Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 20 settembre 2013

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Calcolare l'integrale in valore principale

$$I = \Pr\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^5(z^4-1)}\,,$$

dove $|z| = 1$ indica la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario.

. . . .

Soluzione
L'integranda ha i quattro poli semplici

$$z_k = e^{i\pi k/2}\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,,$$

e un polo di ordine 5 nell'origine. Poiché: $|z_k| = 1$, $\forall\, k \in \{0, 1, 2, 3\}$, tutti poli semplici giacciono sul cammino d'integrazione, ovvero la circonferenza unitaria. Per calcolare il valore principale, definiamo il cammino chiuso, percorso in senso antiorario,

$$\begin{aligned}\Gamma_\epsilon &= \left(\bigcup_{k=0}^{3} C[0,1;k\pi/2+\epsilon,(k+1)\pi/2-\epsilon]\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{3} C[z_k,\epsilon;(k-1)\pi/2,(k-3)\pi/2]\right)\\ &\equiv \left(\bigcup_{k=0}^{3} \Gamma_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{3} \gamma_k\right)\,,\end{aligned}$$

che contiene il solo polo di ordine 5 nell'origine e aggira ciascuno dei quattro poli semplici con archetti infinitesimi di raggio ϵ (il simbolo $C[z_0, r; \theta_1, \theta_2]$ indica l'arco di centro z_0, raggio r e angolo sotteso compreso tra θ_1 e θ_2). Ne consegue che

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{dz}{z^5(z^4-1)} &= 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^5(z^4-1)}, z=0\right]\\ &= \sum_{k=0}^{3}\int_{\gamma_k}\frac{dz}{z^5(z^4-1)} + \Pr\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^5(z^4-1)}\,,\end{aligned}$$

ovvero

$$I = \Pr\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^5(z^4-1)} = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^5(z^4-1)}, z=0\right] - \sum_{k=0}^{3}\int_{\gamma_k}\frac{dz}{z^5(z^4-1)}\,.$$

Il residuo può essere ottenuto considerando lo sviluppo di Laurent in $z = 0$ dell'integranda, si ha infatti

$$\frac{1}{z^5(z^4-1)} = -\frac{1}{z^5(1-z^4)} = -\frac{1}{z^5}\left[1 + z^4 + z^8 + \mathcal{O}\left(z^{12}\right)\right] = -\frac{1}{z^5} - \frac{1}{z} - z^3 - \mathcal{O}\left(z^7\right)\,,$$

quindi C_{-1}, ovvero il coefficiente di z^{-1}, è

$$\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^5(z^4-1)}, z=0\right] = C_{-1} = -1\,.$$

Gli integrali sugli archetti γ_k si calcolano usando i lemmi per l'integrazione su archi infinitesimi, in particolare

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_k}\frac{dz}{z^5(z^4-1)} = i\alpha_k A_k\,, \qquad k\in\{0,1,2,3\}\,,$$

in tutti i casi l'arco è percorso in senso orario, ovvero negativo e ha ampiezza π, quindi $\alpha_k=-\pi$, $\forall\, k\in\{0,1,2,3\}$. I valori A_k sono dati dai limiti

$$A_k = \lim_{z\to e^{i\pi k/2}}\frac{z-e^{i\pi k/2}}{z^5(z^4-1)} = e^{-5i\pi k/2}\frac{1}{4e^{3i\pi k/2}} = \frac{e^{-8i\pi k/2}}{4} = \frac{e^{-4i\pi k}}{4} = \frac{1}{4}\,, \qquad k\in\{0,1,2,3\}\,.$$

Otteniamo, infine, l'integrale desiderato come:

$$I = 2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^5(z^4-1)}, z=0\right] - \sum_{k=0}^{3}\int_{\gamma_k}\frac{dz}{z^5(z^4-1)} = -2i\pi - \sum_{k=0}^{3}\frac{-i\pi}{4} = -i\pi\,.$$

. . . .

Esercizio 2 (7 punti)
Calcolare l'integrale

$$J(\beta) = \mathrm{Im}\left[\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\cosh(\beta z)}{z^4+z^2+1}dz\right]\,,$$

con $\beta\in\mathbb{R}$.

. . . .

Soluzione
Con la sostituzione $z=iy$ si ottiene un integrale reale moltiplicato per l'unità immaginaria, infatti

$$J(\beta) = \mathrm{Im}\left[i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh(\beta i y)}{y^4-y^2+1}dy\right] = \mathrm{Im}\left[i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\beta y)}{y^4-y^2+1}dy\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\beta y)}{y^4-y^2+1}dy\,.$$

Per applicare il lemma di Jordan, separiamo in due integrali

$$J(\beta) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\beta y}}{y^4-y^2+1}dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\beta y}}{y^4-y^2+1}dy\,.$$

Le integrande hanno gli stessi quattro poli semplici

$$\begin{aligned}
z_1,z_2,z_3,z_4 &= \pm\sqrt{1/2\pm i\sqrt{3}/2}\\
z_1,z_2,z_3,z_4 &= \pm\sqrt{1/2\pm i\sqrt{3}/2}\\
z_1,z_2,z_3,z_4 &= \pm\sqrt{e^{\pm i\pi/3}}\\
z_1,z_2,z_3,z_4 &= e^{i\pi/6}, e^{5i\pi/6}, e^{7i\pi/6}, e^{11i\pi/6}\,,
\end{aligned}$$

che sono due coppie di complessi coniugati: $z_4 = z_1^*$ e $z_3 = z_2^*$.
Consideriamo i due casi $\beta > 0$ e $\beta < 0$.
Se $\beta > 0$, "chiudiamo" il primo integrale sopra ed il secondo sotto e si ha

$$
\begin{aligned}
J_>(\beta) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta y}}{(y-z_1)(y-z_2)(y-z_3)(y-z_4)}dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\beta y}}{(y-z_1)(y-z_2)(y-z_3)(y-z_4)}dy\,. \\
&= i\pi\left[R_1 e^{i\beta z_1} + R_2 e^{i\beta z_2} - R_3 e^{-i\beta z_3} - R_4 e^{-i\beta z_4}\right] \\
&= i\pi\left[R_1 e^{i\beta z_1} + R_2 e^{i\beta z_2} - R_2^* e^{-i\beta z_2^*} - R_1^* e^{-i\beta z_1^*}\right] \\
&= -2\pi \mathrm{Im}\Big(R_1 e^{i\beta z_1} + R_2 e^{i\beta z_2}\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Se, invece $\beta < 0$, si ha

$$
\begin{aligned}
J_<(\beta) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta y}}{(y-z_1)(y-z_2)(y-z_3)(y-z_4)}dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\beta y}}{(y-z_1)(y-z_2)(y-z_3)(y-z_4)}dy\,. \\
&= i\pi\left[-R_3 e^{i\beta z_3} - R_4 e^{i\beta z_4} + R_1 e^{-i\beta z_1} + R_2 e^{-i\beta z_2}\right] \\
&= i\pi\left[-R_2^* e^{i\beta z_2^*} - R_1^* e^{i\beta z_1^*} + R_1 e^{-i\beta z_1} + R_2 e^{-i\beta z_2}\right] \\
&= -2\pi \mathrm{Im}\Big(R_1 e^{-i\beta z_1} + R_2 e^{-i\beta z_2}\Big)\,.
\end{aligned}
$$

I valori $R_{1,2}$ sono

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{-i\cos(\pi/6) - \sin(\pi/6)}{8\cos(\pi/6)\sin(\pi/6)} = \frac{-1/2 - i\sqrt{3}/2}{2\sqrt{3}}\,, \\
R_2 &= \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} = \frac{-i\cos(5\pi/6) - \sin(5\pi/6)}{8\cos(5\pi/6)\sin(5\pi/6)} = \frac{1/2 - i\sqrt{3}/2}{2\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}
$$

Ne consegue che, la parte immaginaria in $J_>$ è:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\Big(R_1 e^{i\beta z_1} + R_2 e^{i\beta z_2}\Big) &= e^{-\mathrm{Im}(z_1)\beta}\mathrm{Im}\left[\frac{-1/2(e^{i\beta \mathrm{Re}(z_1)} - e^{-i\beta \mathrm{Re}(z_1)}) - i\sqrt{3}/2(e^{i\beta \mathrm{Re}(z_1)} + e^{-i\beta \mathrm{Re}(z_1)})}{2\sqrt{3}}\right] \\
&= e^{-\mathrm{Im}(z_1)\beta}\frac{-\sin(\beta\mathrm{Re}(z_1)) - \sqrt{3}\cos(\beta\mathrm{Re}(z_1))}{2\sqrt{3}} \\
&= e^{-\beta/2}\frac{-\sin(\beta\sqrt{3}/2) - \sqrt{3}\cos(\beta\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{3}}\,,
\end{aligned}
$$

mentre nel caso di $J_<$ si ha

$$
\mathrm{Im}\Big(R_1 e^{-i\beta z_1} + R_2 e^{-i\beta z_2}\Big) = e^{\beta/2}\frac{\sin(\beta\sqrt{3}/2) - \sqrt{3}\cos(\beta\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{3}}\,.
$$

I due casi possono essere considerati unitamente ponendo nel primo $\beta \to |\beta|$ e si ha la soluzione

$$
J(\beta) = \pi e^{-|\beta|/2}\left[\frac{\sin(|\beta|\sqrt{3}/2)}{\sqrt{3}} + \cos(\beta\sqrt{3}/2)\right]\,.
$$

È facile vedere che l'espressione precedente contempla anche il caso $\beta = 0$, si ha

$$J(0) = \pi e^{-|\beta|/2} \left[\frac{\sin(|\beta|\sqrt{3}/2)}{\sqrt{3}} + \cos(\beta\sqrt{3}/2) \right]_{\beta=0} = \pi \, ,$$

che coincide con il valore dell'integrale, per $\beta = 0$, infatti

$$J(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^4 - y^2 + 1} = 2i\pi \left(R_1 + R_2 \right) = 2i\pi \left(\frac{-1/2 - i\sqrt{3}/2}{2\sqrt{3}} + \frac{1/2 - i\sqrt{3}/2}{2\sqrt{3}} \right) = \pi \, .$$

Ne consegue che l'espressione ottenuta nei casi $\beta > 0$ e $\beta < 0$, può essere estesa con continuità anche al caso $\beta = 0$ e vale, cioè, $\forall \, \beta \in \mathbb{R}$.

. . . .

Esercizio 3 (4 punti)
Si dimostri l'identità

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} dz = \lim_{z \to \infty} \frac{\ln[P_n(z)]}{\ln(z)} \, ,$$

dove $P_n(z)$ è un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$ e γ è una curva chiusa contenente tutti gli (e non passante per nessuno degli) n zeri del polinomio.

. . . .

Soluzione
Il polinomio $P_n(z)$ può essere scritto come

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \, ,$$

i punti z_k, con $k = 1, 2 \ldots, n$, sono gli zeri e, per costruzione, il coefficiente della potenza massima, a_n, è diverso da zero. La derivata logaritmica è

$$\frac{d}{dz} \ln[P_n(z)] = \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} = \frac{d}{dz} \left[\ln(a_n) + \sum_{k=1}^{n} \ln(z - z_k) \right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} \, .$$

Il membro di sinistra (LHS) dell'identità da verificare vale

$$\text{LHS} = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{P_n'(z)}{P_n(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{n} \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \text{Res} \left[\frac{1}{z - z_k}, z = z_k \right] = n \, .$$

Per il membro di destra (RHS) si ha

$$\begin{aligned} \text{RHS} = \lim_{z \to \infty} \frac{\ln[P_n(z)]}{\ln(z)} &= \lim_{z \to \infty} \frac{1}{\ln(z)} \ln \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right) \\ &= \lim_{z \to \infty} \frac{\ln\left(a_n z^n\right)}{\ln(z)} \\ &= \lim_{z \to \infty} \frac{\ln\left(a_n\right) + n \ln(z)}{\ln(z)} = n \, . \end{aligned}$$

L'indentità è dimostrata.

. . . .

Esercizio 4 (5 punti)
Si calcoli la serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

in $z = i$.

. . . .

Soluzione
La funzione ha due poli doppi in $z = \pm i$, possiamo riscriverla come

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \, .$$

Poiché il primo fattore ha già la forma desiderata, è infatti una potenza di $(z - i)$, sviluppiamo solo il secondo e si ha

$$\frac{1}{(z+i)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-i)^k \, ,$$

con, per definizione,

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{dz}{(z+i)^2(z-i)^{k+1}} \, ,$$

dove il percorso γ è, ad esempio, una circonferenza centrata in $z = i$ di raggio $r < 2$, ovvero tale da contenere la sola singolarità in $z = i$. Risolvendo esplicitamente l'integrale si ottiene

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{dz}{(z+i)^2(z-i)^{k+1}} = \begin{cases} \left. \dfrac{1}{k!} \dfrac{d^k}{dz^k} \dfrac{1}{(z+i)^2} \right|_{z=i} & k \geq 0 \\ 0 & k \leq -1 \end{cases} \, .$$

La derivata, per $k \geq 0$, è

$$\left. \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \frac{1}{(z+i)^2} \right|_{z=i} = \left. \frac{1}{k!} (-1)^k \frac{(k+1)!}{(z+i)^{2+k}} \right|_{z=i} = \frac{k+1}{(-2i)^{2+k}} \, .$$

Infine, la serie di Laurent è

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{(-2i)^{2+k}} (z-i)^k = \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{k+3}{(-2i)^{4+k}} (z-i)^k \, .$$

Una procedura alternativa è la seguente. Riscriviamo la funzione in termini della derivata di un polo semplice riconducibile, quindi, alla somma di una serie geometrica come

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} &= -\frac{1}{(z-i)^2} \left. \frac{d}{dw} \frac{1}{w+i} \right|_{w=z} \\ &= -\frac{1}{(z-i)^2} \left. \frac{d}{dw} \frac{1}{2i+w-i} \right|_{w=z} \\ &= -\frac{1}{2i} \frac{1}{(z-i)^2} \left. \frac{d}{dw} \frac{1}{1+\frac{w-i}{2i}} \right|_{w=z} \, . \end{aligned}$$

Nella corona circolare $0 < |w-i| < 2$ si ha $\left|\frac{w-i}{2i}\right| < 1$, quindi

$$\frac{d}{dw}\frac{1}{1+\frac{w-i}{2i}}\bigg|_{w=z} = \frac{d}{dw}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(w-i)^k}{(-2i)^k}\bigg|_{w=z} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(-2i)^k}(z-i)^{k-1},$$

sostituendo nella precedente

$$f(z) = -\frac{1}{2i}\frac{1}{(z-i)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(-2i)^k}(z-i)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(-2i)^{1+k}}(z-i)^{k-3} = \sum_{k=-2}^{\infty}\frac{k+3}{(-2i)^{4+k}}(z-i)^k.$$

. . . .

Esercizio 5 (4 punti)
Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

. . . .

Soluzione
La trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikz}}{(z-i)^2(z+i)^2}dz \\ &= \begin{cases} i\sqrt{2\pi}\dfrac{d}{dz}\dfrac{e^{-ikz}}{(z+i)^2}\bigg|_{z=i} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{(1-k)e^k}{2}, & k<0 \\ -i\sqrt{2\pi}\dfrac{d}{dz}\dfrac{e^{-ikz}}{(z-i)^2}\bigg|_{z=-i} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{(1+k)e^{-k}}{2}, & k>0 \end{cases} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+|k|)e^{-|k|}}{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 6 (7 punti)
Data l'equazione di Schrödinger

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle,$$

si determini l'operatore di evoluzione temporale $\hat{U}(t)$, definito da

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle.$$

Data, inoltre, la matrice

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che rappresenta l'operatore $\hat{H}$ rispetto alla base canonica, si ottenga la rappresentazione, rispetto alla stessa base, del vettore $|\psi(t)\rangle$, sapendo che

$$|\psi(0)\rangle \hookleftarrow \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

. . . .

Soluzione

Si procede con la sostituzione: $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle$, nell'equazione di Schrödinger, per ottenere un'equazione differenziale del primo ordine per l'operatore $\hat{U}(t)$

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle &= \hat{H}\hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle \\ U^{-1}(t)d\hat{U}(t) &= -i\hat{H}\,dt \\ \hat{U}(t) &= \exp\left(-i\hat{H}t\right) , \end{aligned}$$

dove si è usata la ovvia condizione al contorno: $\hat{U}(0) = \hat{I}$.

Per calcolare la rappresentazione di $\hat{U}(t)$ rispetto alla base canonica, osserviamo che $\hat{H}$ è hermitiano, quindi, normale e diagonalizzabile. Detta H_d la sua rappresentazione diagonale, avremo

$$H_d = D^\dagger H D = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} ,$$

dove h_1, h_2 e h_3 sono i tre autovalori reali di $\hat{H}$ e D è la matrice unitaria diagonalizzante. Allo stesso modo per $\hat{U}(t)$ si ha la rappresentazione diagonale $U_d(t)$

$$U_d(t) = D^\dagger U(t) D = \begin{pmatrix} e^{-ih_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ih_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ih_3 t} \end{pmatrix} ,$$

dove $U(t)$ è la rappresentazione canonica dell'operatore $\hat{U}(t)$

$$U(t) = D U_d(t) D^\dagger .$$

Gli autovalori di H si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(H - hI) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} -h & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1-h & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -h \end{pmatrix} &= 0 \\ h^2(1-h) - 2(1-h) &= 0 \\ (1-h)(h^2-2) &= 0 , \end{aligned}$$

da cui

$$h_1 = \sqrt{2} , \qquad h_2 = 1 , \qquad h_3 = -\sqrt{2} .$$

I corrispondenti autovettori, ovvero quelli che verificano le equazioni

$$Hv_j = h_j v_j\,, \qquad j = 1,2,3\,,$$

si ottengono come

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice diagonalizzante D ha quindi la forma

$$D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice $U(t)$ è

$$\begin{aligned}
U(t) &= D \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\sqrt{2}t} \end{pmatrix} D^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}t}/\sqrt{2} & 0 & e^{i\sqrt{2}t}/\sqrt{2} \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ e^{-i\sqrt{2}t}/\sqrt{2} & 0 & -e^{i\sqrt{2}t}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & 0 & -i\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{2}t) \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ -i\sin(\sqrt{2}t) & 0 & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Infine otteniamo la rappresentazione del vettore $\psi(t)$

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= U(t)\psi(0) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & 0 & -i\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{2}t) \\ 0 & e^{-it} & 0 \\ -i\sin(\sqrt{2}t) & 0 & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) - i\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{2}t) \\ e^{-it} \\ -i\sin(\sqrt{2}t) + \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-i\sqrt{2}t} \\ e^{-it} \\ e^{-i\sqrt{2}t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$