Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 20 giugno 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$P = \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x+1} dx\,.$$

Soluzione del primo problema

L'integranda ha un polo semplice in $x=-1$ e una singolarità essenziale nell'origine, $x=0$. Facciamo il cambiamento di variabile $w=1/x$, a tal fine suddividiamo l'intervallo di integrazione sfruttando il valore principale nell'origine, ovvero

$$P = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\Pr\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x+1} dx + \int_{+\epsilon}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x+1} dx\right] ,$$

dove il valore principale rispetto al polo semplice $x=-1$ rimane ovviamente solo nel primo integrale. Con la sostituzione $w=1/x$ si ah

$$P = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\Pr\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x+1} dx + \int_{+\epsilon}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x+1} dx\right] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\Pr\int_{0}^{-1/\epsilon} \frac{\operatorname{sen}(w)}{1/w+1}\frac{dw}{w^2} - \int_{1/\epsilon}^{0} \frac{\operatorname{sen}(w)}{1/w+1}\frac{dw}{w^2}\right]$$
$$= \Pr\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w(w+1)} dw + \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w(w+1)} dw = \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w(w+1)} dw\,.$$

È ulteriormente possibile scomporre l'integranda nella somma di due poli semplici, come

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} dw - \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w+1} dw\,,$$

il primo integrale non è più in valore principale in quanto l'integranda ha solo una singolarità eliminabile nell'origine. Nel secondo integrale facciamo la sostituzione $w'=w+1$, si ha quindi

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} dw - \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w'-1)}{w'} dw' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} dw - \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w')\cos(1) - \cos(w')\operatorname{sen}(1)}{w'} dw'$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} dw - \cos(1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w')}{w'} dw' = [1-\cos(1)]\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} dw\,.$$

L'integrale con integranda $\cos(w')/w'$ è nullo in quanto la stessa integranda è dispari, mentre i valori principali sono stati eliminati poiché tutte le singolarità sono eliminabili. Possiamo deformare con continuità il percorso di integrazione aggirando l'origine con un arco infinitesimo, avremo quindi il percorso Γ definito come

$$\Gamma = (-\infty,-\epsilon)\cup\left(-\gamma_\epsilon^+\right)\cup(\epsilon,\infty)\,, \qquad \gamma_\epsilon^+ = \{z : z=\epsilon e^{i\theta}, \theta\in(0,\pi)\}\,,$$

dove γ_ϵ^+ è una semicirconferenza immersa nel semipiano superiore, $\mathrm{Im}(z) > 0$, centrata nell'origine e con raggio ϵ. L'integrale cercato diventa

$$P = [1-\cos(1)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(w)}{w} dw = [1-\cos(1)] \int_\Gamma \frac{\mathrm{sen}(w)}{w} dw = \frac{1-\cos(1)}{2i} \int_\Gamma \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{w} dw \, .$$

Applichiamo il lemma di Jordan chiudendo, per il primo termine, il percorso di integrazione nel semipiano superiore, per il secondo termine, nel semipiano inferiore. Poiché l'arco infinitesimo γ_ϵ^+ è immerso nel semipiano superiore, il percorso chiuso in $\mathrm{Im}(z) > 0$ non contiene singolarità, solo il secondo ha un contributo non nullo. Usando il teorema dei residui si ha

$$P = \frac{1-\cos(1)}{2i} \left(\underbrace{\int_\Gamma \frac{e^{iw}}{w} dw}_{=0} - \int_\Gamma \frac{e^{-iw}}{w} dw \right) = \frac{1-\cos(1)}{2i} \, (-2i\pi) \, \mathrm{Res}\left[\frac{-e^{-iw}}{w}, w = 0 \right] ,$$

il segno "meno" di fronte al fattore $2i\pi$ è conseguenza dell'orientazione oraria del percorso chiuso nel semipiano inferiore. Il risultato finale è

$$P = \pi \, (1 - \cos(1)) \, .$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$J = \mathrm{Pr} \int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{1-z} dz \, ,$$

con il percorso orientato in senso antiorario.

Soluzione del secondo problema

La funzione ha una singolarità essenziale nell'origine e un polo semplice in $z = 1$, rispetto al quale si calcola il valore principale. Consideriamo il percorso di integrazione dentato internamente in corrispondenza del polo semplice in $z = 1$

$$\Gamma_\epsilon = \{z : |z| = 1, \arg(z) \in (\epsilon, 2\pi - \epsilon)\} \cup \{z : z = 1 + \epsilon e^{i\theta}, -\theta \in (-3\pi/2, -\pi/2)\} \equiv \gamma_1 \cup \gamma_\epsilon \, ,$$

composto da un arco, γ_1, di raggio unitario, centrato nell'origine e angolo sotteso pari a $2\pi - 2\epsilon$, ed un arco infinitesimo, $-\gamma_\epsilon$, di raggio ϵ, centrato in $z = 1$, e angolo sotteso π; quest'ultimo è orientato in senso orario. L'integrale J è dato dal solo contributo sull'arco unitario, ovvero, usando il teorema dei residui, si ha

$$\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{e^{1/z}}{1-z} dz = J - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{1/z}}{1-z} dz = 2i\pi \, \mathrm{Res}\left[\frac{e^{1/z}}{1-z} dz, z = 0 \right] ,$$

quindi

$$J = 2i\pi \, \mathrm{Res}\left[\frac{e^{1/z}}{1-z} dz, z = 0 \right] + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{1/z}}{1-z} dz \, .$$

L'integrale su γ_ϵ si calcola usando il lemma per l'integrazione sugli archi infinitesimi

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{1/z}}{1-z} dz = i\pi \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{1/z}}{1-z} (z-1) = -i\pi \, e \, .$$

Il residuo in $z = 0$ si calcola sfruttando le serie note dell'esponenziale e della funzione $1/(1-z)$ che, nel limite $z \to 0$ rappresenta la somma della serie geometrica di ragione z. Si ha quindi

$$\frac{e^{1/z}}{1-z} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{z^{-k+j}}{k!} \, ,$$

il residuo coincide con il coefficiente C_{-1} della potenza z^{-1}, che si ha per tutti i valori degli indici $k, j \in \{0, 1, \ldots\}$ tali che $k = j + 1$, quindi

$$\text{Res}\left[\frac{e^{1/z}}{1-z}dz, z=0\right] = C_{-1} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{\delta_{k,j+1}}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}}_{=e} - 1 = e - 1\,,$$

l'ultima serie è uguale ad $e^{z=1} = e$. In definitiva

$$J = 2i\pi\,\text{Res}\left[\frac{e^{1/z}}{1-z}dz, z=0\right] + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{e^{1/z}}{1-z}dz = 2i\pi\,(e-1) - i\pi\,e$$
$$J = 2i\pi\left(\frac{e}{2} - 1\right).$$

Terzo problema (punteggio 5/30)

Si determini la funzione $f(z)$ che:

- ha un polo doppio all'infinito, tale che $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$;
- è nulla nell'origine, $f(0) = 0$;
- al finito ha solo due poli, con residui $R_{1,2} = \pm 1$, nei punti $z_{1,2} = \pm\sqrt{2}$;
- è pari, cioè tale che $f(z) = f(-z)$.

Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa, avendo al finito solo singolarità polari, si ha quindi lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$f(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z)\,,$$

dove $g(z)$ rappresenta la parte intera che ha lo stesso comportamento asintotico di $f(z)$, mentre le funzioni F_k sono le parti principali degli sviluppi di Laurent centrati nella singolarità z_k. Poiché la funzione $f(z)$ ha un polo doppio all'infinito, $g(z)$ è un polinomio di secondo grado

$$g(z) = A + Bz + Cz^2\,.$$

Si hanno solo due poli semplici, $z_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, i cui residui sono $R_{1,2} = \pm 1$, quindi la serie si riduce ad una somma e si ha

$$f(z) = A + Bz + Cz^2 + \frac{R_1}{z - z_1} + \frac{R_2}{z - z_2} = A + Bz + Cz^2 + \frac{1}{z - \sqrt{2}} + \frac{1}{z + \sqrt{2}} = A + Cz^2 + \frac{2\sqrt{2}}{z^2 - 2}\,,$$

dove si è posto $B = 0$ poiché la funzione è pari.
Dalla condizione $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^2 = 1$, si ottiene che il coefficiente C è uguale ad 1, infatti

$$1 = \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = \lim_{z\to\infty} \frac{A + Cz^2 + \frac{2\sqrt{2}}{z^2-2}}{z^2} = C\,.$$

Infine, il valore di A si ottiene usando $f(0) = 0$

$$0 = f(0) = A - \sqrt{2}\,, \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{2}\,.$$

L'espressione completa della funzione è

$$f(z) = \sqrt{2} + z^2 + \frac{2\sqrt{2}}{z^2 - 2}$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Dato un operatore normale $\hat{A}$ nello spazio di Hilbert E_N, di dimensione finita N, si dimostri che, se esiste un polinomio $P_m(x)$ di grano $m < N$ e tale che

$$\hat{P}_m\left(\hat{A}\right) = \hat{0}\,,$$

dove $\hat{0}$ è l'operatore nullo, allora $\hat{A}$ è degenere. Si dimostri inoltre che gli zeri del polinomio $P_m(x)$ rappresentano lo spettro dell'operatore e lo si verifichi esplicitamente, definendo il polinomio e valutandolo opportunamente, nel caso in cui lo spazio di Hilbert abbia dimensione $N = 3$ e l'operatore sia rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione del quarto problema

Poiché l'operatore è normale, esso è diagonalizzabile, si può quindi usare la rappresentazione spettrale

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \hat{P}_{(k)}\,,$$

dove $\hat{P}_{(k)}$ è l'operatore di proiezione nella direzione dell'autovettore k-esimo, con $k = 1, 2, \ldots, M \le N$. Il numero M rappresenta il numero di autovalori distinti. Il polinomio può essere scritto nella forma

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} p_j x^j\,,$$

dove $\{p_j\}_{j=0}^{n} \subset \mathbb{C}$ rappresenta insieme dei coefficienti. L'operatore che si ottiene valutando il polinomio sull'operatore $\hat{A}$ è

$$\hat{P}_m\left(\hat{A}\right) = \sum_{j=0}^{m} p_j \hat{A}^j = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{M} p_j \alpha_k^j \hat{P}_{(k)}\,, = \sum_{k=1}^{M} P_m(\alpha_k)\hat{P}_{(k)}\,,$$

ovvero è un operatore con gli stessi autovettori di $\hat{A}$ e con insieme degli autovalori $\{P_m(\alpha_k)\}_{k=1}^{M}$. Per ipotesi l'operatore $\hat{P}_m\left(\hat{A}\right)$ è nullo, quindi ha tutti gli autovalori nulli, cioè si hanno le M equazioni

$$P_m(\alpha_k) = 0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, M\,,$$

ne consegue che gli autovalori α_k, con $k = 1, 2, \ldots, M$, sono zeri del polinomio. Per il teorema fondamentale dell'algebra, il polinomio di grado m ha, al più, m zeri distinti, con molteplicità uno, quindi $M \le m$. Ma, poiché $m < N$, si ha $M < N$ che implica degenerazione.
Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$\det\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 1 & 0 & -1-\alpha \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \alpha_1 = -\sqrt{2} \\ \alpha_2 = \sqrt{2} \\ \alpha_3 = 2 \end{cases}.$$

Sono tutti distinti, non c'è degenerazione, ne consegue che il polinomio cercato deve essere di terzo grado ed è

$$P_3(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2) = \left(x^2-2\right)(x-2) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4\,,$$

ed ovviamente coincide con l'equazione secolare. Avendo

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

l'equazione è

$$
\begin{aligned}
P_3(A) &= A^3 - 2A^2 - 2A + 4I \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

come volevasi dimostrare.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la serie trigonometrica di Fourier ($x \in [-\pi, \pi]$) della funzione

$$f(x) = x^3 - x^2 .$$

Sfruttando la serie ottenuta, si calcolino due delle serie

$$S_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \qquad S_p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}, \qquad S_d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} .$$

La terza si ottiene dalle altre due avendo $S_t = S_p + S_d$.
Suggerimento. Per il calcolo delle somme si valuti la serie trigonometrica di Fourier agli estremi e al centro dell'intervallo.

Soluzione del quinto problema

La serie trigonometrica di Fourier ha la forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx) \right] ,$$

dove i coefficienti sono

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx , \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(kx) f(x) dx , \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Gli integrali sono del tipo ($k > 0$)

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = x^2 \frac{\mathrm{sen}(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x \mathrm{sen}(kx) dx = -\frac{2}{k}\left(-x\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx \right) = \frac{4\pi}{k^2}(-1)^k , \\
&\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \mathrm{sen}(kx) dx = -x^3 \frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = -\frac{2\pi^3}{k}(-1)^k + \frac{12\pi}{k^3}(-1)^k = \frac{2\pi}{k^3}\left(6 - k^2\pi^2\right)(-1)^k .
\end{aligned}
$$

I coefficienti, per $k > 0$, sono

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^3 - x^2\right) \cos(kx) dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{4}{k^2}(-1)^{k+1} , \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^3 - x^2\right) \mathrm{sen}(kx) dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \mathrm{sen}(kx) dx = \frac{2}{k^3}\left(6 - k^2\pi^2\right)(-1)^k ,
\end{aligned}
$$

mentre per il coefficiente a_0 si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^3 - x^2\right) dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = -\frac{2\pi^2}{3} .$$

La serie trigonometrica di Fourier è

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4}{k^2}(-1)^{k+1} \cos(kx) + \frac{2}{k^3}\left(6 - k^2\pi^2\right)(-1)^k \mathrm{sen}(kx) \right] \\
&= -\frac{\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^3}(-1)^k \left[2k\cos(kx) - \left(6 - k^2\pi^2\right) \mathrm{sen}(kx) \right] .
\end{aligned}
$$

Per il teorema di Fejér, valutandola agli estremi dell'intervallo, in $x = \pm\pi$, si ottiene il valore medio del limite destro in $x = -\pi$ e sinistro in $x = \pi$, ovvero

$$\overline{f}(\pm\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = \frac{1}{2}\left(\pi^3 - \pi^2 - \pi^3 - \pi^2\right) = -\pi^2 = -\frac{\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

da cui si ricava la somma della serie degli opposti dei quadrati dei numeri naturali come

$$S_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Per la serie con i segni alternati, valutiamo la serie trigonometrica in $x = 0$, così da annullare tutti i contributi delle funzioni seno, mantenendo solo i termini con le funzioni coseno, con anche i segni alternati, infatti

$$f(0) = 0 = -\frac{\pi^2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}(-1)^k,$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Separando i contributi pari e dispari si ha

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = S_p - S_d,$$

mentre dalla soma a segno costante si ha

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = S_p + S_d.$$

Sommando e sottraendo membro a membro le precedenti indentità si ottengono le serie richieste, infatti

$$2S_p = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} \quad \Rightarrow \quad S_p = \frac{\pi^2}{24},$$

$$2S_d = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} \quad \Rightarrow \quad S_d = \frac{\pi^2}{8}.$$

Sesto problema (punteggio 5/30)

Si calcolino le trasformate di Fourier delle funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Suggerimento. Nel caso in cui si abbiano singolarità sull'asse reale l'integrale della trasformata di Fourier deve essere calcolato in valore principale.

Soluzione del sesto Problema

Le funzioni $f_n(x)$ si ottengono come derivate della $f_1(x)$, infatti

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_1(x) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{1+x} = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(1+x)^n},$$

da cui

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f_1(x).$$

La trasformata di Fourier della derivata n-esima di una funzione è pari a $(ik)^n$ volte la trasformata di Fourier della funzione stessa, ne consegue che

$$\mathscr{F}_k\left[f_n(x)\right] = \frac{(-ik)^{n-1}}{(n-1)!}\mathscr{F}_k\left[f_1(x)\right], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Per calcolare $\mathscr{F}_k\left[f_1(x)\right]$, poiché c'è un polo semplice lungo il percorso di integrazione si usa il valore principale, che si può calcolare con la formula di Sokhotsky-Plemelj

$$\mathscr{F}_k\left[f_1(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{1+x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{1+x+i\epsilon}dx + i\pi\, e^{-ikx}\Big|_{x=-1}\right).$$

Per l'integrale usiamo il lemma di Jordan, considerando che l'integranda ha un solo polo semplice nel semipiano inferiore, in $z=-1-i\epsilon$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[f_1(x)\right] &= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ik} + \begin{cases} 0 & k<0 \\ \frac{-2i\pi}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{1+z+i\epsilon}, z=-1-i\epsilon\right] = -i2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{ik} & k>0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ik} & k<0 \\ -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ik} & k>0 \end{cases} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{segn}(k)\,e^{ik},\end{aligned}$$

dove $\mathrm{segn}(k)$ è la funzione segno

$$\mathrm{segn}(k) = \theta(k) - \theta(-k) = \begin{cases} 1 & k>0 \\ -1 & k<0 \end{cases}.$$

La trasformata di Fourier cercata è

$$\mathscr{F}_k\left[f_n(x)\right] = \frac{(-ik)^{n-1}}{(n-1)!}\mathscr{F}_k\left[f_1(x)\right] = -i\frac{(-ik)^{n-1}}{(n-1)!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{segn}(k)\,e^{ik}.$$