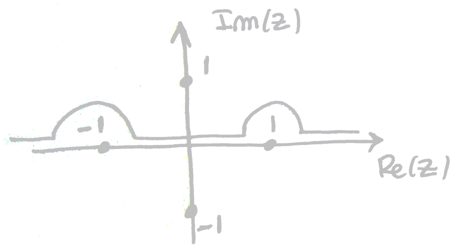
Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 20 settembre 2016

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale



$$P = \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^4 - 1} dx\,.$$

Soluzione del primo problema

L'integranda ha quattro poli semplici nei punti

$$z_{1,2} = \pm 1\,, \qquad z_{3,4} = \pm i\,.$$

Possiamo applicare il lemma di Jordan scrivendo la funzione seno come differenza di esponenziali, ovvero

$$P = \frac{1}{2i} \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,e^{ix}}{x^4 - 1} dx - \frac{1}{2i} \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,e^{-ix}}{x^4 - 1} dx = P_1 - P_2\,.$$

Consideriamo il primo integrale, definiamo un percorso di integrazione dentato in corrispondenza dei punti z_1 e z_2, e chiuso nel semipiano superiore, in modo che all'interno cada solo il polo semplice $z_3 = i$. Al divergere del raggio dell'arco il contributo su tale arco si annulla per il lemma di Jordan, rimangono il valore principale e i contributi sugli archi infinitesimi, ovvero

$$P_1 = \frac{1}{2i} \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,e^{ix}}{x^4 - 1} dx = 2i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{1}{2i}\frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1}, i\right] - \frac{1}{2i}\int_{-\gamma_-} \frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1} dz - \frac{1}{2i}\int_{-\gamma_+} \frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1} dz\,,$$

dove $\gamma_\pm$ sono archi di raggio infinitesimo, ϵ, centrati in $z = z_{1,2} = \pm 1$, immersi nel semipiano superiore. I contributi di tali archi infinitesimi sono

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\gamma_\pm} \frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1} dz = -i\pi \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1}(z - z_{1,2}) = -i\pi \frac{e^{iz_{1,2}}}{4z_{1,2}^2} = -i\pi \frac{e^{\pm i}}{4}\,,$$

mentre il residuo del polo semplice in $z_3 = i$ è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{2i}\frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1}, i\right] = -\frac{1}{8i\,e}\,.$$

Sommando i contributi, si ottiene

$$P_1 = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{e} + \cos(1)\right)\,.$$

Nel caso del secondo integrale procediamo nello stesso modo, ovvero consideriamo un percorso chiuso dentato in corrispondenza dei poli reali, in modo tale da lasciare dentro solo il polo $z_4 = -i$, si ha quindi

$$P_2 = \frac{1}{2i} \mathrm{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,e^{-ix}}{x^4 - 1} dx = -2i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{1}{2i}\frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1}, -i\right] - \frac{1}{2i}\int_{\gamma'_-} \frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1} dz - \frac{1}{2i}\int_{\gamma'_+} \frac{z\,e^{iz}}{z^4 - 1} dz\,,$$

dove $\gamma'_\pm$ sono archi di raggio infinitesimo, ϵ, centrati in $z = z_{1,2} = \pm 1$, immersi nel semipiano inferiore, per cui

$$\int_{\gamma'_\pm} \frac{z\, e^{-iz}}{z^4 - 1} dz = i\pi \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z\, e^{-iz}}{z^4 - 1}(z - z_{1,2}) = i\pi \frac{e^{-iz_{1,2}}}{4 z_{1,2}^2} = i\pi \frac{e^{\mp i}}{4} \,,$$

mentre il residuo è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{2i}\frac{z\, e^{-iz}}{z^4 - 1}, -i\right] = -\frac{1}{8i\, e} \,.$$

L'integrale P_2 vale

$$P_2 = \frac{1}{2i} \,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{-ix}}{x^4 - 1} dx = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e} - \cos(1)\right)$$

e quindi l'integrale cercato

$$P = P_1 - P_2 = \frac{\pi}{2}\left(\cos(1) - \frac{1}{e}\right) .$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la serie di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{\cot(\pi z)}{z^2} \,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione ha poli semplici nei punti

$$z_k = k \,, \qquad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \,,$$

mentre $z_0 = 0$ è un polo triplo. Ne consegue che lo sviluppo ha la forma

$$f(z) = g(z) + \sum_{k \neq 0} \frac{R_k}{z - z_k} + \frac{A_{-1}}{z} + \frac{A_{-2}}{z^2} + \frac{A_{-3}}{z^3} \,,$$

dove $g(z)$ rappresenta la parte intera di $f(z)$, che ha il suo stesso comportamento asintotico, i coefficienti R_k sono i residui dei poli semplici, mentre A_{-1}, A_{-2}, e A_{-3} sono i coefficienti della parte principale della serie di Laurent di $f(z)$ centrata nell'origine. I residui dei poli semplici sono

$$R_k = \lim_{z \to z_k} \frac{\cot(\pi z)}{z^2}(z - z_k) = \frac{\cos(k\pi)}{\pi k^2 \cos(k\pi)} = \frac{1}{\pi k^2} \,.$$

I coefficienti A_{-1}, A_{-2}, e A_{-3} si possono calcolare sia usando gli sviluppi in serie noti delle funzione seno e coseno, che le definizioni in termini della formula integrale di Cauchy. In quest'ultimo caso il calcolo risulta semplice per il coefficiente A_{-3}, mentre la difficoltà cresce per A_{-2} e A_{-1}, per i quali è necessario calcolare derivate prima e seconda, rispettivamente. Infatti si ha

$$A_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{\cot(\pi z)}{z^2 z^{k+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{z \cot(\pi z)}{z^{k+4}} dz = \lim_{z \to 0} \frac{1}{(k+3)!} \frac{d^{k+3}}{dz^{k+3}} \left[z \cot(\pi z)\right] ,$$

dove si è considerata la funzione $z\cot(\pi z)$ derivabile nell'origine in cui ha solo una singolarità eliminabile. Si hanno quindi

$$
\begin{aligned}
A_{-3} &= \lim_{z\to 0} z\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi}\,,\\
A_{-2} &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z\cot(\pi z)\right] = \lim_{z\to 0} \frac{\cos(\pi z)\operatorname{sen}(\pi z) - \pi z}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = 0\,,\\
A_{-1} &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[z\cot(\pi z)\right] = \lim_{z\to 0} \pi(\pi z\cot(\pi z) - 1)\csc^2(\pi z) = -\frac{\pi}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Usando, invece gli sviluppi delle funzioni seno e coseno, avremo

$$
\begin{aligned}
\frac{\cot(\pi z)}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\,\frac{1-(z\pi)^2/2!+(z\pi)^4/4!+\dots}{z\pi-(z\pi)^3/3!+(z\pi)^5/5!+\dots}\\
&= \frac{1}{z^3\pi}\,\frac{1-(z\pi)^2/2!+(z\pi)^4/4!+\dots}{1-(z\pi)^2/3!+(z\pi)^4/5!+\dots}\\
&= \frac{1}{z^3\pi}\left[1-\frac{(z\pi)^2}{2!}+\frac{(z\pi)^4}{4!}+\dots\right]\left[1+\left(\frac{(z\pi)^2}{3!}-\frac{(z\pi)^4}{5!}+\dots\right)+\left(\frac{(z\pi)^2}{3!}-\frac{(z\pi)^4}{5!}+\dots\right)^2+\dots\right].
\end{aligned}
$$

Siamo interessati solo alla parte principale, quindi alle tre potenze minori che si ottengono dal prodotto delle quantità in parentesi quadre, ovvero

$$
\frac{\cot(\pi z)}{z^2} = \frac{1}{z^3\pi}\left[1+z^2\left(-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^2}{3!}\right)+O(z^4)\right] = \frac{1}{z^3\pi}\left[1-z^2\frac{\pi^2}{3}+O(z^4)\right] = \frac{1}{\pi}z^{-3}-\frac{\pi}{3}z^{-1}+O(z)\,,
$$

quindi i coefficienti sono

$$
A_{-3} = \frac{1}{\pi}\,, \qquad A_{-2} = 0\,, \qquad A_{-1} = -\frac{\pi}{3}\,,
$$

che, ovviamente, coincidono con quelli già ottenuti usando la formula integrale. Inoltre $g(z) = 0$ poiché asintoticamente $f(z)$ si annulla. La serie di Mittag-Leffler è

$$
f(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2(z-k)} + \frac{1}{\pi z^3} - \frac{\pi}{3z} = \frac{2z}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(z^2-k^2)} + \frac{1}{\pi z^3} - \frac{\pi}{3z}\,.
$$

Terzo problema (punteggio 5/30)

Si calcolino i coefficienti C_{-1} e C_{-2} della serie di Laurent centrata nell'origine della funzione

$$
f(z) = \exp\left[\exp(1/z)\right]\,.
$$

Soluzione del terzo problema

Anche per la risoluzione di questo problema abbiamo almeno due possibilità: possiamo sfruttare due volte lo sviluppo in serie dell'esponenziale oppure usare la formula integrale di Cauchy. Nel primo caso si ha

$$
f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{k/z}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(k/z)^m}{k!\,m!}\,.
$$

Il coefficiente C_{-1}, ovvero il residuo nell'origine di $f(z)$, si ottiene, in forma di serie, fissando $m = 1$

$$C_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!},$$

dove la seconda identità consegue dal fatto che il primo termine della prima serie è nullo. Usando ancora una volta la serie dell'esponenziale e^z, si vede che in $z = 1$ possiamo scrivere

$$e^1 = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

da cui si ha

$$C_{-1} = e\,.$$

Seguendo la stessa logica avremo che anche C_{-2} è uguale ad e, infatti

$$C_{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} = \frac{1}{2}\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sum_{k'=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}}_{=e} + \underbrace{\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{=e} \right) = e\,.$$

Usando invece la formula integrale, avremo

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} \frac{e^{e^{1/z}}}{z^{k+1}} dz\,,$$

con la sostituzione $w = 1/z$ e considerando i coefficienti con $k < 0$,

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{-(|w|=1)} e^{e^w} w^{k+1} \frac{dw}{-w^2} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|w|=1} \frac{e^{e^w}}{w^{-k+1}} dw = \lim_{w\to 0} \frac{1}{(-k)!} \frac{d^{-k}}{dw^{-k}} e^{e^w}\,.$$

Nei casi cercati si ottengono gli stessi risultati, ovvero

$$C_{-1} = \lim_{w\to 0} \frac{d}{dw} e^{e^w} = \lim_{w\to 0} e^w w^{e^w} = e\,;$$
$$C_{-2} = \lim_{w\to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dw^2} e^{e^w} = \frac{1}{2} \lim_{w\to 0} e^{e^w + w} (e^w + 1) = e\,.$$

Quarto problema (punteggio 5/30)

Si dimostrino le seguenti proposizioni:

- un operatore $\hat{O}$, definito nello spazio di Hilbert E, può essere sempre scritto come somma di un operatore hermitiano ed uno anti-hermitiano;
- un operatore normale $\hat{A}$, definito nello spazio di Hilbert E, può essere sempre scritto come prodotto di un operatore unitario ed uno hermitiano, si faccia un esempio;
- sia $\hat{P}$ un proiettore, definito nello spazio di Hilbert E, allora, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$, si ha

$$e^{\alpha \hat{P}} = e^{\alpha} \hat{P}\,.$$

Soluzione del quarto problema

La prima proposizione si dimostra osservando che i due operatori $\hat{A} = (\hat{O} + \hat{O}^\dagger)/2$ e $\hat{B} = (\hat{O} - \hat{O}^\dagger)/2$ sono hermitiano il primo, anti-hermitiano il secondo e ovviamente

$$\hat{O} = \hat{A} + \hat{B}\,.$$

Per la seconda proposizione possiamo considerare la rappresentazione diagonale dell'operatore normale $\hat{A}$, cioè $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, dove gli autovalori α_k sono numeri complessi, ovvero $\alpha_k = |\alpha_k| e^{i\arg(\alpha_k)}$. Possiamo quindi definire le due matrici diagonali $M = \mathrm{diag}(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots)$ e $F = \mathrm{diag}\left(e^{\arg((\alpha_1)}, e^{\arg(\alpha_2)}, \ldots\right)$, per cui si ha la relazione $A = M\,F$ e analogamente per gli operatori rappresentati dalle matrici avremo $\hat{A} = \hat{M}\,\hat{F}$. Infine, dalle rappresentazioni diagonali si evince che $\hat{M}$ è hermitiano e $\hat{F}$ è unitario.

L'ultima identità non è vera. Infatti, un proiettore è un operatore hermitiano e idempotente, ovvero $\hat{P}^n = \hat{P}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, ma $\hat{P}^0 = \hat{I}$, quindi

$$e^{\alpha\hat{P}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\alpha\hat{P})^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\alpha\hat{P})^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{k!}\hat{P}^k = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{k!}\hat{P} = \hat{I} + (e^\alpha - 1)\hat{P} = \hat{I} - \hat{P} + e^\alpha \hat{P}\,.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si determini la funzione incognita $u(x)$, risolvendo l'equazione integro-differenziale

$$\hat{O}_x\,(f * u)(x) = g(x)\,,$$

$\mathcal{F}_k\left[f * u\right] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}_k[f]\,\mathcal{F}_k[u]$

dove il simbolo "$*$" indica la convoluzione e

$$\hat{O}_x = \frac{d^2}{dx^2} - 1\,, \qquad f(x) = \frac{1}{x^3}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Soluzione del quinto problema

La trasformata di Fourier (TF) dell'equazione è

$$\sqrt{2\pi}\,\left(-k^2 - 1\right) \tilde{f}(k)\tilde{u}(k) = \tilde{g}(k)\,.$$

La TF della funzione $g(x)$ si ottiene usando la formula di Sokhotski-Plemelj, scegliendo il segno di $i\epsilon$ in funzione di quello di k, in modo da non avere singolarità nel percorso chiuso e annullare di conseguenza l'integrale non in valore principale. Per $k > 0$ ($k < 0$) dobbiamo chiudere nel semipiano inferiore (superiore) e quindi scegliamo $-i\epsilon$ ($+i\epsilon$) in modo che la singolarità sia nel semipiano opposto e quindi esterna. Quindi

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x - \mathrm{segn}(k) i\epsilon} dx - \frac{\mathrm{segn}(k) i\pi}{\sqrt{2\pi}} = -i\,\mathrm{segn}(k)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Per la TF della funzione $f(x)$ sfruttiamo questo risultato dopo aver integrato per parti due volte, ovvero

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^3} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Bigg[\underbrace{-\frac{e^{-ikx}}{2x^2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \frac{ik}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2} dx \Bigg] \\
&= \frac{-ik}{2\sqrt{2\pi}} \Bigg[\underbrace{-\frac{e^{-ikx}}{x}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - ik \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x} dx \Bigg] \\
&= \frac{(-ik)^2}{2} \tilde{g}(k) = i\,\mathrm{segn}(k) \frac{k^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}
$$

La TF della soluzione è

$$
\tilde{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-i\mathrm{segn}(k)}{i\mathrm{segn}(k)\frac{k^2}{2}(-k^2-1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2(k^2+1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+1} \right).
$$

Le anti-TF sono

$$
\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2} dk = \frac{ix}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} dk = -x\,\mathrm{segn}(x) \sqrt{\frac{\pi}{2}},
$$

dove, ancora una volate, si è fatto uso del risultato precedente, mentre come è noto si ha

$$
\mathscr{F}_{-x}\left[\frac{1}{k^2+1}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|}.
$$

Ne consegue che il risultato finale è

$$
u(x) = -x\,\mathrm{segn}(x) - e^{-|x|}
$$

Sesto problema (punteggio 7/30)

Data la matrice

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},
$$

che rappresenta, rispetto ad una data base, l'operatore $\hat{A}$ nello spazio di Hilbert E_3, a tre dimensioni, si determinino le matrici che rappresentano, rispetto alla stessa base, gli operatori $\hat{X}$ che verificano l'equazione

$$
\hat{X}^2 - \hat{X}\hat{A} + \hat{A}^2 = \hat{0},
$$

dove $\hat{0}$ è l'operatore nullo.

Soluzione del sesto Problema

Risolvendo l'equazione operatoriale per $\hat{X}$ si ha

$$\hat{X}_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\hat{A} \pm \sqrt{-3\hat{A}^2}\right), \tag{1}$$

la stessa relazione vale per la matrici che rappresentano gli operatori. Si può applicare il teorema spettrale, gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{X}_{1,2}$ hanno gli stessi autovettori ed autovalori che verificano la stessa equazione di secondo grado con cui si definiscono $\hat{X}_{1,2}$ in funzione di $\hat{A}$.
Gli autovalori di $\hat{A}$ si ottengono dall'equazione caratteristica

$$\det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 0 & i-x & 0 \\ -1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = 0$$
$$\left[(2-x)^2 - 1\right](i-x) = 0$$

e sono

$$x_1 = 3\,, \qquad x_1 = i\,, \qquad x_1 = 1\,.$$

Dagli autovettori corrispondenti

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ottiene la matrice diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Infine, partendo dalle rappresentazioni diagonali di $\hat{X}_{1,2}$,

$$X_{1,2}^{(d)} = \begin{pmatrix} 3/2 \pm 3i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 \pm \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \pm i\sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

dove gli autovalori sono ottenuti usando la relazione di eq. (1) con gli autovalori di $\hat{A}$, si ricavano le rappresentazioni cercate

$$X_{1,2} = U X_{1,2}^{(d)} U^\dagger = \begin{pmatrix} 1 \pm i\sqrt{3} & 0 & -1/2 \mp i\sqrt{3}/2 \\ 0 & i/2 \pm \sqrt{3}/2 & 0 \\ -1/2 \mp i\sqrt{3}/2 & 0 & 1 \pm i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

È interessante osservare che, in generale,

$$\sqrt{\hat{A}^2} \neq \pm\hat{A},$$

ovvero non possiamo usare l'algebra degli scalari con gli operatori. Ciò è infatti possibile solo nei casi in cui si possa usare il teorema spettrale e quindi solo per operatori diagonalizzabili.