Metodi Matematici per la Fisica

Terzo appello invernale - 20 febbraio 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si dimostri l'identità

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\cosh(k)} = \pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\operatorname{senh}((j+1/2)\pi^2)} \,.$$

Soluzione del primo problema

Consideriamo la prima serie e usiamo il metodo dei residui per la somma di serie a segni alterni. A tal fine, definiamo la funzione

$$f(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{\cosh(z)} \,,$$

che ha poli semplici sia in corrispondenza dei numeri relativi, ovvero per $z = k$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, dovuti alla funzione seno a denominatore, che nei punti dell'insieme $\{(j+1/2)i\pi\}_{j\in\mathbb{Z}}$, zeri semplici della funzione coseno iperbolico, anch'essa a denominatore della funzione $f(z)$. Integriamo la stessa funzione sulle circonferenze centrate nell'origine con raggi semi-interi $(n+1/2)$, per $n \in \mathbb{N}$ e usiamo il teorema dei residui, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{\cosh(z)} dz = & \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{\cosh(z)}, k\right] \\ & + \sum_{j=-\operatorname{Int}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{1}{2}\right)}^{\operatorname{Int}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{1}{2}\right)} \operatorname{Res}\left[\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{\cosh(z)}, \left(j+\frac{1}{2}\right) i\pi\right].\end{aligned}$$

I due residui generici k-esimo e j-esimo, $\forall\,(k,j) \in \mathbb{Z}^2$, sono rispettivamente

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{\cosh(z)}, k\right] = \frac{(-1)^k}{\cosh(k)} \,,$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{\cosh(z)}, \left(j+\frac{1}{2}\right) i\pi\right] = \frac{i\pi(-1)^j}{\operatorname{sen}\left(i(j+1/2)\pi^2\right)} = \frac{i\pi(-1)^j}{-i\operatorname{senh}\left((j+1/2)\pi^2\right)} = \frac{-\pi(-1)^j}{\operatorname{senh}\left(\pi^2(j+1/2)\right)} \,.$$

Nel limite $n \to \infty$, l'integrale tende a zero in virtù del lemma di integrazione sugli archi di raggio divergente, ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=n+1/2} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \frac{1}{\cosh(z)} dz = 0 \,,$$

inoltre, divergono i limiti di entrambe le somme. Per la prima la divergenza è diretta, per la seconda si ha

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Int}\left(\frac{n}{\pi} - \frac{1}{2}\right) = \infty \,.$$

Eseguendo il limite dell'espressione dell'integrale come somma dei residui, si ottiene che la somma delle due serie è nulla, cioè

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=n+1/2}\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\frac{1}{\cosh(z)}dz=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\cosh(k)}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{-\pi(-1)^j}{\operatorname{senh}\left(\pi^2(j+1/2)\right)},$$

quindi l'una è l'opposta dell'altra. Si ottiene e dimostra così l'identità richiesta

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\cosh(k)}=\pi\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\operatorname{senh}\left(\pi^2(j+1/2)\right)}.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\mapsto=\int_0^r\sqrt{\frac{r-x}{x}}\frac{dx}{x^3+1},$$

con $r\in[1,\infty)$.

Soluzione del secondo problema

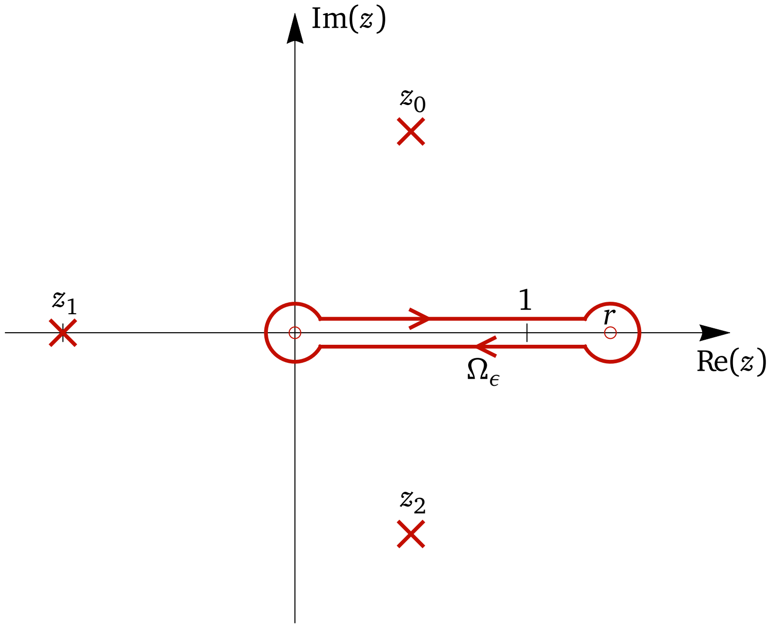
Primo metodo

La funzione $\sqrt{(r-z)/z}$ è polidroma e ha un punto di diramazione nell'origine $z=0$ e uno in $z=r$, consideriamo quindi il percorso d'integrazione Ω_ϵ, mostrato in figura in colore rosso mattone, dato dall'unione di due archi e due tratti rettilinei, cioè

$$\Omega_\epsilon=-\omega_\epsilon^0\cup\left[\epsilon+i\epsilon^2,r-\epsilon+i\epsilon^2\right]\cup\left(-\omega_\epsilon^r\right)\cup\left[r-\epsilon-i\epsilon^2,\epsilon-i\epsilon^2\right].$$

dove

$$\omega_\epsilon^0=\left\{z:z=\epsilon e^{i\theta},\theta\in\left[\epsilon^2,2\pi-\epsilon^2\right]\right\},\qquad \omega_\epsilon^r=\left\{z:z=r+\epsilon e^{i\theta},\theta\in\left[-\pi+\epsilon^2,\pi-\epsilon^2\right]\right\}.$$



L'integrale sul percorso Ω_ϵ può essere espresso cone somma dei contributi relativi agli archi e ai tratti rettilinei che lo costituiscono e, usando il teorema dei residui, come somma dei residui. La funzione integranda solo tre singolarità, sono i poli semplici coincidenti con le tre radici terze di -1, cioè: $z_j = e^{(2j+1)i\pi/3}$, con $j = 0, 1, 3$, indicati in figura dai simboli di "×" di colore rosso mattone. All'infinito la stessa funzione è regolare, infatti

$$\lim_{z\to\infty} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{1}{z^3+1} = 0\,.$$

Ne consegue

$$\begin{aligned}
\oint_{\Omega_\epsilon} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{dz}{z^3+1} &= -\int_{\omega_\epsilon^0} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{dz}{z^3+1} - \int_{\omega_\epsilon^r} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{dz}{z^3+1} \\
&\quad + \int_\epsilon^{r-\epsilon} \sqrt{\frac{r-x+i\epsilon}{x+i\epsilon}} \frac{dx}{x^3+1} - \int_\epsilon^{r-\epsilon} \sqrt{\frac{r-x-i\epsilon}{x-i\epsilon}} \frac{dx}{x^3+1} \\
&= 2i\pi \sum_{j=0}^{2} \mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{1}{z^3+1}, z_j\right].
\end{aligned}$$

La seconda identità vale anche nel limite $\epsilon \to 0^+$, cioè

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\int_{\omega_\epsilon^0} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{dz}{z^3+1} - \int_{\omega_\epsilon^r} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{dz}{z^3+1}\right. \\
&\left.+ \int_\epsilon^{r-\epsilon} \sqrt{\frac{r-x+i\epsilon}{x+i\epsilon}} \frac{dx}{x^3+1} - \int_\epsilon^{r-\epsilon} \sqrt{\frac{r-x-i\epsilon}{x-i\epsilon}} \frac{dx}{x^3+1}\right) = 2i\pi \sum_{j=0}^{2} \mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{1}{z^3+1}, z_j\right].
\end{aligned}$$

I limiti degli integrali sugli archi sono nulli. Usiamo il lemma d'integrazione sugli archi infinitesimi, dimostrando che la funzione integranda moltiplicata z e per $(z-r)$ tende uniformemente a zero rispettivamente sugli archi ω_ϵ^0 e ω_ϵ^r nel limite $\epsilon \to 0^+$. Infatti si hanno i limiti

$$\begin{aligned}
&\text{su } \omega_\epsilon^0: \quad \lim_{\epsilon\to 0^+}\left|\sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{z}{z^3+1}\right| = \lim_{\epsilon\to 0^+} \sqrt{|r-z|}\frac{\epsilon^{1/2}}{|z^3+1|} \le \lim_{\epsilon\to 0^+} \sqrt{r+\epsilon}\frac{\epsilon^{1/2}}{1-\epsilon^3} = 0\,, \\
&\text{su } \omega_\epsilon^r: \quad \lim_{\epsilon\to 0^+}\left|\sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{z-r}{z^3+1}\right| = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{|r+\epsilon e^{i\theta}|}} \frac{\epsilon^{3/2}}{\left|\left(r+\epsilon e^{i\theta}\right)^3+1\right|} \le \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{|r-\epsilon|}} \frac{\epsilon^{3/2}}{\left|\left(r+\epsilon e^{i\theta}\right)^3+1\right|} = 0\,.
\end{aligned}$$

Per ciò che concerne gli integrali sui tratti rettilinei, scriviamo la funzione argomento della radice quadrate in questo modo

$$\frac{r-z}{z} = \frac{\rho_1(z)}{\rho_2(z)}\,, \qquad \rho_1(z) = |r-z|e^{i\theta_1}\,, \qquad \rho_2(z) = z = |z|e^{i\theta_2}\,,$$

entrambe con il tagli in avanti, ovvero le fasi variano negli insiemi: $\theta_1 \in (-\pi, \pi)$ e $\theta_2 \in (0, 2\pi)$, cosicché il tagli di $\rho_1(z)$ e di $\rho_2(z)$ sono rispettivamente le semirette: (r, ∞) e $(0, \infty)$. Consideriamo il comportamento della funzione argomento della radice quadrata sui tratti rettilinei sopra e sotto l'intervallo d'integrazione. Sopra, ovvero per $z = x + i\epsilon$, con $x \in [0, r]$ si hanno i valori limite delle fasi: $\theta_1 \to 0^-$ e $\theta_2 \to 0^+$, quindi

$$\sqrt{\frac{r-z}{z}} = \sqrt{\frac{\rho_1(z)}{\rho_2(z)}} = \sqrt{\frac{r-x}{x}}e^{i(\theta_1-\theta_2)/2} = \sqrt{\frac{r-x}{x}}e^{i(0-0)/2} = \sqrt{\frac{r-x}{x}}\,,$$

Sotto, cioè con $z = x + i\epsilon$, $x \in [0, r]$, i valori limite delle fasi sono: $\theta_1 \to 0^+$ e $\theta_2 \to 2\pi^-$, ne consegue

$$\sqrt{\frac{r-z}{z}} = \sqrt{\frac{\rho_1(z)}{\rho_2(z)}} = \sqrt{\frac{r-x}{x}}e^{i(\theta_1-\theta_2)/2} = \sqrt{\frac{r-x}{x}}e^{i(0-2\pi)/2} = \sqrt{\frac{r-x}{x}}e^{-i\pi} = -\sqrt{\frac{r-x}{x}}\,.$$

Alla luce di questi risultati il limite per $\epsilon \to 0^+$ dell'integrale su Ω_ϵ vale

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+}\oint_{\Omega_\epsilon} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{dz}{z^3+1} &= -\underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\omega_\epsilon^0} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{dz}{z^3+1}}_{=0} - \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\omega_\epsilon^r} \sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{dz}{z^3+1}}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^{r-\epsilon} \sqrt{\frac{r-x+i\epsilon}{x+i\epsilon}} \frac{dx}{x^3+1}}_{=\vdash} - \underbrace{\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^{r-\epsilon} \sqrt{\frac{r-x-i\epsilon}{x-i\epsilon}} \frac{dx}{x^3+1}}_{=-\vdash} \\
&= 2i\pi \sum_{j=0}^{2} \mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}} \frac{1}{z^3+1}, z_j\right],
\end{aligned}$$

l'ultima identità esprime l'integrale cercato come $i\pi$ volte la somma dei residui, cioè

$$\mapsto = i\pi \sum_{j=0}^{2} \mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, z_j\right].$$

I residui vanno calcolati usando coerentemente le fasi delle funzioni. Nel polo reale $z_1 = -1$ si ha

$$\mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, -1\right] = \lim_{z\to-1}\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}(z+1) = \lim_{z\to-1}\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3}\sqrt{r+1}e^{i(\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2)/2},$$

dove $\tilde{\theta}_1$ e $\tilde{\theta}_2$ sono i valori delle fasi della funzioni $\rho_1(z)$ e $\rho_2(z)$ quando z tende a -1. Poiché entrambi i tagli sono in avanti, si avranno: $\tilde{\theta}_1 = 0$ e $\tilde{\theta}_2 = \pi$, quindi

$$\mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, -1\right] = -\frac{i}{3}\sqrt{r+1}.$$

I residui nei poli $z_0 = e^{i\pi/3}$ e $z_2 = e^{5i\pi/3}$, l'uno complesso coniugato dell'altro, sono

$$\mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, e^{i\pi/3}\right] = \sqrt{\frac{r-e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/3}}}\frac{1}{3e^{2i\pi/3}} = \sqrt{\left|r-e^{i\pi/3}\right|}\frac{e^{i(\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2)/2}}{3e^{2i\pi/3}},$$

dove, come nel caso precedente, $\tilde{\theta}_1$ e $\tilde{\theta}_2$ sono i valori delle fasi della funzioni $\rho_1(z)$ e $\rho_2(z)$ quando z tende a $e^{i\pi/3}$. Ricordiamo le determinazioni scelte: $\theta_1 \in (-\pi,\pi)$ e $\theta_2 \in (0,2\pi)$, quindi per $\tilde{\theta}_2$, la fase della funzione a denominatore, la scelta è univoca, cioè: $\tilde{\theta}_2 = i\pi/3$. Per $\tilde{\theta}_1$, la fase del numero $r - e^{i\pi/3}$, si ha

$$\tilde{\theta}_1 = \arg\left(r-e^{i\pi/3}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(r-e^{i\pi/3}\right)}{\mathrm{Re}\left(r-e^{i\pi/3}\right)}\right) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{r-1/2}\right) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{2r-1}\right).$$

A questo punto è necessario scegliere la determinazione, infatti la fase $\tilde{\theta}_1$, essendo la parte immaginaria negativa e $r > 1$, appartiene al quarto quadrante, infatti $r > 1/2$ la parte reale è strettamente positiva. Seguendo la scelta fatta per la determinazione, definiamo l'angolo

$$\delta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2r-1}\right) \in (0,\pi/2),$$

quindi

$$\tilde{\theta}_1 = -\delta \in (-\pi/2, 0) \subset (-\pi,\pi),$$

è la fase corretta, nel senso che è definita correntemente con la scelta della determinazione. In particolare l'angolo δ varia nell'intervallo $(0,\pi/3]$, infatti vale $\pi/3$ per $r=1$, mentre al divergere di r a infinito tende a zero, decrescendo monotonamente.
Il residuo è

$$\mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, e^{i\pi/3}\right] = \frac{e^{i(-\delta/2-\pi/6-2\pi/3)}}{3}\left(r^2-r+1\right)^{1/4} = \frac{e^{i(-\delta/2-5\pi/6)}}{3}\left(r^2-r+1\right)^{1/4}.$$

Infine, nel caso del residuo in $z_2 = e^{5i\pi/3}$ si ha

$$\mathrm{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, e^{5i\pi/3}\right] = \sqrt{\frac{r-e^{5i\pi/3}}{e^{5i\pi/3}}}\frac{1}{3e^{10i\pi/3}} = \sqrt{\left|r-e^{5i\pi/3}\right|}\frac{e^{i(\tilde{\theta}_1-\tilde{\theta}_2)/2}}{3e^{-2i\pi/3}},$$

dove si è usate l'identità $e^{10i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$ e, come nei casi precedenti, $\tilde{\theta}_1$ e $\tilde{\theta}_2$ sono i valori delle fasi della funzioni $\rho_1(z)$ e $\rho_2(z)$ quando z tende a $e^{5i\pi/3}$. La scelta $\tilde{\theta}_2 = 5i\pi/3$ è vincolata dalla determinazione $(0,2\pi)$ di $theta_2$. Per $\tilde{\theta}_1$ vale il ragionamento di prima, cioè

$$\tilde{\theta}_1 = \arg\left(r-e^{5i\pi/3}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(r-e^{5i\pi/3}\right)}{\mathrm{Re}\left(r-e^{5i\pi/3}\right)}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}/2}{r-1/2}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2r-1}\right) = \delta \in (0,\pi/2).$$

In questo non c'è ambiguità, $\tilde{\theta}_1$ appartiene al primo quadrante poiché la sia la parte immaginaria che quella reale sono strettamente positive. Perciò il residuo vale

$$\operatorname{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, e^{5i\pi/3}\right] = \frac{e^{i(\delta/2-5\pi/6+2\pi/3)}}{3}\left(r^2-r+1\right)^{1/4} = \frac{e^{i(\delta/2-\pi/6)}}{3}\left(r^2-r+1\right)^{1/4}.$$

La somma dei questi due residui è

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, e^{i\pi/3}\right] + \operatorname{Res}\left[\sqrt{\frac{r-z}{z}}\frac{1}{z^3+1}, e^{5i\pi/3}\right] &= \frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3}\left(e^{i(-\delta/2-5\pi/6)} + e^{i(\delta/2-\pi/6)}\right) \\ &= \frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3} e^{-i\pi/2}\left(e^{i(-\delta/2-\pi/3)} + e^{i(\delta/2+\pi/3)}\right) \\ &= -2i\frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3}\cos(\delta/2+\pi/3).\end{aligned}$$

L'integrale richiesto è

$$\mapsto = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{r+1} + 2\left(r^2-r+1\right)^{1/4}\cos(\delta/2+\pi/3)\right).$$

Possiamo ulteriormente semplificare questa espressione usando le formule di bisezione

$$\cos\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\delta+2\pi/3)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\delta)/2-\sqrt{3}\operatorname{sen}(\delta)/2}{2}}.$$

L'angolo $(\delta/2+\pi/3)$ appartiene al primo quadrante e le funzioni seno e coseno sono non negative, infatti

$$\delta \in (0,\pi/3] \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6} \in (\pi/3,\pi/2] \quad \Rightarrow \quad \cos(\beta/2),\ \operatorname{sen}(\beta/2) \geq 0.$$

Ne consegue che

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\beta)/2-\sqrt{3}\operatorname{sen}(\beta)/2}{2}}.$$

Le funzioni coseno e seno dell'angolo β si ottengono rispettivamente dal denominatore e numeratore normalizzati dell'argomento dell'arcotangente, infatti $\beta = \arctan(r\sqrt{3}/(-2+r))$, si hanno

$$\beta = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}\right) = \arctan\left(\frac{r\sqrt{3}}{-2+r}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\operatorname{sen}(\beta) &= \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{(-2+r)^2+3r^2}} = \frac{r\sqrt{3}}{2\sqrt{r^2-r+1}} \\ \cos(\beta) &= \frac{-2+r}{\sqrt{(-2+r)^2+3r^2}} = \frac{-2+r}{2\sqrt{r^2-r+1}}\end{aligned},$$

da cui

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2\sqrt{r^2-r+1}-1+r/2-3r/2}}{2\left(r^2-r+1\right)^{1/4}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{r^2-r+1}-1-r}}{2\left(r^2-r+1\right)^{1/4}},$$

in definitiva

$$\mapsto = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{r+1} + \sqrt{2\sqrt{r^2-r+1}-r-1}\right).$$

Secondo metodo

Facciamo la sostituzione $u = (r-x)/x$, quindi la variabile x e il differenziale sono

$$x = \frac{r}{u+1}, \qquad dx = -\frac{r}{(u+1)^2}du,$$

mentre i limiti d'integrazione diventano

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{r-x}{x} = \infty\,, \qquad \lim_{x\to r^-} \frac{r-x}{x} = 0^+\,.$$

L'integrale nella variabile u, invertendo gli estremi e cambiando segno, è

$$\mapsto = r\int_0^\infty \sqrt{u}\frac{1}{r^3/(u+1)^3+1}\frac{du}{(u+1)^2} = r\int_0^\infty \sqrt{u}\frac{u+1}{(u+1)^3+r^3}du = r\int_0^\infty \sqrt{u}Q(u)\,du\,,$$

dove $Q(u)$ è la funzione razionale

$$Q(u) = \frac{u+1}{(u+1)^3+r^3}\,.$$

Questa funzione ha i tre poli semplici

$$u_j = -1 + re^{(2j+1)i\pi/3}\,, \qquad j = 0,1,2\,,$$

non appartenenti al semi-asse reale positivo, che è il percorso di integrazione.
Possiamo applicare la formula per l'integrazione delle funzioni polidrome, gli integrali sono del tipo

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\operatorname{sen}(\pi\alpha)}\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}\left[z^\alpha R(z), z_k\right]\,,$$

con $\alpha \notin \mathbb{Z}$ e dove $\{z_k\}_{k=1}^N$, l'insieme dei poli della funzione razionale $R(z)$, deve avere intersezione vuota con il semi-asse reale positivo. Inoltre, considerando il comportamento della funzione razionale agli estremi d'integrazione,

$$R(x) \underset{u\to 0^+}{\propto} x^l\,, \qquad R(x) \underset{u\to\infty}{\propto} x^h\,, \qquad (l,h)\in\mathbb{Z}^2\,.$$

si ha la condizione di convergenza

$$-l-1 < \operatorname{Re}(\alpha) < -h-1\,.$$

Nel caso della funzione razionale $Q(u)$, abbiamo già verifica che i poli non appartengono al semi-asse reale positivo. Anche le condizioni di convergenza sono soddisfatte, infatti, si hanno i comportamenti agli estremi

$$\begin{aligned} Q(u) \underset{u\to 0^+}{\sim} \frac{1}{1+r^3}u^l\,, &\qquad \text{con: } l=0\,,\\ Q(u) \underset{u\to\infty}{\sim} u^h\,, &\qquad \text{con: } h=-2\,, \end{aligned}$$

per cui, con $\alpha = 1/2$,

$$-l-1 = -1 < \operatorname{Re}(\alpha) = \frac{1}{2} < -h-1 = 1\,.$$

Possiamo usare la formula nota,

$$\mapsto = -\frac{r\pi e^{-i\pi/2}}{\operatorname{sen}(\pi/2)}\sum_{j=0}^2 \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, -1+re^{(2j+1)i\pi/3}\right] = i\pi r\sum_{j=0}^2 \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, -1+re^{(2j+1)i\pi/3}\right]\,.$$

Calcoliamo i residui dei tre poli semplici usando, come dovuto, la determinazione principale $\arg(z)\in(0,2\pi)$,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, -1+re^{(2j+1)i\pi/3}\right] = \frac{\sqrt{-1+re^{(2j+1)i\pi/3}}}{3re^{(2j+1)i\pi/3}}\,.$$

Il residuo in $u_1 = -1-r$ è

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, -1-r\right] = -\frac{\sqrt{-1-r}}{3r} = -\frac{\sqrt{(1+r)e^{i\pi}}}{3r} = -e^{i\pi/2}\frac{\sqrt{1+r}}{3r} = -i\frac{\sqrt{1+r}}{3r}\,.$$

I residui in $u_0 = -1 + re^{i\pi/3}$ e $u_2 = -1 + re^{5i\pi/3}$ sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, -1+\frac{r}{2}\left(1\pm i\sqrt{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{-1+r\left(1\pm i\sqrt{3}\right)/2}}{3r}e^{-(2j+1)i\pi/3} = \frac{\sqrt{-1+r/2\pm ir\sqrt{3}/2}}{3r}e^{-(2j+1)i\pi/3},$$

i numeri complessi sotto radice $-1+r/2\pm ir\sqrt{3}/2$ sono l'uno il complesso coniugato dell'altro, il primo, quello quello con il segno alto, ha parte immaginaria $r\sqrt{3}/2$ strettamente positiva, poiché $r \in [1, \infty)$ e parte reale negativa o nulla se $r \in [1, 2]$, strettamente positiva altrimenti. In ogni caso il numero $-1 + r/2 + i\sqrt{3}/2$ è nel semipiano delle parti immaginarie positive, nel primo o secondo quadrante. Indichiamo con β la sua fase,

$$\beta = \arctan\left(\frac{r\sqrt{3}}{-2+r}\right) \in (0, \pi),$$

in particolare, β varia nell'intervallo $(\pi/3, 2\pi/3]$. Infatti, per $r = 1$, si avrebbe parte reale -1 e parte immaginaria $\sqrt{3}$, quindi la fase è $2\pi/3$, mentre nel limite $r \to \infty$, sia la parte reale che l'immaginaria divergono $+\infty$ nel primo quadrante, il rapporto tende a $\sqrt{3}$, quindi la fase è $\pi/3$. Il secondo numero complesso $-1 + r/2 - ir\sqrt{3}/2$ ha fase $2\pi - \beta$ e non semplicemente $-\beta$, poiché la determinazione, come specificato, è $\arg(z) \in (0, 2\pi)$, infatti

$$2\pi - \beta \in [4\pi/3, 5\pi/3) \subset (\pi, 2\pi).$$

I residui in u_0 e u_2 sono quindi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, -1+\frac{r}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] &= \frac{\sqrt{-1+r/2+i\sqrt{3}/2}}{3r}e^{-i\pi/3} = \frac{\left((-1+r/2)^2+3r^2/4\right)^{1/4}}{3r}e^{i(\beta/2-\pi/3)} \\
&= \frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3r}e^{i(\beta/2-\pi/3)}, \\
\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, -1+\frac{r}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] &= \frac{\sqrt{-1+r/2-i\sqrt{3}/2}}{3r}e^{-i\pi/3} = \frac{\left((-1+r/2)^2+3r^2/4\right)^{1/4}}{3r}e^{i(-2\pi/3-\beta/2)} \\
&= \frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3r}e^{i(-2\pi/3-\beta/2)},
\end{aligned}$$

la loro somma

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, u_0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, u_2\right] &= \frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3r}\left(e^{i(\beta/2-\pi/3)} + e^{i(2\pi/3-\beta/2)}\right) \\
&= \frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3r}e^{-i\pi/2}\left(e^{i(\beta/2+\pi/6)} + e^{-i(\beta/2+\pi/6)}\right) \\
&= -2i\frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3r}\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

L'integrale vale

$$\begin{aligned}
\mapsto &= i\pi r\sum_{j=0}^{2}\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z}(z+1)}{(z+1)^3+r^3}, u_j\right] = i\pi r\left(-i\frac{\sqrt{1+r}}{3r} - 2i\frac{\left(r^2-r+1\right)^{1/4}}{3r}\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{1+r} + 2\left(r^2-r+1\right)^{1/4}\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right).
\end{aligned}$$

Usando le formule di bisezione

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\beta+\pi/3)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\beta)/2-\sqrt{3}\operatorname{sen}(\beta)/2}{2}}.$$

L'angolo $(\beta/2 + \pi/6)$ appartiene al primo quadrante e le funzioni seno e coseno sono non negative, infatti

$$\beta \in (\pi/3, 2\pi/3] \quad\Rightarrow\quad \frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6} \in (\pi/3, \pi/2] \quad\Rightarrow\quad \cos(\beta/2),\ \operatorname{sen}(\beta/2) \geq 0.$$

Ne consegue che

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos(\beta)/2-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\beta)/2}{2}}\,.$$

Le funzioni coseno e seno dell'angolo β si ottengono rispettivamente dal denominatore e numeratore normalizzati dell'argomento dell'arcotangente, infatti $\beta=\arctan(r\sqrt{3}/(-2+r))$, si hanno

$$\beta=\arctan\left(\frac{\mathrm{sen}(\beta)}{\cos(\beta)}\right)=\arctan\left(\frac{r\sqrt{3}}{-2+r}\right)\qquad\Rightarrow\qquad \begin{aligned}\mathrm{sen}(\beta)&=\frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{(-2+r)^2+3r^2}}=\frac{r\sqrt{3}}{2\sqrt{r^2-r+1}}\\ \cos(\beta)&=\frac{-2+r}{\sqrt{(-2+r)^2+3r^2}}=\frac{-2+r}{2\sqrt{r^2-r+1}}\end{aligned}\;,$$

da cui

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2\sqrt{r^2-r+1}-1+r/2-3r/2}}{2\,(r^2-r+1)^{1/4}}=\frac{\sqrt{2\sqrt{r^2-r+1}-1-r}}{2\,(r^2-r+1)^{1/4}}\,,$$

in definitiva

$$\rotatebox{90}{T}=\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{r+1}+\sqrt{2\sqrt{r^2-r+1}-r-1}\right).$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la serie di Laurent della funzione

$$\rotatebox{90}{K}_N(z)=\sum_{k=0}^{N}\frac{k^2+1}{z-k}\,,$$

per un generico $N\in\mathbb{N}$, centrata nell'origine e convergente in $z_0=2+i$.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione ha solo poli semplici nei punti dell'insieme $\{k\}_{k=0}^{N}$, i residui sono rispettivamente gli elementi dell'insieme $\left\{k^2+1\right\}_{k=0}^{N}$. Ci sono $N+1$ serie di Laurent centrate nell'origine e convergono nelle corone circolari concentriche

$$D_k=\{z:k<|z|<k+1\}\,,\qquad \forall\,k\in\{0,1,\ldots,N-1\}\,,\qquad D_N=\{z:|z|>N\}\,.$$

La serie di Laurent richiesta problema, poiché $|z_0|=\sqrt{5}\in(2,3)$, è quella convergente in $D_2=\{z:2<|z|<3\}$.
I coefficienti si ottengono con la formula integrale

$$\begin{aligned}C_j&=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=5/2}\frac{\rotatebox{90}{K}_N(z)}{z^{j+1}}dz=\sum_{k=0}^{N}\frac{k^2+1}{2i\pi}\oint_{|z|=5/2}\frac{dz}{z^{j+1}(z-k)}\\ &=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=5/2}\frac{dz}{z^{j+2}}+\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2+1}{2i\pi}\oint_{|z|=5/2}\frac{dz}{z^{j+1}(z-k)}\,,\qquad \forall\,j\in\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

Il percorso d'integrazione è la circonferenza centrata nell'origine di raggio $5/2$, quindi contenuta nella corona D_2 e tale da avvolgere l'origine una sola volta. La k-esima funzione integranda $1/\left(z^{j+1}(z-k)\right)$, con $k\in\{1,\ldots,N\}$ e $j\in\mathbb{Z}$, ha un polo semplice in $z=k$ e, se $j\geq 0$, un polo di ordine $(j+1)\geq 1$ nell'origine. Se $k=0$ e $j\geq -1$, ha solo un polo nell'origine di ordine $(j+2)\geq 1$. Ne consegue che, usando il teorema dei residui,

$$C_j=\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=5/2}\frac{\rotatebox{90}{K}_N(z)}{z^{j+1}}dz=\delta_{j,-1}+\mathrm{Res}\left[\frac{\rotatebox{90}{K}_N(z)}{z^{j+1}},1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{\rotatebox{90}{K}_N(z)}{z^{j+1}},2\right]+\begin{cases}0 & j\leq -1\\ \mathrm{Res}\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2+1}{z^{j+1}(z-k)},0\right] & j\geq 0\end{cases}\,.$$

La delta di Kronecker è il valore del primo integrale della precedente espressione. I residui in $z = 1$ e $z = 2$ valgono

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[\frac{\rotatebox[origin=c]{90}{K}_N(z)}{z^{j+1}}, 1\right] &= \left.\frac{k^2+1}{z^{j+1}}\right|_{z=k=1} = 2 \\
\mathrm{Res}\left[\frac{\rotatebox[origin=c]{90}{K}_N(z)}{z^{j+1}}, 1\right] &= \left.\frac{k^2+1}{z^{j+1}}\right|_{z=k=2} = \frac{5}{2^{j+1}}\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

L'ultimo residuo, per $j \geq 0$,

$$\mathrm{Res}\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{k^2+1}{z^{j+1}(z-k)}, 0\right] = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}\sum_{k=1}^{N}\left.\frac{k^2+1}{(z-k)}\right|_0 = \sum_{k=1}^{N}(-1)^j \left.\frac{k^2+1}{(z-k)^{j+1}}\right|_0 = -\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2+1}{k^{j+1}}\,.$$

Usando questi risultati si ottengono le espressioni dei coefficienti di Laurent

$$C_j = \delta_{j,-1} + 2 + \frac{5}{2^{j+1}} - \begin{cases} 0 & j \leq -1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2+1}{k^{j+1}} & j \geq 0 \end{cases}\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z}\,.$$

Quarto problema (punteggio massimo: 5/30)

Dopo aver dimostrato l'identità

$$\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_{k=0}\left[f^2\right] = \|f\|^2\,,$$

valida per ogni funzione $f(x)$ a valori reali, tale che $f(x), f^2(x) \in L^2(\mathbb{R})$, dove $\mathscr{F}_{k=0}\left[f^2\right]$ è la trasformata di Fourier valutata nell'origine; la si verifichi nel caso della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}\,.$$

Soluzione del quarto problema

È sufficiente usare la definizione di norma e l'espressione della trasformata di Fourier della funzione al quadrato. La norma al quadrato è data dal prodotto scalare della funzione per se stessa, cioè

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx\,,$$

la seconda identità segue dal dato del problema per cui la funzione $f(x)$ è reale. La trasformata di Fourier della funzione al quadrato $f^2(x)$ è

$$\mathscr{F}_k\left[f^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) e^{-ikx} dx$$

e il valore in $k = 0$

$$\mathscr{F}_{k=0}\left[f^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \frac{(f, f)}{\sqrt{2\pi}} = \frac{\|f\|^2}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

da cui, moltiplicando per $\sqrt{2\pi}$, si ha l'identità richiesta

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}_{k=0}\left[f^2\right] = \|f\|^2\,.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier del quadrato della funzione $f^2(x) = 1/(x^2+1)^2$ data. Usando il lemma di Jordan, otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{(x^2+1)^2}dx \\
&= \sqrt{2\pi}\,i\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\dfrac{e^{-ikz}}{(z+i)^2}\Bigg|_{z=i} = \left(\dfrac{-ike^{-ikz}}{(z+i)^2} - \dfrac{2e^{-ikz}}{(z+i)^3}\right)_{z=i} = i\dfrac{k-1}{4}e^{k} & k<0 \\ -\dfrac{d}{dz}\dfrac{e^{-ikz}}{(z-i)^2}\Bigg|_{z=i} = -\left(\dfrac{-ike^{-ikz}}{(z-i)^2} - \dfrac{2e^{-ikz}}{(z-i)^3}\right)_{z=-i} = -i\dfrac{k+1}{4}e^{-k} & k>0 \end{cases} \\
&= \sqrt{2\pi}\frac{|k|+1}{4}e^{-|k|}\,.
\end{aligned}
$$

La norma al quadrato è il prodotto scalare della funzione per se stessa

$$
\|f\|^2 = (f,f) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.
$$

Integriamo nel piano complesso, possiamo chiudere il percorso d'integrazione nel semi-piano superiore o inferiore per poi usare il teorema dei residui. Chiudendo nel semi-piano superiore, si ha

$$
\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2i\pi\,\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}\Bigg|_{z=i} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2i\pi\,\frac{-2}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i} = 2i\pi\frac{-2}{(2i)^3} = \frac{\pi}{2}\,.
$$

La trasformata di Fourier in $k=0$ moltiplicata per $\sqrt{2\pi}$ vale

$$
\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_{k=0}\left[\frac{1}{(x^2+1)^2}\right] = 2\pi\frac{|k|+1}{4}e^{-|k|}\Bigg|_{k=0} = \frac{\pi}{2}\,,
$$

l'identità è dimostrata.

Quinto problema (punteggio massimo: 5/30)

Si ottengano lo spettro discreto e gli autovettori della matrice 2×2

$$
C = [A,B]\,,
$$

dove le matrici A e B sono date dalle combinazioni delle matrici di Pauli, σ_1, σ_2 e σ_3,

$$
A = \sigma_1 + \sigma_2\,, \qquad B = \sigma_1 + 2\sigma_3\,.
$$

Soluzione del quinto problema

Calcoliamo la matrice C sfruttando l'algebra delle matrici di Pauli, ovvero le regolo di commutazione,

$$
C = [\sigma_1+\sigma_2, \sigma_1+2\sigma_3] = 2[\sigma_1,\sigma_3] + [\sigma_2,\sigma_1] + 2[\sigma_2,\sigma_3] = 2i\,(-2\sigma_2 - \sigma_3 + 2\sigma_1)\,,
$$

usando le espressioni delle matrici

$$
\sigma_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix},
$$

si ha

$$
C = 2i\begin{pmatrix} -1 & 2+2i \\ 2-2i & 1\end{pmatrix}.
$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione secolare

$$
\begin{aligned}
\det(C-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2i-\lambda & -4+4i \\ 4+4i & 2i-\lambda\end{pmatrix} &= 0 \\
-\lambda^2 - 4 - 32 &= 0 \\
\lambda^2 &= 36\,,
\end{aligned}
$$

gli autovalori sono $\lambda_\pm = \pm 6i$. Come atteso, essendo la matrice C anti-hermitiana, gli autovalori sono immaginari puri.
Le componenti degli autovettori, elementi dell'insieme $\{v_-, v_+\}$, si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} -2i-\lambda_\pm & -4+4i \\ 4+4i & 2i-\lambda_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\mp^1 \\ v_\mp^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove $v_\pm^j$ è la j-esima componente contro-variante del vettore $v_\pm$. Poniamo $v_\pm^1 = v$, dalla prima riga, si hanno

$$\begin{aligned} v_-^2 &= \frac{v(2i+\lambda_-)}{-4+4i} = \frac{-4iv}{-4+4i} = \frac{iv}{1-i} = \frac{v(-1+i)}{2}, \\ v_+^2 &= \frac{v(2i+\lambda_+)}{-4+4i} = \frac{8iv}{-4+4i} = \frac{2iv}{-1+i} = v(1-i). \end{aligned} \tag{1}$$

Ne consegue che, usando il valore arbitrario del parametro v per normalizzare, i vettori sono

$$v_- = v\begin{pmatrix} 1 \\ (-1+i)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3/2}}\begin{pmatrix} 1 \\ (-1+i)/2 \end{pmatrix}, \qquad v_+ = v\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore hermitiano $\hat{\sphericalangle}$, definito nello spazio di Hilbert a dimensione dispari H_{2N+1}, $N \in \mathbb{N}$, ha equazioni agli autovalori

$$\hat{\sphericalangle}|k\rangle = k|k\rangle, \qquad \forall\, k \in \{-N, -N+1, \ldots, N\},$$

ovvero, $\{k\}_{k=-N}^N$ e $\{|k\rangle\}_{k=-N}^N \subset H_{2N+1}$ sono rispettivamente lo spettro discreto e l'insieme degli autovettori.
Sia $\hat{\Pi}$ l'operatore che trasforma un generico autovettore nell'autovettore avente autovalore opposto, cioè

$$\hat{\Pi}|k\rangle = |-k\rangle, \qquad \forall\, k \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}.$$

Si ottengano i vettori:

- $\left[\hat{\sphericalangle}, \hat{\Pi}\right]|k\rangle$;
- $\left\{\hat{\sphericalangle}, \hat{\Pi}\right\}|k\rangle$;
- $e^{\hat{\Pi}}|k\rangle$,

$\forall\, k \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}$, dove $\left[\hat{\sphericalangle}, \hat{\Pi}\right]$ e o $\left\{\hat{\sphericalangle}, \hat{\Pi}\right\}$ sono rispettivamente il commutatore e l'anticommutatore degli operatori $\hat{\sphericalangle}$ e $\hat{\Pi}$.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

L'operatore $\hat{\sphericalangle}$ è hermitiano e ha autovalori distinti, non c'è degenerazione, ne consegue che l'insieme degli autovettori $\{|k\rangle\}_{k=-N}^N$ è ortonormale e rappresenta una base dello spazio vettoriale H_{2N}. Perciò un operatore è definito dalle sue azioni sugli autovettori dell'operatore $\hat{\sphericalangle}$.
Consideriamo le azione dei prodotti $\hat{\sphericalangle}\hat{\Pi}$ e $\hat{\Pi}\hat{\sphericalangle}$ degli operatori su un generico $|k\rangle$, con $k \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}$,

$$\begin{aligned} \hat{\sphericalangle}\underbrace{\hat{\Pi}|k\rangle}_{|-k\rangle} &= \hat{\sphericalangle}|-k\rangle = -k|-k\rangle, \\ \hat{\Pi}\underbrace{\hat{\sphericalangle}|k\rangle}_{k|k\rangle} &= k\underbrace{\hat{\Pi}|k\rangle}_{|-k\rangle} = k|-k\rangle. \end{aligned}$$

La differenza e la somma delle precedenti espressioni danno rispettivamente le azioni del commutatore e dell'anti-commutatore richieste, si hanno

$$\begin{aligned} &\left(\hat{\sphericalangle}\hat{\Pi} - \hat{\sphericalangle}\hat{\Pi}\right)|k\rangle = \left[\hat{\sphericalangle}, \hat{\Pi}\right]|k\rangle = -2k|-k\rangle, \\ &\left(\hat{\sphericalangle}\hat{\Pi} + \hat{\sphericalangle}\hat{\Pi}\right)|k\rangle = \left\{\hat{\sphericalangle}, \hat{\Pi}\right\}|k\rangle, = |0\rangle, \qquad \forall\, k \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

In particolare si ha che gli operatori anticommutano, cioè hanno anticommutatore nullo.
Scriviamo l'operatore $e^{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}}$ in forma di serie

$$e^{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^k}{k!}$$

e sfruttiamo la relazione $\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^2 = \hat{I}$. Questa identità si ottiene direttamente dall'azione dello stesso operatore su un generico autovettore che $|k\rangle$, $\forall\, k \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}$,

$$\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^2 |k\rangle = \hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}\, \underbrace{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}|k\rangle}_{|-k\rangle} = \underbrace{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}|-k\rangle}_{|k\rangle} = |k\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^2 = \hat{I}\,.$$

Si evince che le potenze intere pari e dispari sono

$$\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^{2n} = \hat{I}\,, \qquad \hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^{2n+1} = \hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}, \qquad \forall \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Da cui l'operatore esponenziale

$$e^{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}^{2k+1}}{(2k+1)!} = \hat{I} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} + \hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \hat{I}\cosh(1) + \hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}\sinh(1)\,.$$

La sua azione è

$$e^{\hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}}|k\rangle = \left(\hat{I}\cosh(1) + \hat{\rotatebox[origin=c]{90}{B}}\sinh(1)\right)|k\rangle = \cosh(1)|k\rangle + \sinh(1)|-k\rangle\,, \qquad \forall\, k \in \{-N, -N+1, \ldots, N\}\,.$$