

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

TERZO APPELLO INVERNALE DEL 20 FEBBRAIO 2026

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcolino gli integrali di *coppe* (si vedano le **Curiosità**)

$$\clubsuit_n = \int_0^\infty \frac{x^{1/(2n+1)}}{x^{2n+1} + 1} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e si verifichi il limite della successione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \clubsuit_n = 1.$$

Curiosità. Le prime testimonianze di carte da gioco sono state rinvenute in Cina e risalgono al X secolo. Sembra ci fossero 24 carte, suddivise in tre semi e che le otto carte di ciascun seme fossero numerate da due a nove. Erano anche dette *carte moneta*, poiché rappresentavano al contempo lo strumento e la posta del gioco. La diffusione in Europa inizia nella seconda metà del XIV secolo. I quattro semi denominati: *cuori*, *quadri*, *fiori* e *picche* compaiono in Francia alla fine del 1400. La loro affermazione e l'ampia diffusione sono massimamente dovute alla semplicità dei disegni. Parallelamente ai semi francesi si diffondono anche i semi latini, sono i quattro ben noti: *spade*, *denari* o *ori*, *coppe* e *bastoni*. Alcuni esempi sono mostrati nelle figure sottostanti. Le prime due serie sono fogge di semi spagnoli, la seconda è una delle più diffuse in Italia, quella delle cosiddette carte *piacentine*. Ci sono anche delle carte peculiari italiane, come le *bergamasche* della terza figura. La quarta figura rappresenta la versione marocchina.



I semi germanici, svizzeri e tedeschi, sono ancora quattro ma sono diversi, come mostrato nelle prime due figure sottostanti. La terza serie, infine, è quella dei cinque semi giapponesi del mazzo denominato *Unsun Karuta*. Le carte con i quattro semi spagnoli sono state introdotte in Giappone dai mercanti portoghesi nel XVI secolo. In seguito alla loro diffusione nipponica, è stato aggiunto il quinto seme dei *vortici*.



SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

La funzione integranda è polidroma, ha punti di diramazione nell'origine all'infinito. La polidromia è dovuta alla radice $(2n-1)$ -esima a numeratore. Usiamo la formula d'integrazione

$$\int_0^\infty x^a R(x) dx = -\frac{\pi e^{-i\pi a}}{\sin(\pi a)} \sum_{\text{tutti}} \text{Res}[z^a R(z), z_k],$$

con $a \notin \mathbb{Z}$, $R(z)$ è una funzione razionale che ha poli nei punti dell'insieme $\{z_k\} \subset \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, ovvero non ha poli sul semiasse reale positivo. Inoltre, vale la condizione di convergenza

$$-1 - l < \operatorname{Re}(a) < -1 - h,$$

dove $l, h \in \mathbb{Z}$ sono le potenze che descrivono il comportamento della funzione razionale $R(z)$, rispettivamente nell'origine e all'infinito, ovvero

$$R(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} [\text{costante}] z^l, \quad R(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} [\text{costante}] z^h.$$

Nel caso in esame si hanno

$$a = \frac{1}{2n+1}, \quad R(z) = \frac{1}{z^{2n+1} + 1}, \quad (l, h) = (0, -2n-1) \in \mathbb{Z}^2,$$

quindi la condizione di convergenza è

$$\begin{aligned} -1 - l = -1 < \operatorname{Re}(a) = \frac{1}{2n+1} < -1 - h = 2n \\ \Downarrow \\ -2n - 1 < 1 < 2n(2n+1) \end{aligned}$$

ed è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$.

I poli sono gli zeri del polinomio di grado $2n+1$ a denominatore della funzione integranda, sono le $2n+1$ radici $(2n+1)$ -esime di -1 , cioè

$$z_k = e^{(2k+1)i\pi/(2n+1)}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}.$$

Sono poli semplici e i residui corrispondenti sono

$$\operatorname{Res} \left[\frac{z^{1/(2n+1)}}{z^{2n+1} + 1}, z_k \right] = \frac{z_k^{1/(2n+1)}}{(2n+1)z_k^{2n}} = \frac{z_k^{1/(2n+1)+1}}{(2n+1)z_k^{2n+1}} = -\frac{z_k^{(2n+2)/(2n+1)}}{(2n+1)} = -\frac{e^{(2k+1)(2n+2)i\pi/(2n+1)^2}}{(2n+1)}, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\},$$

abbiamo sfruttato la condizione $z_k^{2n+1} = -1$, valida $\forall k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$. Usiamo questo risultato nella formula risolutiva

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_n &= \frac{\pi e^{-i\pi/(2n+1)}}{\operatorname{sen}(\pi(2n+1))} \sum_{k=0}^{2n} \frac{e^{(2k+1)(2n+2)i\pi/(2n+1)^2}}{(2n+1)} = \frac{\pi e^{-i\pi/(2n+1)+(2n+2)i\pi/(2n+1)^2}}{(2n+1)\operatorname{sen}(\pi(2n+1))} \sum_{k=0}^{2n} e^{2k(2n+2)i\pi/(2n+1)^2} \\ &= \frac{\pi e^{-i\pi/(2n+1)+(2n+2)i\pi/(2n+1)^2}}{(2n+1)\operatorname{sen}(\pi(2n+1))} \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{2(2n+2)i\pi/(2n+1)^2} \right)^k \\ &= \frac{\pi e^{-i\pi/(2n+1)+(2n+2)i\pi/(2n+1)^2}}{(2n+1)\operatorname{sen}(\pi(2n+1))} \frac{e^{2(2n+2)i\pi/(2n+1)^2} - 1}{e^{2(2n+2)i\pi/(2n+1)^2} - 1} \\ &= \frac{\pi e^{-i\pi/(2n+1)+(2n+2)i\pi/(2n+1)^2}}{(2n+1)\operatorname{sen}(\pi(2n+1))} \frac{e^{(2n+2)i\pi/(2n+1)} - e^{-(2n+2)i\pi/(2n+1)}}{e^{(2n+2)i\pi/(2n+1)^2} - e^{-(2n+2)i\pi/(2n+1)^2}} \\ &= \frac{\pi e^{-i\pi/(2n+1)+(2n+2)i\pi/(2n+1)^2}}{(2n+1)\operatorname{sen}(\pi(2n+1))} \frac{\operatorname{sen}((2n+2)\pi/(2n+1))}{\operatorname{sen}((2n+2)\pi/(2n+1)^2)} \\ &= -\frac{\pi}{(2n+1)\operatorname{sen}(\pi(2n+1))} \frac{\operatorname{sen}(\pi/(2n+1) + \pi)}{\operatorname{sen}((2n+2)\pi/(2n+1)^2)}, \end{aligned}$$

da cui, usando la formula di somma della funzione seno a numeratore, si ha

$$\mathfrak{R}_n = \frac{\pi}{(2n+1)\operatorname{sen}((2n+2)\pi/(2n+1)^2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il valore limite richiesto è

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{R}_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{(2n+1)\operatorname{sen}((2n+2)\pi/(2n+1)^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi/(2n+1)}{\operatorname{sen}((2n+2)\pi/(2n+1)^2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi/(2n+1)}{(2n+2)\pi/(2n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2}, \end{aligned}$$

dove si è usato $\text{sen}(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$, nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, si ottiene quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1,$$

come richiesto dal problema.

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la successione dei coefficienti della parte principale della serie di Laurent della funzione *campanella* (si vedano le **Curiosità** in calce al testo del primo problema)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)\sinh(2z^2)},$$

centrata nell'origine e convergente in $z = 3/2$.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione $f(z)$ è meromorfa e ha poli negli zeri della funzione a denominatore, che sono l'unità, cioè $z_1 = 1$, che è lo zero semplice del polinomio di primo grado che moltiplica la funzione seno iperbolico e gli zeri della stessa, che sono

$$z_k^\pm = \pm \sqrt{\frac{ik\pi}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Il polo nell'origine è doppio, gli altri sono semplici, infatti, considerando solo la funzione seno iperbolico,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_{\pm k}^+} \frac{z - z_{\pm k}^+}{\sinh(2z^2)} &= \lim_{z \rightarrow z_{\pm k}^+} \frac{1}{4z \cosh(2z^2)} = \frac{1}{4z_{\pm k}^+ \cosh(ik\pi)} = \frac{(-1)^k}{2\sqrt{2ik\pi}}, \\ \lim_{z \rightarrow z_{\pm k}^-} \frac{z - z_{\pm k}^-}{\sinh(2z^2)} &= \lim_{z \rightarrow z_{\pm k}^-} \frac{1}{4z \cosh(2z^2)} = \frac{1}{4z_{\pm k}^- \cosh(ik\pi)} = -\frac{(-1)^k}{2\sqrt{2ik\pi}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

I moduli dei poli sono

$$|z_k^\pm| = \sqrt{\frac{|k|\pi}{2}}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

ne consegue che i più vicini all'origine, centro dello sviluppo richiesto, sono

$$|z_0^\pm| = 0, \quad |z_{\pm 1}^\pm| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \simeq 1,253, \quad |z_{\pm 2}^\pm| = \sqrt{\pi} \simeq 1,772, \quad |z_{\pm 3}^\pm| = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \simeq 2,171, \quad \dots$$

Poiché il punto in cui si richiede la convergenza $z = 3/2$ ha modulo maggiore di quelli del polo $z_1 = 1$ e comuni dei quattro poli $z_{\pm 1}^\pm$ e minore dei moduli dei poli $z_{\pm 2}^\pm$, cioè

$$|z_1| = 1 < |z_{\pm 1}^\pm| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} < \frac{3}{2} < |z_{\pm 2}^\pm| = \sqrt{\pi},$$

la corona circolare in cui converge la serie oggetto del problema è

$$D_{\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi}}(0) = \{z : \sqrt{\pi/2} < |z| < \sqrt{\pi}\}.$$

L'espressione integrale del k -esimo coefficiente della serie di Laurent centrata nell'origine e convergente nella corona circolare che $D_{\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi}}(0)$ è

$$C_k = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^{k+1}(z-1)\sinh(2z^2)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

con $\gamma \subset D_{\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi}}(0)$ e tale che: $n(0, \gamma) = 1$, cioè γ è una curva chiusa contenuta nella corona circolare e avvolge l'origine una sola volta.

I coefficienti richiesti sono quelli della parte principale della serie di Laurent, ovvero quelli con indice negativo, li scriviamo come

$$C_{-j} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} z^{j-1} \text{fct}(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{z^{j-1} dz}{(z-1) \sinh(2z^2)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Usiamo il teorema dei residui

$$\begin{aligned} C_{-j} &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{z^{j-1} dz}{(z-1) \sinh(2z^2)} \\ &= \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, 0 \right] + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, z_1 \right] \\ &\quad + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, z_1^- \right] + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, z_1^+ \right] \\ &\quad + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, z_{-1}^- \right] + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, z_{-1}^+ \right] \\ &= \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, 0 \right] + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, 1 \right] \\ &\quad + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, -\sqrt{\frac{i\pi}{2}} \right] + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, \sqrt{\frac{i\pi}{2}} \right] \\ &\quad + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, -\sqrt{\frac{-i\pi}{2}} \right] + \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, \sqrt{\frac{-i\pi}{2}} \right], \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Calcoliamo i residui nei quattro poli semplici $z_{\pm 1}^{\pm}$, dovuti all'azzeramento della funzione seno iperbolico,

$$\text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, z_{\pm 1}^{\pm} \right] = \lim_{z \rightarrow z_{\pm 1}^{\pm}} \frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)} (z - z_{\pm 1}^{\pm}) = \frac{(z_{\pm 1}^{\pm})^{j-1}}{z_{\pm 1}^{\pm} - 1} \frac{-1}{4z_{\pm 1}^{\pm}} = -\frac{(z_{\pm 1}^{\pm})^{j-2}}{4(z_{\pm 1}^{\pm} - 1)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Il residuo nel polo semplice $z_1 = 1$ è

$$\text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, z_1 \right] = \frac{1}{\sinh(2)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Infine il residuo nell'origine, che è un polo doppio della funzione $\text{fct}(z)$, dipende dal valore dell'indice $j \in \mathbb{N}$, si ha

$$\text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, 0 \right] \neq 0 = \begin{cases} \text{Res} \left[\frac{1}{(z-1) \sinh(2z^2)}, 0 \right] \neq 0 & j = 1 \\ \text{Res} \left[\frac{z}{(z-1) \sinh(2z^2)}, 0 \right] \neq 0 & j = 2 \\ \text{Res} \left[\frac{z^{j-1}}{(z-1) \sinh(2z^2)}, 0 \right] = 0 & j \geq 2 \end{cases},$$

sono diversi da zero solo i primi due, con $j = 1$ e $j = 2$. Nel primo caso, l'origine è un polo doppio della funzione integranda. Per ottenere il residuo usiamo la serie di Laurent che si ricava dalle serie di Taylor note, cioè

$$\begin{aligned} \text{Res}\left[\frac{1}{(z-1)\sinh(2z^2)}, 0\right] &= -\sum_{l=0}^{\infty} z^l \left(2z^2 + \frac{(2z^2)^3}{3!} + \frac{(2z^2)^5}{5!} + \mathcal{O}(z^{10}) \right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} z^{l-2} \left(1 + \frac{(2z^2)^2}{3!} + \frac{(2z^2)^4}{5!} + \mathcal{O}(z^8) \right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \dots \right) \left[1 - \left(1 + \frac{(2z^2)^2}{3!} + \frac{(2z^2)^4}{5!} + \dots \right) + \left(1 + \frac{(2z^2)^2}{3!} + \frac{(2z^2)^4}{5!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\ &= \dots - \frac{1}{2z} + \dots, \end{aligned}$$

dove abbiamo considerato solo il termine -1 , il cui coefficiente è il residuo, cioè

$$\text{Res}\left[\frac{1}{(z-1)\sinh(2z^2)}, 0\right] = -\frac{1}{2}.$$

Per il residuo con $j = 2$, usiamo lo stesso sviluppo, si ha

$$\begin{aligned} \text{Res}\left[\frac{z}{(z-1)\sinh(2z^2)}, 0\right] &= -\sum_{l=0}^{\infty} z^{l+1} \left(2z^2 + \frac{(2z^2)^3}{3!} + \frac{(2z^2)^5}{5!} + \mathcal{O}(z^{10}) \right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} z^{l-1} \left(1 + \frac{(2z^2)^2}{3!} + \frac{(2z^2)^4}{5!} + \mathcal{O}(z^8) \right)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \dots \right) \left[1 - \left(1 + \frac{(2z^2)^2}{3!} + \frac{(2z^2)^4}{5!} + \dots \right) + \left(1 + \frac{(2z^2)^2}{3!} + \frac{(2z^2)^4}{5!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\ &= \dots - \frac{1}{2z} + \dots, \end{aligned}$$

si ha lo stesso valore, cioè

$$\text{Res}\left[\frac{z}{(z-1)\sinh(2z^2)}, 0\right] = -\frac{1}{2}.$$

Ne consegue che

$$\begin{aligned} C_{-j} &= -\frac{\delta_{1j} + \delta_{2j}}{2} + \frac{1}{\sinh(2)} - \frac{(z_{-1}^-)^{j-2}}{4(z_{-1}^- - 1)} - \frac{(z_{-1}^+)^{j-2}}{4(z_{-1}^+ - 1)} - \frac{(z_1^-)^{j-2}}{4(z_1^- - 1)} - \frac{(z_1^+)^{j-2}}{4(z_1^+ - 1)} \\ &= -\frac{\delta_{1j} + \delta_{2j}}{2} + \frac{1}{\sinh(2)} - \frac{(-\sqrt{-i\pi/2})^{j-2}}{4(-\sqrt{-i\pi/2} - 1)} - \frac{(\sqrt{-i\pi/2})^{j-2}}{4(\sqrt{-i\pi/2} - 1)} - \frac{(-\sqrt{i\pi/2})^{j-2}}{4(-\sqrt{i\pi/2} - 1)} - \frac{(\sqrt{i\pi/2})^{j-2}}{4(\sqrt{i\pi/2} - 1)}. \end{aligned}$$

Usiamo per i poli $z_{\pm 1}^{\pm}$ le espressioni

$$\begin{aligned} z_{-1}^{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{-i\pi}{2}} = \pm \sqrt{\frac{e^{-i\pi/2}\pi}{2}} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ z_1^{\pm} &= \pm \sqrt{\frac{i\pi}{2}} = \pm \sqrt{\frac{e^{i\pi/2}\pi}{2}} = \pm e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \end{aligned}$$

e riscriviamo la somma dei loro residui

$$\begin{aligned}
& -\frac{(-\sqrt{-i\pi/2})^{j-2}}{4(-\sqrt{-i\pi/2}-1)} - \frac{(\sqrt{-i\pi/2})^{j-2}}{4(\sqrt{-i\pi/2}-1)} - \frac{(-\sqrt{i\pi/2})^{j-2}}{4(-\sqrt{i\pi/2}-1)} - \frac{(\sqrt{i\pi/2})^{j-2}}{4(\sqrt{i\pi/2}-1)} \\
& = \frac{\pi^{j/2-1}}{2^{j/2+1}} \left(\frac{(-e^{-i\pi/4})^{j-2}}{1+\sqrt{-i\pi/2}} + \frac{(e^{-i\pi/4})^{j-2}}{1-\sqrt{-i\pi/2}} + \frac{(-e^{i\pi/4})^{j-2}}{1+\sqrt{i\pi/2}} + \frac{(e^{i\pi/4})^{j-2}}{1-\sqrt{i\pi/2}} \right) \\
& = \frac{\pi^{j/2-1}}{2^{j/2+1}} \left(\frac{(-1)^j i e^{-ij\pi/4}}{1+\sqrt{-i\pi/2}} + \frac{i e^{-ij\pi/4}}{1-\sqrt{-i\pi/2}} + \frac{-(-1)^j i e^{ij\pi/4}}{1+\sqrt{i\pi/2}} + \frac{-i e^{ij\pi/4}}{1-\sqrt{i\pi/2}} \right) \\
& = \frac{\pi^{j/2-1}}{2^{j/2+1}} i \left(\frac{(-1)^j e^{-ij\pi/4}}{1+\sqrt{-i\pi/2}} + \frac{e^{-ij\pi/4}}{1-\sqrt{-i\pi/2}} - \frac{(-1)^j e^{ij\pi/4}}{1+\sqrt{i\pi/2}} - \frac{e^{ij\pi/4}}{1-\sqrt{i\pi/2}} \right) \\
& = \frac{\pi^{j/2-1}}{2^{j/2}} \left((-1)^j \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ij\pi/4}}{1+\sqrt{i\pi/2}} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ij\pi/4}}{1-\sqrt{i\pi/2}} \right) \right) \\
& = \frac{\pi^{j/2-1}}{2^{j/2}} \operatorname{Im} \left((-1)^j \frac{e^{ij\pi/4}}{1+\sqrt{i\pi/2}} + \frac{e^{ij\pi/4}}{1-\sqrt{i\pi/2}} \right) \\
& = \frac{\pi^{j/2-1}}{2^{j/2}} \operatorname{Im} \left(e^{ij\pi/4} \frac{(-1)^j (1-\sqrt{i\pi/2}) + 1 + \sqrt{i\pi/2}}{1-i\pi/2} \right).
\end{aligned}$$

Con $j = 2n$, quindi pari

$$\begin{aligned}
C_{-2n} &= -\frac{\delta_{1n}}{2} + \frac{1}{\sinh(2)} + \frac{\pi^{n-1}}{2^n} \operatorname{Im} \left(e^{in\pi/2} \frac{2}{1-i\pi/2} \right) \\
&= -\frac{\delta_{1n}}{2} + \frac{1}{\sinh(2)} + \frac{\pi^{n-1}}{2^n} \frac{1}{1+\pi^2/4} \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \pi \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right), \quad \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

per valori dispari $j = 2n-1$,

$$\begin{aligned}
C_{-2n+1} &= -\frac{\delta_{1n}}{2} + \frac{1}{\sinh(2)} + \frac{\pi^{n-3/2}}{2^{n-1/2}} \operatorname{Im} \left(e^{in\pi/2-i\pi/4} \frac{2\sqrt{\pi/2} e^{i\pi/4}}{1-i\pi/2} \right) \\
&= -\frac{\delta_{1n}}{2} + \frac{1}{\sinh(2)} + \frac{\pi^{n-1}}{2^n} \operatorname{Im} \left(e^{in\pi/2} \frac{2}{1-i\pi/2} \right) \\
&= -\frac{\delta_{1n}}{2} + \frac{1}{\sinh(2)} + \frac{\pi^{n-1}}{2^n} \frac{1}{1+\pi^2/4} \left(2 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{2} \right) + \pi \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

I coefficienti sono uguali due a due, cioè

$$C_{-1} = C_{-2}, \quad C_{-3} = C_{-4}, \quad \dots, \quad C_{-2n+1} = C_{-2n}, \quad \dots.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga in termini di un solo valore della funzione gamma di Eulero il valore dell'integrale di *cuori* (si vedano le **Curiosità** in calce al testo del primo problema)

$$\heartsuit = \int_{-1}^1 \sqrt{1-w^4} dw.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Dalla parità della funzione integranda, dimezziamo l'intervallo d'integrazione

$$\heartsuit = 2 \int_0^1 \sqrt{1-w^4} dw.$$

Facciamo il cambiamento di variabile $t = w^4$, quindi: $w = t^{1/4}$ e $dw = t^{-3/4} dt/4$ e l'integrale diventa

$$\heartsuit = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-3/4} \sqrt{1-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-3/4} (1-t)^{1/2} dt.$$

L'integrale così ottenuto è un integrale di Eulero di primo tipo, che potrebbe dare la funzione beta di Eulero, qualora fossero rispettate le condizioni di convergenza. In generale si ha la rappresentazione integrale

$$\beta(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du,$$

che converge se: $\text{Re}(a), \text{Re}(b) > 0$. L'integrale ottenuto può essere scritto in termini della rappresentazione convergente della funzione beta in $(a, b) = (1/4, 3/2)$, si ha

$$\heartsuit = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right).$$

La funzione beta di Eulero può essere espressa in termini di funzioni Gamma di Eulero come

$$\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

quindi, nel caso in esame si ha

$$\heartsuit = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/4)}.$$

Usiamo il valore noto della funzione gamma di Eulero: $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e l'equazione di ricorrenza $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, per scrivere: $\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2)/2 = \sqrt{\pi}/2$ e $\Gamma(7/4) = 3\Gamma(3/4)/4$, rispettivamente a numeratore e denominatore, si ha

$$\heartsuit = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1/4)/2}{3\Gamma(3/4)/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}.$$

Infine, consideriamo la formula di riflessione

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

che in $s = 1/4$ dà

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2}\pi.$$

Usiamo questa equazione per ottenere il valore di $\Gamma(3/4)$ in funzione di $\Gamma(1/4)$ come

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma(1/4)},$$

sostituendo nell'espressione dell'integrale si ha il risultato finale

$$\heartsuit = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \frac{\Gamma(1/4)^2}{\sqrt{2}\pi} = \frac{\Gamma(1/4)^2}{3\sqrt{2}\pi}.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione *bastoni* (si vedano le **Curiosità** in calce al testo del primo problema)

$$\clubsuit(x) = \frac{1}{x^5 + 1}.$$

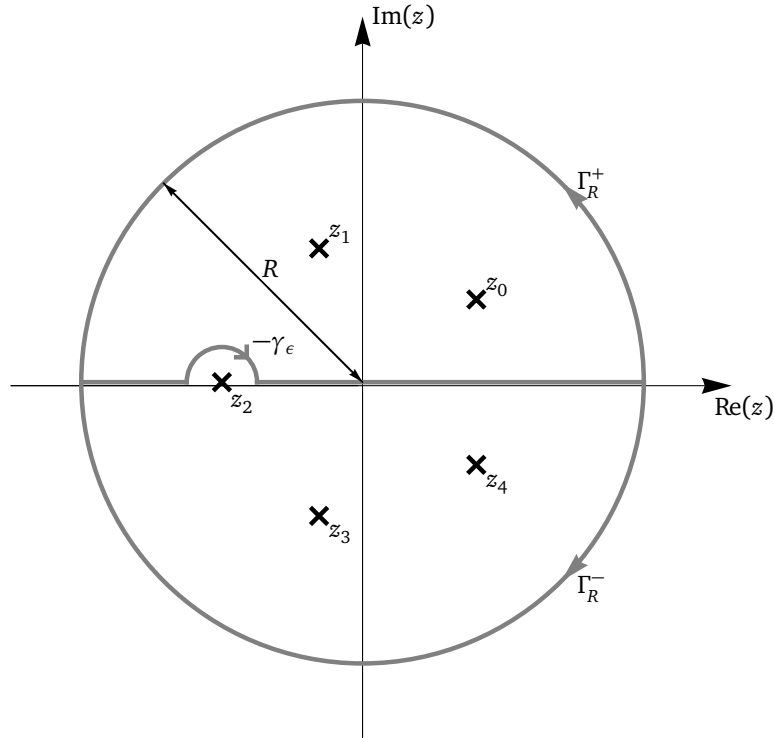
SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La trasformata di Fourier è

$$\mathcal{F}_k[\mathfrak{f}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^5 + 1} dx.$$

La funzione $\mathfrak{f}(x)$ ha cinque poli semplici nelle cinque radici quinte di -1 , sono gli elementi dell'insieme

$$\{z_j = e^{(2j+1)i\pi/5}\}_{j=0}^4.$$



Sono uno di essi è reale, si tratta del terzo zero $z_2 = -1$, rispetto ad esso l'integrale della trasformata di Fourier è calcolato in valore principale di Cauchy. Usiamo il lemma di Jordan con i percorsi chiusi Γ_R^+ e Γ_R^- , mostrai in figura e dati dalle unioni di due archi e due tratti rettilinei ciascuno,

$$\begin{aligned}\Gamma_R^+ &= [-R, -1 - \epsilon] \cup (-\gamma_\epsilon) \cup [-1 + \epsilon, R] \cup \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}, \\ \Gamma_R^- &= [-R, -1 - \epsilon] \cup (-\gamma_\epsilon) \cup [-1 + \epsilon, R] \cup \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [\pi, 2\pi]\},\end{aligned}$$

dove γ_ϵ è la semicirconferenza centrate in $z_2 = -1$ e avente raggio ϵ , cioè

$$\gamma_\epsilon = \{z : z = -1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}.$$

Per $R > 1$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$, si hanno i numeri di avvolgimento

$$n(z_{0,1}, \Gamma_R^+) = n(z_{2,3,4}, \Gamma_R^-) = 1, \quad n(z_{0,1}, \Gamma_R^-) = n(z_{2,3,4}, \Gamma_R^+) = 0.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier usando il lemma di Jordan unitamente al teorema dei residui nei limiti $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[\text{🍌}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^5 + 1} dx = i\sqrt{2\pi} \left(\theta(-k) \sum_{j=0}^1 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] - \theta(k) \sum_{j=2}^3 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] \right) \\
&\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\gamma_\epsilon}^{\gamma_\epsilon} \frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1} dz \\
&= i\sqrt{2\pi} \left(\theta(-k) \sum_{j=0}^1 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] - \theta(k) \sum_{j=2}^3 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] \right) \\
&\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_\epsilon}^{\gamma_\epsilon} \frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1} dz \\
&= i\sqrt{2\pi} \left(\theta(-k) \sum_{j=0}^1 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] - \theta(k) \sum_{j=2}^3 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] \right) \\
&\quad + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_2 = -1 \right] \\
&= i\sqrt{2\pi} \left(\theta(-k) \sum_{j=0}^1 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] - \theta(k) \sum_{j=1}^3 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] \right) \\
&\quad + i\sqrt{2\pi} \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_2 = -1 \right] \left(\frac{1}{2} - \theta(k) \right) \\
&= i\sqrt{2\pi} \left(\theta(-k) \sum_{j=0}^1 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] - \theta(k) \sum_{j=1}^3 \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] \right) \\
&\quad - i\sqrt{2\pi} \text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_2 = -1 \right] \frac{\text{Segno}(k)}{2}.
\end{aligned}$$

Calcoliamo i residui dei cinque poli semplici

$$\text{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{z^5 + 1}, z_j \right] = \frac{e^{-ikz_j}}{5z_j^4} = -\frac{z_j e^{-ikz_j}}{5}, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, 4\}.$$

Quattro dei poli, quelli non reali sono due coppie di complessi coniugati, si hanno: $z_4^* = z_0$ e $z_3^* = z_1$. Alla luce di questo risultato, usando le rappresentazioni cartesiane: $z_j = x_j + iy_j$, con $x_j = \text{Re}(z_j)$, $y_j = \text{Im}(z_j)$ e $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, riscriviamo la trasformata di Fourier come

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[\text{🍌}] &= \frac{i\sqrt{2\pi}}{5} \left[\theta(k) (z_3 e^{-ikz_3} + z_4 e^{-ikz_4}) - \theta(-k) (z_0 e^{-ikz_0} + z_1 e^{-ikz_1}) - \frac{e^{ik} \text{Segno}(k)}{2} \right] \\
&= \frac{i\sqrt{2\pi}}{5} \left[\theta(k) ((x_1 - iy_1) e^{-ikx_1 - ky_1} + (x_0 - iy_0) e^{-ikx_0 - ky_0}) \right. \\
&\quad \left. - \theta(-k) ((x_0 + iy_0) e^{-ikx_0 + ky_0} + (x_1 + iy_1) e^{-ikx_1 + ky_1}) - \frac{e^{ik} \text{Segno}(k)}{2} \right] \\
&= \frac{i\sqrt{2\pi}}{5} \left[x_0 e^{-ikx_0} (\theta(k) e^{-ky_0} - \theta(-k) e^{ky_0}) + x_1 e^{-ikx_1} (\theta(k) e^{-ky_1} - \theta(-k) e^{ky_1}) \right. \\
&\quad \left. - iy_0 e^{-ikx_0} (\theta(k) e^{-ky_0} + \theta(-k) e^{ky_0}) - iy_1 e^{-ikx_1} (\theta(k) e^{-ky_1} + \theta(-k) e^{ky_1}) - \frac{e^{ik} \text{Segno}(k)}{2} \right] \\
&= \frac{i\sqrt{2\pi}}{5} \left(x_0 e^{-ikx_0 - |k|y_0} \text{Segno}[k] + x_1 e^{-ikx_1 - |k|y_1} \text{Segno}[k] - iy_0 e^{-ikx_0 - |k|y_0} - iy_1 e^{-ikx_1 - |k|y_1} - \frac{e^{ik} \text{Segno}(k)}{2} \right) \\
&= \frac{i\sqrt{2\pi}}{5} \left(e^{-ikx_0 - |k|y_0} (x_0 \text{Segno}[k] - iy_0) + e^{-ikx_1 - |k|y_1} (x_1 \text{Segno}[k] - iy_1) - \frac{e^{ik} \text{Segno}(k)}{2} \right).
\end{aligned}$$

Usiamo, infine, i valori noti delle parti reali e immaginarie dei poli z_0 e z_1 ,

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right), \quad y_0 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right), \quad x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right), \quad y_1 = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

per scrivere la trasformata di Fourier in funzione dei coseni e della tangenti degli angoli $\pi/5$ e $3\pi/5$ come

$$\mathcal{F}_k[\text{fig}] = \frac{i\sqrt{2\pi}}{5} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \exp\left[-ik \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \left(1 - i \operatorname{Segno}(k) \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\right] \left(\operatorname{Segno}[k] - i \tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \exp\left[-ik \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \left(1 - i \operatorname{Segno}(k) \tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)\right] \left(\operatorname{Segno}[k] - i \tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right) - \frac{e^{ik} \operatorname{Segno}(k)}{2} \right\}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri che la serie formale *vortice* (si vedano le **Curiosità** in calce al testo del primo problema)

$$\text{fig}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\pi kx/R}}{R}$$

rappresenta la distribuzione delta di Dirac $\delta(x)$ nell'intervallo reale e simmetrico $[-R/2, R/2]$ con $R \in (0, \infty)$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Partiamo dalla serie trigonometrica di Fourier, che, per la generica funzione $f(x) \in L^2(-\pi, \pi)$, è

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

con i coefficienti

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Se ponessimo $f(x) = \delta(x)$, ovvero, usassimo una distribuzione in luogo della funzione a quadrato sommabile, avremmo i coefficienti

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi}, \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) \operatorname{sen}(kx) dx = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Inoltre, avendo per la delta di Dirac un'identità formale, possiamo usare il simbolo "=" anziché quello di Hurwitz e la serie diventa

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx).$$

Usando la parità della funzione coseno e includendo il termine con $k = 0$ nella serie, si ha

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \cos(kx) \right) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \cos(kx) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \cos(kx) - 1 \right),$$

da cui

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(kx).$$

Scriviamo la funzione coseno con la formula di Eulero e nella seconda serie facciamo il cambiamento di indice $k' = -k$, avremo

$$\delta(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{ikx} + e^{-ikx}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} e^{ik'x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx},$$

ricordiamo che questa serie è definita per ogni $x \in [-\pi, \pi]$, mentre l'intervallo di definizione della rappresentazione del problema era il generico intervallo simmetrico $[-R/2, R/2]$, con $R \in (0, \infty)$. Per ricondurci a un tale intervallo, facciamo il cambiamento di variabile $x \rightarrow x' = xR/(2\pi)$, quindi: $x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow x' \in [-R/2, R/2]$. Facciamo la sostituzione $x = 2\pi x'/R$ dell'identità formale precedente, otteniamo

$$\delta\left(\frac{2\pi}{R}x'\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kx'/R}.$$

Usiamo, inoltre, la proprietà della distribuzione delta di Dirac, per cui, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|},$$

si ha

$$\delta\left(\frac{2\pi}{R}x'\right) = \delta(x') \frac{R}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kx'/R}$$

e dall'ultima identità segue

$$\delta(x') = \frac{1}{R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi kx'/R} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\pi kx'/R}}{R} = \textcircled{R}(x').$$

Riportando l'equazione nella variabile x si arriva alla rappresentazione richiesta, cioè

$$\textcircled{R}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i\pi kx'/R}}{R} = \delta(x).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore hermitiano $\widehat{ghinda}$ (si vedano le **Curiosità** in calce al testo del primo problema) è definito nello spazio di Hilbert a tre dimensioni W_3 e, rispetto alla base ortonormale $\{|w_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset W_3$, è rappresentato dalla matrice 3×3 , cioè

$$\widehat{ghinda} \stackrel{w}{\longleftrightarrow} \textcircled{ghinda} = \begin{pmatrix} \pi & \pi & -i\pi \\ \pi & \pi & i\pi \\ i\pi & -i\pi & \pi \end{pmatrix}.$$

Si determinino lo spettro discreto dell'operatore e i vettori 3×1 che ne rappresentano gli autovettori rispetto alla base ortonormale data. Inoltre, partendo dall'operatore unitario $\hat{U} = \exp\left(i\widehat{ghinda}\right)$, si dimostri che anche gli operatori $\hat{U}_n = i^n \hat{U}$, definiti $\forall n \in \mathbb{N}$, sono unitari e si determinino gli operatori hermitiani $\widehat{ghinda}_n$, tali che

$$\hat{U}_n = \exp\left(i\widehat{ghinda}_n\right).$$

Infine, si ottengono le matrici $\textcircled{ghinda}_n$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dove $\textcircled{ghinda}_0 = \textcircled{ghinda}$, che rappresentano gli operatori hermitiani $\widehat{ghinda}_n$, rispetto alla base ortonormale data, cioè

$$\widehat{ghinda}_n \stackrel{w}{\longleftrightarrow} \textcircled{ghinda}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Risolviamo l'equazione caratteristica dell'operatore $\hat{H}$ per ottenerne lo spettro discreto, ovvero l'insieme degli autovalori. L'equazione secolare è

$$\begin{aligned} \det(\hat{H} - I\gamma) &= 0 \\ \begin{pmatrix} \pi - \gamma & \pi & -i\pi \\ \pi & \pi - \gamma & i\pi \\ i\pi & -i\pi & \pi - \gamma \end{pmatrix} &= 0 \\ (\pi - \gamma)((\pi - \gamma)^2 - \pi^2) - \pi(\pi(\pi - \gamma) + \pi^2) - i\pi(-i\pi^2 - i\pi(\pi - \gamma)) &= 0 \\ (\pi - \gamma)\gamma(\gamma - 2\pi) + 2\pi^2(\gamma - 2\pi) + &= 0 \\ (\gamma - 2\pi)(-\gamma^2 + \gamma\pi + 2\pi^2) &= 0, \end{aligned}$$

ci sono due autovalori distinti

$$\gamma_1 = -\pi, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 2\pi,$$

il primo, $\gamma_1 = -\pi$ è non degenere, mentre $\gamma_2 = \gamma_3 = 2\pi$ ha ordine di degenerazione 2. Le componenti contro-varianti dei vettori che rappresentano gli autovettori sono le soluzioni dei tre sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} \pi - \gamma_j & \pi & -i\pi \\ \pi & \pi - \gamma_j & i\pi \\ i\pi & -i\pi & \pi - \gamma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_j^1 \\ g_j^2 \\ g_j^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

dove g_j^k , con $k, j \in \{1, 2, 3\}$, è la k -esima componente contro-variante del j -esimo vettore.

Consideriamo il primo autovettore, che ha autovalore non degenere $\gamma_1 = -\pi$ e poniamo $g_1^1 = g$, per la seconda e terza componente contro-variante, si hanno i sistemi 2×2

$$\begin{cases} 2\pi g_1^2 + i\pi g_1^3 = -\pi g \\ -i\pi g_1^2 + 2\pi g_1^3 = -i\pi g \end{cases},$$

le soluzioni sono

$$\begin{aligned} g_1^2 &= g \frac{\det \begin{pmatrix} -\pi & i\pi \\ -i\pi & 2\pi \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2\pi & i\pi \\ -i\pi & 2\pi \end{pmatrix}} = g \frac{-3\pi^2}{3\pi^2} = -g, \\ g_1^3 &= g \frac{\det \begin{pmatrix} 2\pi & -\pi \\ -i\pi & -i\pi \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2\pi & i\pi \\ -i\pi & 2\pi \end{pmatrix}} = g \frac{-3i\pi^2}{3\pi^2} = -gi. \end{aligned}$$

Segue che il primo vettore normalizzato all'unità è

$$g_1 = g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Nei casi del secondo e terzo autovettore, relativi all'autovalore degenere $\gamma_2 = \gamma_3 = 2\pi$, il sistema completo è

$$\begin{cases} -\pi g_{2,3}^1 + \pi g_{2,3}^2 - i\pi g_{2,3}^3 = 0 \\ \pi g_{2,3}^1 - \pi g_{2,3}^2 + i\pi g_{2,3}^3 = 0 \\ i\pi g_{2,3}^1 - i\pi g_{2,3}^2 - \pi g_{2,3}^3 = 0 \end{cases},$$

le tre equazioni sono equivalenti, si ha cioè l'unica condizione

$$g_{2,3}^1 - g_{2,3}^2 + ig_{2,3}^3 = 0.$$

Scegliamo per convenienza due vettori ortogonali, ponendo, ad esempio: $g_2^1 = g$ e $g_2^3 = 0$, si ha $g_2^2 = g$, quindi

$$g_2 = g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il terzo vettore lo otteniamo ponendo $g_3^1 = g$ e $g_3^2 = -1$, per avere l'ortogonalità con g_2 , allora, dall'unica equazione si ha $g_3^3 = 2ig$, cioè

$$g_3 = g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria che diagonalizza la matrice $\hat{U}$ è

$$W = \begin{pmatrix} g_1^1 & g_2^1 & g_3^1 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 \\ g_1^3 & g_2^3 & g_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{3} & 0 & 2i/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

è tale che

$$\hat{U}_d = W^\dagger \hat{U} W = \text{diag}(-\pi, 2\pi, 2\pi).$$

Per il teorema ottico, la matrice unitaria U e anche le matrici U_n , con $n \in \mathbb{N}$, poiché commutano con la matrice $\hat{U}$, hanno gli stessi autovettori, sono diagonalizzate dalla stessa matrice unitaria W . Gli autovalori dell'operatore $\hat{U} = \exp(i\hat{U})$ sono gli elementi dell'insieme

$$\{v_j = e^{i\gamma_j}\}_{j=1}^3.$$

Segue che la versione diagonale della matrice U è

$$U_d = \text{diag}(e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}, e^{i\gamma_3}) = \text{diag}(e^{-i\pi}, e^{2i\pi}, e^{2i\pi}) = \text{diag}(-1, 1, 1) = W^\dagger U W,$$

invertendo la relazione si ha

$$\begin{aligned} U = W U_d W^\dagger &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{3} & 0 & 2i/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2i/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -i/\sqrt{3} & 0 & 2i/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2i/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2i/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2i/3 \\ 2i/3 & -2i/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2i \\ 2 & 1 & 2i \\ 2i & -2i & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostriamo che gli operatori $\hat{U}_n = i^n \hat{U}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sono unitari, essendo l'operatore $\hat{U}$ unitario, calcoliamo i prodotti

$$\begin{aligned} \hat{U}_n \hat{U}_n^\dagger &= i^n \hat{U} (i^n \hat{U})^\dagger = i^n \hat{U} (-i)^n \hat{U}^\dagger = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I}, \\ \hat{U}_n^\dagger \hat{U}_n &= (i^n \hat{U})^\dagger i^n \hat{U} = (-i)^n \hat{U}^\dagger i^n \hat{U} = \hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

gli operatori $\hat{U}_n$ sono quindi unitari. Gli operatori $\hat{\mathbb{U}}_n$, tali che

$$\hat{U}_n = \exp\left(i \hat{\mathbb{U}}_n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si ottengono dalle definizione $\hat{U}_n = i^n \hat{U}$ e usando la rappresentazione polare dell'unità immaginaria $i = e^{i\pi/2}$,

$$\hat{U}_n = i^n \hat{U} = i^n \exp\left(i \hat{\mathbb{U}}\right) = e^{in\pi/2} \exp\left(i \hat{\mathbb{U}}\right) = \exp\left(i \left(\frac{n\pi}{2} \hat{I} + \hat{\mathbb{U}}\right)\right) = \exp\left(i \hat{\mathbb{U}}_n\right),$$

dall'ultima identità segue la definizione degli operatori $\hat{\mathbb{U}}_n$

$$\hat{\mathbb{U}}_n = \frac{n\pi}{2} \hat{I} + \hat{\mathbb{U}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le matrici che rappresentano questi operatori sono

$$\hat{\mathbb{U}}_n \stackrel{w}{\leftrightarrow} \mathbb{U}_n = \frac{n\pi}{2} I + \mathbb{U},$$

ovvero si ottengono sommando alla matrice $\mathbb{U}$ la matrice identità moltiplica per $n\pi/2$, cioè

$$\mathbb{U}_n = \pi \begin{pmatrix} n/2 + 1 & 1 & -i \\ 1 & n/2 + 1 & i \\ i & -i & n/2 + 1 \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$