Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta del 20 febbraio 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$B = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \frac{\sum_{j=0}^{1000} x^j}{\sum_{k=0}^{3} x^k}\, dx\,.$$

Soluzione del primo problema

Il polinomi possono essere scritti anche nelle forme

$$\sum_{j=0}^{1000} x^j = \frac{1-x^{1001}}{1-x}\,, \qquad \sum_{k=0}^{3} x^k = \frac{1-x^4}{1-x}\,,$$

cosicché l'integranda può essere scritta come

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}\, \frac{\sum_{j=0}^{1000} x^j}{\sum_{k=0}^{3} x^k} = \sqrt{1-x^2}\, \frac{1-x^{1001}}{1-x^4} = p(x) - d(x)\,,$$

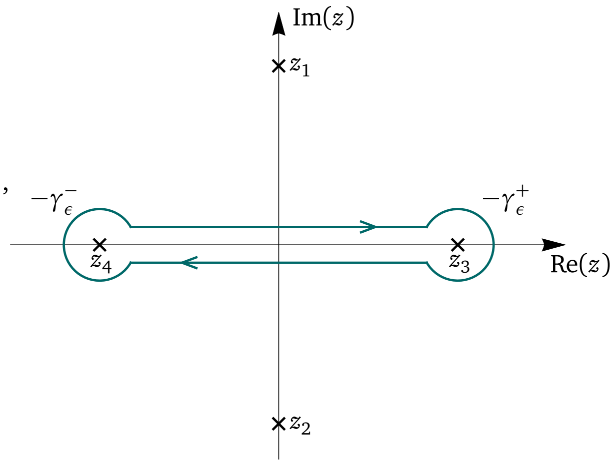
ovvero, come differenza delle funzioni

$$p(x) = \sqrt{1-x^2}\, \frac{1}{1-x^4}\,, \qquad d(x) = \sqrt{1-x^2}\, \frac{x^{1001}}{1-x^4}\,,$$

che sono rispettivamente pari e dispari rispetto allo scambio $x \to -x$. L'integrale della funzione dispari, essendo calcolate su un intervallo d'integrazione simmetrico, dà contributo nullo, quindi

$$B = \int_{-1}^{1} p(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^4} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)(1-x^2)} dx\,.$$

L'integranda ha i quattro poli semplici $z_{1,2} = \pm i$ e $z_{3,4} = \pm 1$, gli ultimi due sono i punti di diramazione in cui la funzione $p(z)$ è integrabile. Consideriamo l'integrale della funzione $p(z)$ sul percorso ad "osso" mostrato in figura,



$$-\Omega = (-\gamma_\epsilon^-) \cup [-1+i\epsilon, 1-i\epsilon] \cup (-\gamma_\epsilon^+) \cup (-[1+i\epsilon, -1+i\epsilon])\,,$$

dove gli archi $\gamma_\epsilon^\pm$ sono definiti come segue

$$\gamma_\epsilon^- = \left\{ z : z = -1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [\epsilon, 2\pi - \epsilon] \right\}$$
$$\gamma_\epsilon^+ = \left\{ z : z = 1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [-\pi + \epsilon, \pi - \epsilon] \right\}\,,$$

si tratta di un percorso chiuso che avvolge una sola volta in senso orario il segmento reale $[-1, 1]$.

Questo integrale può essere ottenuto sia come somma dei residui

$$\oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)} dz = 2i\pi \left(\text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}, i \right] + \text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}, -i \right] \right),$$

che in termini dell'integrale B

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)} dz = 2B\,.$$

Quest'ultimo risultato si ottiene scegliendo in modo opportuno le fasi dei due polinomi che fattorizzano l'argomento della radice quadrata. La scelta viene fatta in modo che le radici quadrate dei due fattori abbiamo discontinuità "in avanti", ovvero si abbiano tagli lungo le semirette reali uscenti dai punti di diramazione z_3 e z_4 fino ad infinito. Poiché la variabile z compare con il segno più in un caso e meno nell'altro, le fasi devono essere scelte con determinazioni diverse, $(0, 2\pi)$ in un caso e $(-\pi, \pi)$ nell'altro, in particolare

$$\begin{aligned} 1+z &= |1+z|e^{i\theta_1}\,, & \theta_1 &\in (0,2\pi) & \Rightarrow\quad & \text{taglio in } [-1,\infty)\text{, ovvero "in avanti"}\,, \\ 1-z &= |1-z|e^{i\theta_2}\,, & \theta_2 &\in (-\pi,\pi) & \Rightarrow\quad & \text{taglio in } [1,\infty)\text{, ovvero "in avanti"}\,. \end{aligned}$$

Lungo la semiretta $[1,\infty)$ i tagli si sovrappongono e si elidono, la discontinuità rimane solo nell'intervallo di integrazione $[-1,1]$. I valori della radice quadrata, ovvero della parte polidroma della funzione integranda, sul bordo superiore ed inferiore del taglio sono

$$\begin{aligned} &\text{sopra: } \theta_1 \to 0^+\,, \quad \theta_2 \to 0^- \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{|1-z^2|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{1-x^2}e^0 = \sqrt{1-x^2}\,, \\ &\text{sotto: } \theta_1 \to 2\pi^-\,, \quad \theta_2 \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-z^2} = \sqrt{|1-z^2|}e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{1-x^2}e^{i\pi} = -\sqrt{1-x^2}\,. \end{aligned}$$

Alla luce di questi risultati si ha che l'integrale sul percorso chiuso $-\Omega$, ne limite $\epsilon \to 0^+$, tende al doppio dell'integrale cercato, infatti

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon\to 0^+} \oint_{-\Omega} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)} dz &= \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_{(-\gamma_\epsilon^+)\cup(-\gamma_\epsilon^-)} \frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)} dz \right. \\ &\qquad \left. + \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)} dx - \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{-\sqrt{1-x^2}}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)} dx \right) \\ &= 2\int_{-1}^{1} \frac{-\sqrt{1-x^2}}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)} dx = 2B\,. \end{aligned}$$

In definitiva l'integrale B può essere calcolato come somma dei residui nei poli esterni al percorso di Ω, ovvero

$$B = i\pi \left(\text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}, i \right] + \text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}, -i \right] \right).$$

Per ottenere i valori dei residui è necessario valutare la parte polidroma della funzione integranda nei poli z_1 e z_2 usando coerentemente le determinazioni scelte per la fasi θ_1 e θ_2. In $z_1 = i$ si ha

$$\sqrt{1-z_1^2} = \sqrt{(1+z_1)(1-z_1)} = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}\,,$$

per la seconda fase, quella del numero $(1-i)$, avremmo potuto scegliere sia $-i\pi/4$ che $7i\pi/4$, usiamo il primo valore perché si tratta della fase θ_2 che ha determinazione $(-\pi,\pi)$. In $z_2 = -i$ si ha

$$\sqrt{1-z_2^2} = \sqrt{(1+z_2)(1-z_2)} = \sqrt{(1-i)(1+i)} = \sqrt{\sqrt{2}\,e^{7i\pi/4}\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}} = -\sqrt{2}\,,$$

con la stessa logica del caso precedente, la scelta della prima fase ricade su $7i\pi/4$ anziché $-i\pi/4$, poiché la fase θ_1 ha determinazione $(0,2\pi)$. Ne consegue che i due residui sono

$$\text{Res}\left[\frac{\sqrt{1-z^2}}{\left(1+z^2\right)\left(1-z^2\right)}, \pm i \right] = \pm\sqrt{2}\frac{1}{\pm 2i\cdot 2} = \frac{1}{2i\sqrt{2}}\,,$$

hanno lo stesso valore, quindi per l'integrale B si ha

$$B = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga l'espressione analitica della funzione

$$f(z) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{z\,\mathrm{sen}(\alpha)} \cos(z\cos(\alpha))\, d\alpha\,, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Soluzione del secondo problema

In primo luogo modifichiamo l'intervallo d'integrazione portandolo a $[0,\pi]$, facciamo quindi la sostituzione $\alpha' = \alpha + \pi/2$, si ha

$$f(z) = \int_0^{\pi} e^{-z\cos(\alpha')} \cos(z\,\mathrm{sen}(\alpha'))\, d\alpha'.$$

A questo estendiamo l'intervallo d'integrazione a tutto l'angolo giro, in determinazione $[-\pi,\pi]$. Con l'ulteriore sostituzione $\beta = -\alpha'$ otteniamo

$$f(z) = \int_{-\pi}^{0} e^{-z\cos(\beta)} \cos(z\,\mathrm{sen}(\beta))\, d\beta\,,$$

le funzioni integrande dei due precedenti integrali sono identiche per cui sommando gli integrali si ottiene l'intervallo completo

$$f(z) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-z\cos(\beta)} \cos(z\,\mathrm{sen}(\beta))\, d\beta = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-z\left(\cos(\beta) - i\,\mathrm{sen}(\beta)\right)} + e^{-z\left(\cos(\beta)+i\,\mathrm{sen}(\beta)\right)} \right) d\beta\,.$$

Infine facciamo la sostituzione: $w = \cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta) = e^{i\beta}$, cosicché al variare di $\beta \in [-\pi,\pi]$, la variabile complessa w varia sulla circonferenza unitaria di equazione $|w| = 1$. Inoltre si hanno

$$\cos(\beta) - i\,\mathrm{sen}(\beta) = e^{-i\beta} = \frac{1}{w}\,, \qquad \beta = -i\ln(w) \;\Rightarrow\; d\beta = -i\frac{dw}{w}\,.$$

La rappresentazione della funzione $f(z)$ diventa

$$f(z) = -\frac{i}{4}\oint_{|w|=1} \left(e^{-zw} + e^{-z/w}\right) \frac{dw}{w} = -\frac{i}{4}\oint_{|w|=1} \frac{e^{-zw}}{w} dw - \frac{i}{4}\oint_{|w|=1} \frac{e^{-z/w}}{w} dw\,.$$

Il primo integrale può essere facilmente calcolato con il teorema dei residui, per il secondo possiamo adottare l'ulteriore sostituzione $u = 1/w$, per cui

$$f(z) = -\frac{i}{4} 2i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-zw}}{w}, 0\right] + \frac{i}{4}\oint_{-|u|=1} \frac{e^{-zu}}{1/u}\frac{du}{u^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{4}\oint_{|u|=1} \frac{e^{-zu}}{u} du\,.$$

Anche l'unico integrale rimasto può essere calcolato con il teorema dei residui ed è ovviamente uguale al precedente per cui si ottiene l'espressione della funzione $f(z)$,

$$f(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,,$$

che quindi risulta essere costante e uguale a π.

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si determini l'espressione esplicita e il dominio di analiticità della funzione $g(z)$ che ha la serie di Laurent

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k (z-1)^k\,, \qquad C_k = \begin{cases} (-1)^{k+1}(k+1) & k \le -2 \\ 0 & k > -2 \end{cases}\,,$$

di centro $z = 1$ e dominio di convergenza

$$D = \{z : 1 < |z-1| < \infty\}\,.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Scriviamo la serie con le espressioni esplicite dei coefficienti, si ha

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{-2} (-1)^{k+1}(k+1)(z-1)^k\,,$$

in ogni insieme chiuso $\overline{C} \subset D$, che sia contenuto nella corona circolare D, è possibile derivare termine a termine e quindi integrare termine a termine. È facile vedere che il termine generico della serie ha la forma di una derivata, ne consideriamo quindi l'integrale indefinito, $\forall\, z \in \overline{C}$,

$$\int g(z)dz = \int \left(\sum_{k=-\infty}^{-2} (-1)^{k+1}(k+1)(z-1)^k \right) dz = \sum_{k=-\infty}^{-2} (-1)^{k+1}(k+1) \int (z-1)^k dz = \sum_{k=-\infty}^{-2} (-1)^{k+1}(z-1)^{k+1}\,.$$

Possiamo ricondurre la somma ad una serie geometrica, a tal fine facciamo il cambiamento di indice $j = -k-2$, cioè $k = -j-2$,

$$\begin{aligned}\int g(z)dz &= \sum_{k=-\infty}^{-2} (-1)^{k+1}(z-1)^{k+1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{-j-1}(z-1)^{-j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{j+1} = \frac{1}{1-z} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{j} \\ &= \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{1-1/(1-z)} = -\frac{1}{z}\,.\end{aligned}$$

A questo punto possiamo derivare membro a membro per ottenere l'espressione analitica della funzione $g(z)$, si ha

$$g(z) = \frac{d}{dz} \int g(z)dz = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}\,.$$

Il dominio di analiticità è: $\{z : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$, cioè il piano complesso privato dell'origine in la funzione $g(z)$ ha un polo doppio.

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si dimostri che ogni operatore unitario $\hat{U}$ definito in uno spazio di Hilbert può scritto come $\hat{U} = \hat{H} + \hat{A}$, ovvero come la somma di un operatore hermitiano $\hat{H}$ e uno anti-hermitiano $\hat{A}$, tali che

$$[\hat{H}, \hat{A}] = 0\,, \qquad \hat{H}^2 - \hat{A}^2 = \hat{I}\,.$$

Sia

$$H = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -3i/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 3i/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\,,$$

la matrice che rappresenta l'operatore hermitiano $\hat{H}$ rispetto alla base canonica. Dopo aver verificato che la matrice H possa costituire la parte hermitiana di un insieme di matrici unitarie U_j, con $j = 1, 2, \ldots$, si determinino tutte le possibili matrici anti-hermitiane A_j e le stesse matrici unitarie U_j, tali che $U_j = H + A_j$.

Soluzione del quarto problema

Sia $\hat{U}$ un generico operatore unitario, tale che, quindi, si abbia $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}$, dove $\hat{I}$ è l'operatore identità. In termini di questo generico operatore unitario, definiamo i due operatori

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{U} + \hat{U}^\dagger\right), \qquad \hat{A} = \frac{1}{2}\left(\hat{U} - \hat{U}^\dagger\right),$$

che, come è immediato verificare, sono un operatore hermitiano ed uno anti-hermitiano, infatti

$$\hat{H}^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{U} + \hat{U}^\dagger\right)^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{U}^\dagger + \hat{U}\right) = \hat{H}, \qquad \hat{A}^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{U} - \hat{U}^\dagger\right)^\dagger = \frac{1}{2}\left(\hat{U}^\dagger - \hat{U}\right) = -\frac{1}{2}\left(\hat{U} - \hat{U}^\dagger\right)^\dagger = -\hat{A}.$$

Inoltre, poiché l'operatore $\hat{U}$ è normale, ovvero commuta con il suo aggiunto hermitiano, anche i due operatori $\hat{H}$ e $\hat{A}$ commutano, ovvero

$$\left[\hat{H}, \hat{A}\right] = \frac{1}{4}\left[U + U^\dagger, U - U^\dagger\right] = \frac{1}{2}\left[U^\dagger, U\right] = 0.$$

Calcoliamo la differenza dei quadrati dei due operatori sfruttando la condizione di unitarietà dell'operatore $\hat{U}$,

$$\hat{H}^2 - \hat{A}^2 = \frac{1}{4}\left(\hat{U}^2 + \left(\hat{U}^\dagger\right)^2 + \hat{U}\hat{U}^\dagger + \hat{U}^\dagger\hat{U}\right) - \frac{1}{4}\left(\hat{U}^2 + \left(\hat{U}^\dagger\right)^2 - \hat{U}\hat{U}^\dagger - \hat{U}^\dagger\hat{U}\right) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{U\hat{U}^\dagger}_{=\hat{I}} + \underbrace{\hat{U}^\dagger\hat{U}}_{=\hat{I}}\Big) = \hat{I}.$$

Infine, si ha che per definizione la somma degli operatori $\hat{H}$ e $\hat{A}$ coincide con l'operatore unitario, cioè

$$\hat{H} + \hat{A} = \frac{1}{2}\left(\hat{U} + \hat{U}^\dagger\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{U} - \hat{U}^\dagger\right) = \hat{U}.$$

Si è quindi ottenuta la dimostrazione richiesta.
Determiniamo lo spettro discreto della matrice H risolvendo l'equazione secolare

$$\det(H - xI) = 0,$$

dove I è la matrice identità, si ha

$$\det\begin{pmatrix} 1/4 - x & 0 & -3i/4 \\ 0 & 1/2 - x & 0 \\ 3i/4 & 0 & 1/4 - x \end{pmatrix} = 0$$
$$\left(\frac{1}{4} - x\right)^2\left(\frac{1}{2} - x\right) + \left(\frac{3i}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2} - x\right) = 0$$
$$\left(\frac{1}{2} - x\right)\left[\left(\frac{1}{4} - x\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = 0,$$

ci sono quindi tre autovalori non degeneri

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{1}{2}, \qquad x_3 = 1.$$

Gli autovettori corrispondenti si ottengono dai tre sistemi lineari omogenei

$$\begin{pmatrix} 1/4 - x_j & 0 & -3i/4 \\ 0 & 1/2 - x_j & 0 \\ 3i/4 & 0 & 1/4 - x_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

In particolare dalla seconda riga abbiamo: $b_{1,3} = 0$, per cui possiamo porre $a_1 = a_3 = 1$ e $a_2 = 0$ e si ricavano le terze componenti

$$c_{1,3} = \left(\frac{1}{4} - x_{1,3}\right)\frac{4}{3i}, \qquad c_2 = 0.$$

Ne consegue che gli autovettori normalizzati sono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix},$$

con i quali si definisce la matrice diagonalizzante

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix}' .$$

È un matrice unitaria in quanto l'insieme degli autovettori è ortonormale, essendo H una matrice hermitiana e quindi normale. In particolare si hanno le relazioni

$$H_d = V^\dagger H V = \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{diag}(-1/2, 1/2, 1), \qquad H = V H_d V^\dagger ,$$

dove, in generale, con il pedice d indichiamo le rappresentazioni diagonali delle matrici corrispondenti. Le matrici unitarie U_j sono quelle di cui è richiesta la scomposizione nella somma della matrice hermitiana data H e di una anti-hermitiana A_j da determinare, ovvero $U_j = H + A_j$. L'indice j è introdotto per considerare la possibilità che esistano diverse coppi di matrici, una unitaria e una anti-hermitiana, che verifichino la relazione cercata. Al fine di determinare le matrici A_j sfruttiamo la condizione $H^2 - A_j^2 = I$, da cui

$$A_j^2 = H^2 - I .$$

Da questa relazione è immediato dedurre che le matrici commutano con H e quindi ammettono lo stesso insieme di autovettori, ovvero sono diagonalizzabili simultaneamente. Usiamo la matrice diagonalizzante V nella relazione precedente

$$V^\dagger A_j^2 V = V^\dagger H^2 V - I \quad \Rightarrow \quad A_{d,j}^2 = H_d^2 - I = \begin{pmatrix} -3/4 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

da cui possiamo ottenere le rappresentazioni diagonali delle matrici A_j, si tratta delle matrici diagonali che hanno come elementi le radici quadrate degli elementi delle matrici $A_{d,j}^2$, ovvero

$$A_{d,1} = \begin{pmatrix} i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_{d,2} = \begin{pmatrix} i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$A_{d,3} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_{d,4} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

si hanno quattro possibili matrici in corrispondenza delle quattro combinazione dei segni delle due radici quadrate. Poiché gli elementi diagonali, ovvero gli autovalori sono numeri immaginari puri, le matrici sono anti-hermitiane. Le rappresentazioni diagonali della matrici unitarie U_j sono

$$U_{d,j} = H_d + A_{d,j} = \begin{pmatrix} -1/2 \pm i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \pm i\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pm 2i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pm i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Le rappresentazioni canoniche sono

$$\begin{aligned} U_j = V U_{d,j} V^\dagger &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\pm 2i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\pm i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\pm 2i\pi/3}/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & e^{\pm i\pi/3} & 0 \\ -ie^{\pm 2i\pi/3}/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(e^{\pm 2i\pi/3} + 1\right)/2 & 0 & i\left(e^{\pm 2i\pi/3} - 1\right)/2 \\ 0 & e^{\pm i\pi/3} & 0 \\ -i\left(e^{\pm 2i\pi/3} - 1\right)/2 & 0 & \left(e^{\pm 2i\pi/3} + 1\right)/2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Possiamo ottenere espressioni più semplici, calcolando esplicitamente ciascuna delle quattro matrici U_j, per la prima si ha

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \begin{pmatrix} \left(e^{2i\pi/3}+1\right)/2 & 0 & i\left(e^{2i\pi/3}-1\right)/2 \\ 0 & e^{i\pi/3} & 0 \\ -i\left(e^{2i\pi/3}-1\right)/2 & 0 & \left(e^{2i\pi/3}+1\right)/2 \end{pmatrix} \\
&= e^{i\pi/3} \begin{pmatrix} \left(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3}\right)/2 & 0 & -\left(e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}\right)/(2i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \left(e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}\right)/(2i) & 0 & \left(e^{i\pi/3}+e^{-i\pi/3}\right)/2 \end{pmatrix} \\
&= e^{i\pi/3} \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & 0 & -\mathrm{sen}(\pi/3) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}(\pi/3) & 0 & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^{i\pi/3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Seguendo la stessa procedura per U_2, che differisce da U_2 solo per l'elemento 22, che in U_2 è il complesso coniugato dell'omologo di U_1, si ha

$$
U_2 = \begin{pmatrix} \left(e^{2i\pi/3}+1\right)/2 & 0 & i\left(e^{2i\pi/3}-1\right)/2 \\ 0 & e^{-i\pi/3} & 0 \\ -i\left(e^{2i\pi/3}-1\right)/2 & 0 & \left(e^{2i\pi/3}+1\right)/2 \end{pmatrix} = \frac{e^{i\pi/3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2e^{-2i\pi/2} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} ,
$$

Infine, per la terza e quarta matrice si hanno

$$
\begin{aligned}
U_3 &= \begin{pmatrix} \left(e^{-2i\pi/3}+1\right)/2 & 0 & i\left(e^{-2i\pi/3}-1\right)/2 \\ 0 & e^{i\pi/3} & 0 \\ -i\left(e^{-2i\pi/3}-1\right)/2 & 0 & \left(e^{-2i\pi/3}+1\right)/2 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\pi/3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2e^{2i\pi/2} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} , \\
U_4 &= \begin{pmatrix} \left(e^{-2i\pi/3}+1\right)/2 & 0 & i\left(e^{-2i\pi/3}-1\right)/2 \\ 0 & e^{-i\pi/3} & 0 \\ -i\left(e^{-2i\pi/3}-1\right)/2 & 0 & \left(e^{-2i\pi/3}+1\right)/2 \end{pmatrix} = \frac{e^{-i\pi/3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Le rappresentazioni canoniche delle matrici anti-hermitiane sono

$$
\begin{aligned}
A_j = VA_{d,j}V^\dagger &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{3}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm i\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{3/2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \pm i\sqrt{3}/2 & 0 \\ \pm\sqrt{3/2}/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{3}/4 & 0 & \mp\sqrt{3}/4 \\ 0 & \pm i\sqrt{3}/2 & 0 \\ \pm\sqrt{3}/4 & 0 & \pm i\sqrt{3}/4 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} \pm i & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 2i & 0 \\ \pm 1 & 0 & \pm i \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

in particolare, le quattro matrici anti-hermitiane con le quattro combinazioni dei segni sono

$$
A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & 2i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} , \qquad A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} i & 0 & -1 \\ 0 & -2i & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} ,
$$

$$
A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix} , \qquad A_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ 0 & -2i & 0 \\ -1 & 0 & -i \end{pmatrix} ,
$$

si osserva che $A_1 = A_4^\dagger = -A_4$ e $A_2 = A_3^\dagger = -A_3$.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(x+1)^5}\,.$$

Soluzione del quinto problema

La funzione può essere scritta come prodotto della funzione coseno e della derivata quarta della funzione $1/(x+1)$ divisa per la 4!, ovvero

$$f(x) = \cos(x)\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{x+1}\,.$$

Usiamo il teorema della convoluzione

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[f\right] &= \mathscr{F}_k\left[\cos(x)\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{x+1}\right] = \frac{1}{4!\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[\cos(x)\right] * \mathscr{F}_k\left[\frac{d^4}{dx^4}\frac{1}{x+1}\right] \\
\mathscr{F}_k\left[f\right] &= \frac{1}{4!\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[\cos(x)\right] * \left((ik)^4\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+1}\right]\right)\,,
\end{aligned}$$

è necessario calcolare le trasformate di Fourier della funzione coseno e del polo semplice $1/(x+1)$, per cui si hanno i seguenti risultati

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\cos(x)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix(k-1)}+e^{-ix(k+1)}}{2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big[\delta(k-1)+\delta(k+1)\Big]\,; \\
\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+1}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x+1}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{x+1-i\epsilon}dx - i\pi e^{ik}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases} 2i\pi e^{ik} - i\pi e^{ik} = i\pi e^{ik} & k<0 \\ 0 - i\pi e^{ik} = -i\pi e^{ik} & k>0 \end{cases} \\
\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+1}\right] &= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{segno}(k)\,e^{ik}\,.
\end{aligned}$$

Il calcolo della convoluzione, da cui si ottiene il risultato finale, risulta particolarmente agevole poiché la trasformata di Fourier della funzione coseno è una combinazione di delta di Dirac, infatti

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[f\right] &= \frac{1}{4!\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[\cos(x)\right] * \left((ik)^4\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x+1}\right]\right) \\
&= \frac{1}{4!\sqrt{2\pi}}(-i)\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{segno}(k-k')\,e^{i(k-k')}\left(k-k'\right)^4\Big[\delta(k'-1)+\delta(k'+1)\Big]dk' \\
&= \frac{-i}{48}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{segno}(k-1)\,e^{i(k-1)}\,(k-1)^4 + \mathrm{segno}(k+1)\,e^{i(k+1)}\,(k+1)^4\right]\,.
\end{aligned}$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

L'operatore $\hat{S}$ è definito in $L^2(E)$, cioè nello spazio di Hilbert delle funzioni a quadrato sommabili nell'insieme $E \subset \mathbb{R}$, che ha misura à la Lebesgue $\mu(E) \in (0, \infty)$, dalla legge d'azione

$$\left(\hat{S} f\right)(x) = 2\,\mathrm{Re}\left(s(x) \int_E f^*(y) dy\right), \qquad \forall\, f(x) \in L^2(E),$$

dove $s(x) \in L^2(E)$ è una funzione fissata.
Si ottengano gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore $\hat{S}$, e infine si dimostri la disuguaglianza

$$\|S\| \leq 2\sqrt{\mu(E)}\, \|s\|\,,$$

dove si considera la norma indotta dal prodotto scalare.

Soluzione del sesto Problema

La legge d'azione e in particolare la parte reale, può essere anche scritta come

$$\begin{aligned}
\left(\hat{S} f\right)(x) &= 2\,\mathrm{Re}\left(s(x) \int_E f^*(y) dy\right) \\
&= s(x) \int_E f^*(y) dy + \left(s(x) \int_E f^*(y) dy\right)^* \\
&= s(x) \int_E f^*(y) dy + s^*(x) \int_E f(y) dy\,,
\end{aligned}$$

da cui si evince che la struttura funzionale del risultato dell'azione dell'operatore $\hat{S}$ è determinata dalla combinazione della funzione $s(x)$ e della sua coniugata complessa, la funzione $f(x)$ sui cui l'operatore agisce determina solo i coefficienti di questa combinazione. Consideriamo quindi l'azione dell'operatore su una generica funzione

$$v(x) = s(x) + \alpha s^*(x) \in L^2(E), \qquad \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\,,$$

poiché l'autofunzione è definita a meno di una costante moltiplicativa, non si perde generalità ponendo uguale ad uno il coefficiente della funzione $s(x)$, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\hat{S} v\right)(x) &= s(x) \int_E \left(s^*(y) + \alpha^* s(y)\right) dy + s^*(x) \int_E \left(s(y) + \alpha s^*(y)\right) dy \\
&= s(x) \int_E \left(s^*(y) + \alpha^* s(y)\right) dy + \alpha s^*(x) \int_E \left(\frac{1}{\alpha} s(y) + s^*(y)\right) dy\,,
\end{aligned}$$

affinché si ottenga un'equazione agli autovalori è necessario che i due integrali siano uguali, il loro valore comune rappresenterà l'autovalore. Dall'imposizione dell'identità tra gli integrali si ha

$$\begin{aligned}
\int_E \left(s^*(y) + \alpha^* s(y)\right) dy &= \int_E \left(\frac{1}{\alpha} s(y) + s^*(y)\right) dy \\
\sigma^* + \alpha^* \sigma &= \frac{1}{\alpha}\sigma + \sigma^*\,, \qquad \text{dove si è definito: } \sigma = \int_E s(y) dy \\
\alpha^* \sigma &= \frac{1}{\alpha}\sigma \\
|\alpha|^2 &= 1\,,
\end{aligned}$$

ne consegue che il coefficiente α deve essere una fase pura, cioè un numero complesso con modulo unitario, poniamo $\alpha = e^{i\beta}$, $\forall\, \beta \in \mathbb{R}$. Si definisce l'insieme delle autofunzioni $\left\{v(x) = s(x) + e^{i\beta} s^*(x)\right\}_{\beta \in \mathbb{R}}$, per cui si hanno le equazioni agli autovalori

$$
\begin{aligned}
\left(\hat{S}v\right)(x) &= s(x)\int_E v^*(y)dy + s^*(x)\int_E v(y)dy \\
&= s(x)\int_E \left(s^*(y)+e^{-i\beta}s(y)\right)dy + s^*(x)\int_E \left(s(y)+e^{i\beta}s^*(y)\right)dy \\
&= s(x)\int_E \left(s^*(y)+e^{-i\beta}s(y)\right)dy + e^{i\beta}s^*(x)\int_E \left(e^{-i\beta}s(y)+s^*(y)\right)dy \\
&= \left(s(x)+e^{i\beta}s^*(x)\right)\int_E \left(e^{-i\beta}s(y)+s^*(y)\right)dy \\
&= \left(\sigma^*+e^{-i\beta}\sigma\right)v(x)\,.
\end{aligned}
$$

In definitiva, all'insieme delle autofunzioni $\left\{v_\beta(x)=s(x)+e^{i\beta}s^*(x)\right\}_{\beta\in\mathbb{R}}\subset L^2(E)$ corrisponde l'insieme degli autovalori $\left\{\lambda_\beta=\sigma^*+e^{-i\beta}\sigma\right\}_{\beta\in\mathbb{R}}\subset\mathbb{C}$, dove abbiamo inserito l'indice reale e continuo β.
La norma dell'operatore può essere ottenuta studiando quella della funzione $\left(\hat{S}f\right)(x)$ data dall'azione dello stesso operatore su una generica funzione $f(x)\in L^2(E)$. In particolare si ha

$$
\begin{aligned}
\left\|\hat{S}f\right\|^2 = \left(\hat{S}f,\hat{S}f\right) &= 4\left(\mathrm{Re}\left(s(x)\int_E f^*(y)dy\right),\mathrm{Re}\left(s(x)\int_E f^*(y)dy\right)\right) \\
&= 4\int_E \mathrm{Re}^2\left(s(x)\int_E f^*(y)dy\right)dx \le 4\int_E \left|s(x)\int_E f^*(y)dy\right|^2 dx = 4\mu(E)\,\|s\|^2\left\|f\right\|^2
\end{aligned}
$$

l'ultima maggiorazione è stata ottenuta considerando la diseguaglianza di Schwartz

$$
\left|\int_E f(x)dx\right|^2 \le \int_E dx\int_E \left|f(x)\right|^2 dx = \mu(E)\left\|f\right\|^2 .
$$

La norma dell'operatore è definita come

$$
\|S\| = \sup_{\|f\|=1}\left\{\left\|\hat{S}f\right\|\right\},
$$

ed è quindi maggiorata dal doppio della norma della funzione $s(x)$ per la radice quadrata della misura dell'insieme E, ovvero

$$
\|S\| = \sup_{\|f\|=1}\left\{\left\|\hat{S}f\right\|\right\} \le \sup_{\|f\|=1}\left\{2\sqrt{\mu(E)}\left\|f\right\|\|s\|\right\} = 2\sqrt{\mu(E)}\,\|s\|\,,
$$

che rappresenta la maggiorazione richiesta.