Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 20 gennaio 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)

Una volta identificato, nel piano complesso α, il dominio di convergenza della rappresentazione integrale

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\alpha^{i\ln(w)}}{w^2+1} dw\,,$$

si calcoli esplicitamente l'espressione della funzione $f(\alpha)$, risolvendo l'integrale, e se ne determini il dominio di analiticità.

Soluzione 1

L'integrale può essere posto nella forma

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{w^{i\ln(\alpha)}}{w^2+1} dw\,,$$

ed è del tipo

$$\int_0^\infty w^\mu R(w) dw\,,$$

dove $\mu = i\ln(\alpha) \in \mathbb{C}$ ed $R(w) = (w^2+1)^{-1}$ è una funzione razionale che non ha poli sul semiasse reale positivo. Le condizioni di convergenza, tenendo conto sia della potenza μ che dell'andamento della funzione razionale agli estremi $w \to 0^+$ e $w \to \infty$, sono rispettivamente:

$$\mathrm{Re}(\mu) > -1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Re}(\mu - 2) < -1\,,$$

da cui

$$-1 < \mathrm{Re}(\mu) < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < \arg(\alpha) < 1\,.$$

Per risolvere l'integrale si usa

$$f(\alpha) = \int_0^\infty w^\mu R(w) dw = -\frac{\pi e^{-i\pi\mu}}{\mathrm{sen}(\pi\mu)} \sum_k \mathrm{Res}\left[w^\mu R(w), w_k\right]\,,$$

dove la somma è relativa a tutti i poli della funzione razionale. Nel caso in esame si hanno i due poli semplici $w_{1,2} = \pm i$, quindi

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= -\frac{\pi e^{-i\pi\mu}}{\mathrm{sen}(\pi\mu)} \sum_k \mathrm{Res}\left[w^\mu R(w), w_k\right] = -\frac{\pi e^{\pi\ln(\alpha)}}{-i\,\mathrm{senh}(\pi\ln(\alpha))}\left[\frac{i^{i\ln(\alpha)}}{2i} + \frac{(-i)^{i\ln(\alpha)}}{-2i}\right] \\
&= -\frac{\pi e^{\pi\ln(\alpha)}}{\mathrm{senh}(\pi\ln(\alpha))}\left[\frac{e^{-\pi\ln(\alpha)/2}}{2} - \frac{e^{-3\pi\ln(\alpha)/2}}{2}\right] = -\frac{\pi}{\mathrm{senh}(\pi\ln(\alpha))}\left[\frac{e^{\pi\ln(\alpha)/2}}{2} - \frac{e^{-\pi\ln(\alpha)/2}}{2}\right] \\
&= \pi\frac{\mathrm{senh}(\pi\ln(\alpha)/2)}{\mathrm{senh}(\pi\ln(\alpha))} = \frac{\pi}{2\cosh(\pi\ln(\alpha)/2)}\,.
\end{aligned}$$

Un'altra possibilità consiste nel fare la sostituzione: $x = \ln(w)$

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{iz}}{e^{2z}+1} e^z dz$$

e considerare il percorso chiuso rettangolare $\Gamma_R = [-R,R] \cup [R,R+i\pi] \cup [R+i\pi,-R+i\pi] \cup [-R+i\pi,-R]$, che contiene il solo polo semplice $z_1 = i\pi/2$. Si hanno

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{\alpha^{ix}}{e^{2x}+1} e^z dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{\alpha^{iz}}{e^{2z}+1} e^z, i\pi/2\right] = \pi \alpha^{-\pi/2},$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{\alpha^{iz}}{e^{2z}+1} e^z dz &= f(\alpha) + \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\alpha^{ix-\pi}}{e^{2x+2i\pi}+1} e^{x+i\pi} dx + \lim_{R\to\infty}\left(\int_{[R,R+i\pi]} \frac{\alpha^{iz}}{e^{2z}+1} e^z dz + \int_{[-R,-R+i\pi]} \frac{\alpha^{iz}}{e^{2z}+1} e^z dz\right) \\
&= f(\alpha) + \alpha^{-\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^{ix}}{e^{2x}+1} e^x dx + \\
&= f(\alpha)(1+\alpha^{-\pi}).
\end{aligned}$$

Eguagliando i due risultati si ottiene

$$f(\alpha) = \pi \frac{\alpha^{-\pi/2}}{1+\alpha^{-\pi}} = \pi \frac{e^{-\pi\ln(\alpha)/2}}{1+e^{-\pi\ln(\alpha)}} = \frac{\pi}{2\cosh(\pi\ln(\alpha)/2)}.$$

Esercizio 2 (6 punti)

Usando le relazioni di dispersione si ottengano la parti reali sopra il taglio (x_0,∞), $x_0 > 0$, delle funzioni $f_1(z)$ ad $f_2(z)$ che hanno parti immaginarie

$$\operatorname{Im}[f_1(x+i\epsilon)] = \frac{\theta(x-x_0)}{\sqrt{x-x_0}}, \qquad \operatorname{Im}[f_2(x+i\epsilon)] = \frac{\theta(x-x_0)}{x\sqrt{x-x_0}}, \qquad \text{con: } \epsilon \to 0^+, x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione 2

La relazione di dispersione per la parte reale è:

$$\operatorname{Re}[f_{1,2}(x)] = \frac{1}{\pi} \Pr \int_{x_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}[f_{1,2}(x')]}{x'-x} dx', \qquad \text{con: } x > x_0 > 0,$$

dove, secondo la convezione, sia la parte reale che quella immaginaria sono valutate sul bordo superiore del taglio. Nel primo caso si ha

$$\operatorname{Re}[f_1(x)] = \frac{1}{\pi} \Pr \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx'}{(x'-x)\sqrt{x'-x_0}},$$

facciamo la sostituzione $w = \sqrt{x'-x_0} > 0$,

$$\operatorname{Re}[f_1(x)] = \frac{2}{\pi} \Pr \int_0^{\infty} \frac{dw}{w^2+x_0-x} = \frac{1}{\pi\sqrt{x-x_0}} \left(\Pr \int_0^{\infty} \frac{dw}{w-\sqrt{x-x_0}} - \int_0^{\infty} \frac{dw}{w+\sqrt{x-x_0}}\right).$$

Il valore principale rimane solo nel primo integrale poiché il polo $w = -\sqrt{x - x_0}$, essendo negativo, non appartiene al percorso di integrazione. Esplicitamente si ottiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}[f_1(x)] &= \frac{1}{\pi\sqrt{x-x_0}}\left[\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_0^{\sqrt{x-x_0}-\epsilon}\frac{dw}{w-\sqrt{x-x_0}}+\int_{\sqrt{x-x_0}+\epsilon}^{\infty}\frac{dw}{w-\sqrt{x-x_0}}\right)-\ln\left(w+\sqrt{x-x_0}\right)\Big|_0^{\infty}\right] \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{x-x_0}}\left[\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\ln\left(w-\sqrt{x-x_0}\right)\Big|_0^{\sqrt{x-x_0}-\epsilon}+\ln\left(w-\sqrt{x-x_0}\right)\Big|_{\sqrt{x-x_0}+\epsilon}^{\infty}\right)\right. \\
&\qquad \left.-\ln\left(w+\sqrt{x-x_0}\right)\Big|_0^{\infty}\right] \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{x-x_0}}\left[\ln(-1)+\ln\left(\frac{w-\sqrt{x-x_0}}{w+\sqrt{x-x_0}}\right)\Bigg|_0^{\infty}\right] \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{x-x_0}}\left[\ln(-1)+\ln(1)-\ln(-1)\right]=0\,.
\end{aligned}
$$

La parte reale di $f_1(z)$ è nulla sopra il taglio, ovvero la funzione è puramente immaginaria per $z = x + i\epsilon$, con $\epsilon \to 0^+$ e $x > x_0$.
Per la seconda funzione, con la medesima sostituzione, si ha

$$
\mathrm{Re}[f_2(x)] = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Pr}\int_0^{\infty}\frac{dw}{(w^2+x_0)(w^2+x_0-x)} = \frac{2}{\pi\, x}\left(\mathrm{Pr}\int_0^{\infty}\frac{dw}{w^2+x_0-x}-\int_0^{\infty}\frac{dw}{w^2+x_0}\right).
$$

Il primo integrale coincide con quello del caso precedente ed è, quindi, nullo, per il secondo si ha

$$
\mathrm{Re}[f_2(x)] = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Pr}\int_0^{\infty}\frac{dw}{(w^2+x_0)(w^2+x_0-x)} = \frac{-2}{x\,\pi\,\sqrt{x_0}}\int_0^{\infty}\frac{dw/\sqrt{x_0}}{w^2/x_0+1} = \frac{-2}{x\,\pi\,\sqrt{x_0}}\arctan\left(\frac{w}{\sqrt{x_0}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{x\,\sqrt{x_0}}\,.
$$

Ne consegue che la funzione $f_2(z)$ sopra il taglio può essere scritta come

$$
f_2(x+i\epsilon) = -\frac{1}{x\,\sqrt{x_0}} + i\,\frac{\theta(x-x_0)}{x\sqrt{x-x_0}}\,, \qquad \text{con: } \epsilon\to 0^+\,.
$$

Esercizio 3 (5 punti)

Si dimostri

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+p_k^{-z}) = \ln[\zeta(z)]-\ln[\zeta(2z)]\,, \qquad \mathrm{Re}(z)>1\,,
$$

dove p_k rappresenta il k-esimo numero primo ($p_{k+1} > p_k$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$) e $\zeta(z)$ è la funzione zeta di Riemann

$$
\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty}k^{-z}\,, \qquad \mathrm{Re}(z)>1\,.
$$

Soluzione 3

Scriviamo la somma come prodotto infinito passando all'esponenziale, ovvero

$$
\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+p_k^{-z})\right] = \exp\Big\{\ln[\zeta(z)]-\ln[\zeta(2z)]\Big\}
$$

quindi l'identità da dimostrare diventa

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+p_k^{-z}) = \frac{\zeta(z)}{\zeta(2z)}\,.$$

Consideriamo il prodotto, sempre con $\mathrm{Re}(z) > 1$, dividendo per la zeta di Riemann, sfruttando la rappresentazione

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-p_k^{-z})\,.$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta(z)}\prod_{k=1}^{\infty}(1+p_k^{-z}) &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n^{-z})\prod_{k=1}^{\infty}(1+p_k^{-z}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1-p_k^{-2z}) = \frac{1}{\zeta(2z)}\\
\frac{1}{\zeta(z)}\prod_{k=1}^{\infty}(1+p_k^{-z}) &= \frac{1}{\zeta(2z)}\,,
\end{aligned}$$

da cui, moltiplicando per $\zeta(z)$ ambo i membri, si arriva all'identità cercata

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+p_k^{-z}) = \frac{\zeta(z)}{\zeta(2z)}\,.$$

Esercizio 4 (6 punti)

Sia $\hat{H}$ un operatore hermitiano in uno spazio di Hilbert ad $(N+1)$ dimensioni. Siano $\{E_k\}_{k=0}^{N}$ lo spettro dell'operatore e $\{|u_k\rangle\}_{k=0}^{N}$ l'insieme degli autostati ortonormali corrispondenti, si ha quindi l'equazione agli autovalori

$$\hat{H}|u_k\rangle = E_k|u_k\rangle\,, \qquad \text{con: } E_0 = 0 < E_1 < \ldots < E_{N-1} < E_N\,.$$

Sapendo che l'operatore $\hat{H}$ può essere scritto come

$$\hat{H} = \hat{A}^{\dagger}\hat{A}\,,$$

dove $\hat{A}$ è un operatore non normale, si dimostri che:

- $\hat{A}|u_0\rangle = |0\rangle$;
- l'operatore $\hat{G} = \hat{A}\hat{A}^{\dagger}$ ha lo spettro $\{E_k\}_{k=1}^{N}$, ovvero ha gli stessi autovalori di $\hat{H}$ ad eccezione dello stato fondamentale E_0 e che gli autostati corrispondenti sono i vettori

$$|v_k\rangle = \hat{A}|u_k\rangle\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Soluzione 4

Il valore di aspettazione di $\hat{H}$ rispetto allo stato $|u_0\rangle$ coincide con l'autovalore E_0 ed è, quindi, nullo, per cui

$$0 = \langle u_0|\hat{H}|u_0\rangle = \langle u_0|\hat{A}^{\dagger}\hat{A}|u_0\rangle = \langle v_0|v_0\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \hat{A}|u_0\rangle = |v_0\rangle = |0\rangle\,.$$

L'equazione agli autovalori per l'operatore $\hat{G} = \hat{A}\hat{A}^{\dagger}$ si ottiene da quella per $\hat{H}$ moltiplicando per $\hat{A}$, cioè

$$\begin{aligned}
\hat{H}|u_k\rangle = \hat{A}^{\dagger}\hat{A}|u_k\rangle &= E_k|u_k\rangle\\
\hat{A}\hat{A}^{\dagger}\hat{A}|u_k\rangle &= E_K\hat{A}|u_k\rangle\\
\hat{G}\hat{A}|u_k\rangle &= E_K\hat{A}|u_k\rangle\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N\,.
\end{aligned}$$

I vettori $|v_k\rangle = \hat{A}|u_k\rangle$, con $k = 1, 2, \ldots, N$, sono autovettori di $\hat{G}$ con autovalori E_k. Non si ha l'autovalore nullo $E_0 = 0$, in quanto, come già dimostrato, $\hat{A}|u_0\rangle = |0\rangle$ e il vettore nullo non è un autovettore.

Esercizio 5 (6 punti)

Usando la trasformata di Fourier, si determini la funzione $f(x)$ che verifica l'identità

$$(f * f * f)(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

dove il simbolo "$*$" indica il prodotto di convoluzione.

Soluzione 5

La trasformata di Fourier della funzione $g(x) = 1/(1+x^2)$ è

$$\mathscr{F}_k[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \frac{2i\pi}{\sqrt{2\pi}} \left[\theta(-k)\frac{e^k}{2i} - \theta(k)\frac{e^{-k}}{-2i} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}.$$

Applicando due volte il teorema della convoluzione all'identità di partenza si ottiene un'equazione algebrica per la trasformata di Fourier della $f(x)$, ovvero

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[f(x) * f(x) * f(x)\right] &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \\
\sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k\left[f(x)\right] \mathscr{F}_k\left[f(x) * f(x)\right] &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \\
2\pi\, \mathscr{F}_k\left[f(x)\right] \mathscr{F}_k\left[f(x)\right] \mathscr{F}_k\left[f(x)\right] &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \\
\mathscr{F}_k\left[f(x)\right] \equiv \tilde{f}(k) &= \frac{1}{(2\sqrt{2\pi})^{1/3}} e^{-|k|/3}.
\end{aligned}$$

La funzione $f(x)$ si ottiene facendo l'antitrasformata e si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{2\pi})^{1/3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|/3} e^{ikx} dk \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{2\pi})^{1/3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|/3} e^{ikx} dk \qquad (k' = k/3) \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{2\pi})^{1/3}} \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k'|} e^{3ik'x} dk' \\
&= \frac{3}{(2\sqrt{2\pi})^{1/3}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+9x^2} \\
&= \frac{3}{\pi^{2/3}(1+9x^2)}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (6 punti)

Si determini il dominio di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-1} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^k,$$

dove le A_k sono matrici 2×2

$$A_k = \begin{pmatrix} k & ik\,e^k \\ k\,e^k/i & k \end{pmatrix}.$$

Soluzione 6

Diagonalizziamo le matrici hermitiane A_k

$$0 = \det(A_k - \lambda_k I) = \det\begin{pmatrix} k-\lambda_k & ik\,e^k \\ -ik\,e^k & k-\lambda_k \end{pmatrix} = (k-\lambda_k)^2 - k^2\,e^{2k},$$

da cui gli autovalori

$$\lambda_k^{1,2} = k(1 \pm e^k).$$

e quindi la rappresentazione diagonale

$$A'_k = \begin{pmatrix} k(1+e^k) & 0 \\ 0 & k(1-e^k) \end{pmatrix}.$$

Per il teorema spettrale la matrice inversa A_k^{-1} avrà rappresentazione rispetto alla base degli autovettori

$$(A_k^{-1})' = \begin{pmatrix} 1/k(1+e^k) & 0 \\ 0 & 1/k(1-e^k) \end{pmatrix}.$$

I raggi di convergenza per i due autovalori sono

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \left[\limsup_{k\to\infty} \left|1/\lambda_k^{1,2}\right|^{1/k}\right]^{-1} = \left[\limsup_{k\to\infty} \left|k(1\pm e^k)\right|^{-1/k}\right]^{-1} \\ &= \left[\limsup_{k\to\infty} e^{-\ln\left|k(1\pm e^k)\right|/k}\right]^{-1} = \left[\limsup_{k\to\infty} e^{-\ln(k)/k-\ln\left|1\pm e^k\right|/k}\right]^{-1} \\ &= \left[\limsup_{k\to\infty} e^{-\ln(k)/k-\ln\left|e^{-k}\pm 1\right|/k-1}\right]^{-1} = e\,. \end{aligned}$$

Con la sostituzione $w = 1 - 1/z$ si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{-1}\,w^k,$$

che converge per

$$|w| < e \quad \Rightarrow \quad |1 - 1/z| < e\,.$$

Il dominio di convergenza è quindi $D = \{z : |1-1/z| < e\}$. Per "visualizzare" nel piano complesso la forma di tale dominio riscriviamo la condizione ottenuta

$$\left|1-\frac{1}{z}\right| < e \quad \Leftrightarrow \quad \left|1-\frac{1}{z}\right|^2 < e^2 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1|^2 < e^2|z^2|,$$

(l'ultima diseguaglianza è lecita in quanto D non può contenere perché in ogni suo intorno $|1/z|$ assumerebbe valori arbitrariamente grandi) in termini della parte reale e parte immaginaria di z, x e y, come

$$\begin{gathered}(x-1)^2+y^2-e^2(x^2+y^2)<0\\ x^2(1-e^2)-2x+1+y^2(1-e^2)<0\\ x^2(e^2-1)+2x-1+y^2(e^2-1)>0\,.\end{gathered}$$

La frontiera al finito di questo dominio ha equazione cartesiana

$$x^2(e^2-1)+2x-1+y^2(e^2-1)=0\,,$$

è quindi una circonferenza, infatti, sommando e sottraendo $1/(e^2-1)$, e dividendo poi per (e^2-1), si ha

$$\begin{aligned}\left(x\sqrt{e^2-1}+1/\sqrt{e^2-1}\right)^2+y^2(e^2-1)&=1/(e^2-1)+1\\ \left(x+1/(e^2-1)\right)^2+y^2&=e^2/(e^2-1)^2\,.\end{aligned}$$

Il dominio D coincide con il piano complesso privato del cerchioi centrato sull'asse reale in $z_0=-1/(e^2-1)<0$, di raggio $r=e/(e^2-1)$.