\langle s_k | \hat{S}^\dagger | s_k \rangle = \sigma_k^* \langle s_k | s_k \rangle = \sigma_k \langle s_k | s_k \rangle, \quad \langle s_k | \hat{S}^\dagger | s_k \rangle = \eta_k \langle s_k | s_k \rangle,$$

che, sottratte membro a membro danno

$$0 = (\sigma_k - \eta_k) \langle s_k | s_k \rangle.$$

Poiché il vettore nullo non è un autovettore, si arriva all'identità: $\eta_k = \sigma_k, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$, cioè alla coincidenza degli spettri discreti. Questo implica che le azioni dei due operatori \hat{S} e \hat{S}^\dagger su i vettori di una base, in questo caso l'insieme degli autovettori comuni, sono coincidenti, infatti dalle equazioni agli autovalori si hanno le identità

$$\hat{S}|s_k\rangle = \hat{S}^\dagger |s_k\rangle = \sigma_k |s_k\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

da cui si evince che gli operatori \hat{S} e \hat{S}^\dagger , avendo le stesse azioni, sono uguali, cioè che l'operatore \hat{S} è hermitiano. L'elemento T_j^k della k esima riga e j -esima colonna della matrice $n \times n$ T , che rappresenta l'operatore \hat{T} rispetto alla base canonica $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^n \subset E_n$ è dato dal prodotto scalare

$$T_j^k = \langle e_k | \hat{T} | e_j \rangle = \begin{cases} \sum_{m=j+1}^n \delta_m^k + \tau_j \delta_j^k & j < n \\ \tau_n \delta_n^k & j = n \end{cases}$$

Ne consegue che

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \tau_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \tau_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix}.$$

Si ha che lo spettro discreto è $\{\tau_k\}_{k=1}^n$ e che, per ipotesi, è reale. Ovviamente, la matrice e quindi l'operatore non sono hermitiani, essendo la matrice T reale e non simmetrica. Si è dimostrato quanto richiesto.

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Usando le trasformate di Fourier, si ottenga la funzione $f(x)$ che verifica la seguente identità

$$f''(x) + f'(x) = \theta(x)e^{-x} - \theta(-x)e^x,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione gradino di Oliver Heaviside.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Sfruttandone la linearità calcoliamo la trasformata di Fourier di ambo i membri cosicché si ottenga un'equazione algebrica per la trasformata di Fourier della funzione cercata, ovvero

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[f''(x) + f'(x)] &= \mathcal{F}_k[\theta(x)e^{-x} - \theta(-x)e^x] \\ \mathcal{F}_k[f''(x)] + \mathcal{F}_k[f'(x)] &= \mathcal{F}_k[\theta(x)e^{-x}] - \mathcal{F}_k[\theta(-x)e^x] \\ ik(ik+1)\mathcal{F}_k[f] &= \mathcal{F}_k[\theta(x)e^{-x}] - \mathcal{F}_k[\theta(-x)e^x] \\ \mathcal{F}_k[f] &= \frac{\mathcal{F}_k[\theta(x)e^{-x}] - \mathcal{F}_k[\theta(-x)e^x]}{ik(ik+1)} \\ \mathcal{F}_k[f] &= \left(\mathcal{F}_k[\theta(x)e^{-x}] - \mathcal{F}_k[\theta(-x)e^x]\right) \left(\frac{1}{ik} - \frac{1}{ik+1}\right),\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà per cui la trasformata di Fourier della derivata n -esima di una funzione $f(x)$ è data in termini della trasformata di Fourier della funzione stessa secondo la relazione

$$\mathcal{F}_k\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (ik)^n \mathcal{F}_k[f].$$

Calcoliamo le trasformate di Fourier del secondo membro

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[\theta(x)e^{-x}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)e^{-x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x(ik+1)} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x(ik+1)}}{ik+1} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik+1}; \\ \mathcal{F}_k[\theta(-x)e^x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(-x)e^x e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^x e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-x(ik-1)} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x(ik-1)}}{ik-1} \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik-1}.\end{aligned}$$

L'equazione per la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ diventa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ik+1} \frac{1}{ik} - \frac{1}{(ik+1)^2} + \frac{1}{ik-1} \frac{1}{ik} - \frac{1}{ik-1} \frac{1}{ik+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ik} - \frac{1}{ik+1} - \frac{1}{(ik+1)^2} + \frac{1}{ik-1} - \frac{1}{ik} - \frac{1}{2(ik-1)} + \frac{1}{2(ik+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{2}{(ik+1)^2} + \frac{1}{ik-1} - \frac{1}{ik+1} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{(k-i)^2} - \frac{i}{k+i} + \frac{i}{k-i} \right).\end{aligned}$$

Calcoliamo l'anti-trasformata di Fourier di ambo i membri per ottenere la soluzione

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}_x^{-1} \left[\frac{2}{(k-i)^2} - \frac{i}{k+i} + \frac{i}{k-i} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(k-i)^2} dk - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+i} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k-i} dk \right) \\ &= \frac{2i\pi}{4\pi} \left(2\theta(x) \frac{d}{dk} e^{ikx} \Big|_{k=i} + i\theta(-x)e^x + i\theta(x)e^{-x} \right) \\ &= -x\theta(x)e^{-x} - \frac{\theta(-x)e^x + \theta(x)e^{-x}}{2},\end{aligned}$$

dove si sono usati il Lemma di Jordan e il teorema dei residui. In definitiva, scrivendo in forma compatta l'ultimo termine, si ha

$$f(x) = -x\theta(x)e^{-x} - \frac{e^{-|x|}}{2}.$$