Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 20 febbraio 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \,\mathrm{sen}\,(1/x)}{x^4+2} dx\,.$$

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è pari, quindi è possibile riscrivere l'integrale come

$$Q = 2\int_{0}^{\infty} \frac{x \,\mathrm{sen}\,(1/x)}{x^4+2} dx\,.$$

Facciamo la sostituzione $w = 1/x$, si ha

$$Q = -2\int_{\infty}^{0} \frac{\mathrm{sen}\,(w)}{1/w^4+2}\frac{dw}{w^3} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{w\,\mathrm{sen}\,(w)}{1+2w^4} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w\,\mathrm{sen}\,(w)}{1+2w^4} dw\,,$$

l'ultima identità segue dalla parità della funzione integranda anche nelle nuova variabile w. Scrivendo la funzione seno come somma di esponenziali si ottengono due integrali che possono essere calcolati con il lemma di Jordan, infatti

$$Q = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w\,e^{iw}}{1+2w^4} dw - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w\,e^{-iw}}{1+2w^4} dw \equiv Q_1 + Q_2\,.$$

È facile vedere che i due integrali Q_1 e Q_2 sono l'uno il complesso coniugato dell'altro, quindi

$$Q = 2\mathrm{Re}(Q_1) = 2\mathrm{Re}(Q_2)\,.$$

Per calcolare l'integrale Q_1, consideriamo l'integrale della stessa funzione integranda sul percorso chiuso $\Gamma_R = \left\{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in (0,\pi)\right\} \cup [-R,R]$ e ne studiamo il comportamento nel limite $R \to \infty$. Usando il lemma di Jordan si ha

$$Q_1 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_R} \frac{w\,e^{iw}}{1+2w^4} dw = \pi \sum_{\mathrm{Im}(w_k)>0} \mathrm{Res}\left[\frac{w\,e^{iw}}{1+2w^4}, w_k\right],$$

la somma è effettuata sui residui delle singolarità che hanno parte immaginaria strettamente positiva e che quindi, per sufficientemente grane ($R > |w_k|$), sono interni al percorso Γ_R. La funzione integranda ha quattro poli semplici nelle quattro radici quarte di $w = -1/2$,

$$w_k = \frac{e^{i\pi(2k+1)/4}}{2^{1/4}}\,, \qquad k = 0,1,2,3\,.$$

Solo w_0 e w_1 appartengono al semipiano delle parti immaginarie positive, quindi

$$Q_1 = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_R} \frac{w\,e^{iw}}{1+2w^4} dw = \pi\mathrm{Res}\left[\frac{w\,e^{iw}}{1+2w^4}, w_0\right] + \pi\mathrm{Res}\left[\frac{w\,e^{iw}}{1+2w^4}, w_1\right].$$

I residui sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{w\,e^{iw}}{1+2w^4}, w_k\right] = \frac{e^{iw_k}}{8w_k^2}\,,$$

quindi il limite dell'integrale su Γ_R,

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2i}\oint_{\Gamma_R}\frac{w\,e^{iw}}{1+2w^4}dw = \frac{\pi}{8}\left(\frac{e^{iw_0}}{w_0^2}+\frac{e^{iw_1}}{w_1^2}\right) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\exp\left(ie^{i\pi/4}/2^{1/4}\right)}{e^{i\pi/2}/2^{1/2}}+\frac{\exp\left(ie^{3i\pi/4}/2^{1/4}\right)}{e^{3i\pi/2}/2^{1/2}}\right)\\
&= \frac{\pi}{2^{5/2}i}\left[\exp\left(ie^{i\pi/4}/2^{1/4}\right)-\exp\left(ie^{3i\pi/4}/2^{1/4}\right)\right] = \frac{\pi}{2^{5/2}i}\left[\exp\left(\frac{-1+i}{2^{3/4}}\right)-\exp\left(\frac{-1-i}{2^{3/4}}\right)\right]\\
&= \frac{\pi}{2^{5/2}i}\exp\left(-\frac{1}{2^{3/4}}\right)\left(e^{i/2^{3/4}}-e^{-i/2^{3/4}}\right)\\
Q_1 &= \frac{\pi}{2^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{2^{3/4}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^{3/4}}\right).
\end{aligned}$$

L'integrale Q_1 è reale, ne consegue che l'integrale completo vale

$$Q = 2\operatorname{Re}(Q_1) = 2Q_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{1}{2^{3/4}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2^{3/4}}\right).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si ottenga la somma della serie

$$S = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j+1}{1+j^2}\,.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La serie ha solo i termini pari, infatti per valori dispari dell'indice il numeratore è nullo, ne consegue che può essere posta nella forma

$$S = 2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+4j^2}\,.$$

In termini della funzione

$$f(z) = \frac{2}{1+4z^2}\,,$$

si ha

$$S = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j)\,.$$

Definiamo la funzione

$$F(z) = \pi\frac{\cos(z\pi)}{\operatorname{sen}(z\pi)}f(z)\,,$$

e ne consideriamo gli integrali sulle circonferenze centrate nell'origine di raggio semi-intero

$$C_n = \{z : |z| = n+1/2\}\,, \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

All'interno della circonferenza C_n la funzione $F(z)$ ha i poli semplici nei punti dell'insieme $\{z_k = k\}_{k=-n}^{n}$, dovuti alla funzione seno a denominatore e la coppia $z_\pm = \pm i/2$, che rappresenta gli zeri del polinomio a denominatore della funzione $f(z)$. L'integrali su C_n si ottiene con il teorema dei residui e vale

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{C_n}F(z)dz = \sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}\left[F(z),z_k\right]+\operatorname{Res}\left[F(z),z_+\right]+\operatorname{Res}\left[F(z),z_-\right].$$

I residui nei punti dell'insieme $\{z_k = k\}_{k=-n}^{n}$ hanno, per costruzione, i valori corrispondenti ai termini delle due serie la cui somma dà la serie originale S, in particolare si hanno

$$\mathrm{Res}\left[F(z), z_k\right] = f(k)\,.$$

I residui nei poli semplici $z_\pm = \pm\, i/2$ valgono

$$\mathrm{Res}\left[F(z), \pm i/2\right] = \pi \frac{\cos(\pm i\pi/2)}{\mathrm{sen}(\pm i\pi/2)} \frac{1}{\pm 2i} = \pi \frac{\cosh(\pi/2)}{\mathrm{sen}(i\pi/2)} \frac{1}{2i} = -\pi \frac{\cosh(\pi/2)}{2\,\mathrm{senh}(\pi/2)}\,.$$

Consideriamo, infine, il limite $n \to \infty$. Poiché, uniformemente sulle circonferenze C_n, si hanno i limiti

$$\lim_{n\to\infty} zF(z) \overset{\text{unif.}}{=} 0\,,$$

anche l'integrali della funzione $F(z)$ è infinitesimo, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{C_n} F(z)dz = 0\,.$$

In termini dei residui si hanno le identità

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Res}\left[F(z), z_k\right] + \mathrm{Res}\left[F(z), i/2\right] + \mathrm{Res}\left[F(z), -i/2\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) - \pi \frac{\cosh(\pi/2)}{\mathrm{senh}(\pi/2)}\,,$$

da cui si ottiene la serie originale

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \pi \frac{\cosh(\pi/2)}{\mathrm{senh}(\pi/2)}\,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Dopo averne definito i domini di convergenza, si ricavino le serie di Laurent centrate in $z = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z+1} \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Soluzione del terzo problema

La funzione $f(z)$ ha una singolarità essenziale, dovuta all'esponenziale, in $z = 1$ e un polo semplice in $z = -1$, ne consegue che i domini di convergenza delle serie di Laurent con centro in $z = 1$ sono le corone circolari

$$C_{0,2}(1) = \{z : 0 < |z-1| < 2\}\,, \qquad C_{2,\infty}(1) = \{z : |z-1| > 2\}\,.$$

La serie di Laurent in $C_{0,2}(1)$

Consideriamo come prima serie quella convergente nella corona $C_{0,2}(1)$. Riscrivendo la variabile z come $(z-1)+1$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2+(z-1)} \exp\left(\frac{(z-1)+2}{z-1}\right) = \frac{e}{2} \frac{1}{1+(z-1)/2} \exp\left(\frac{2}{z-1}\right).$$

Poiché $z \in C_{0,2}(1)$ vale la condizione

$$0 < |z-1| < 2 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < \frac{|z-1|}{2} < 1\,,$$

possiamo scrivere il secondo fattore come somma della serie geometrica di ragione $-(z-1)/2$, mentre per il terzo fattore, cioè l'esponenziale si ha il solito sviluppo in serie con raggio di convergenza infinito, si ottiene quindi

$$f(z) = \frac{e}{2} \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{2^{k-j}(-1)^j}{k!} (z-1)^{j-k} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m (z-1)^m\,,$$

dove $\{C_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ è l'insieme dei coefficienti di Laurent. Questi ultimi si ottengono nella forma di serie, ovvero

$$C_m = \frac{e}{2}\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{2^{k-j}(-1)^j}{k!}\delta_{j-k,m} = \frac{e}{2}\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{2^{k-j}(-1)^j}{k!}\delta_{j,k+m}\,.$$

Poiché le somme si hanno solo per $j,k \geq 0$ è necessario considerare esplicitamente i casi in cui l'indice di Laurent m sia negativo e non negativo. Infatti dalla condizione $k = j - m$, imposta dalla delta di Kronecker, essendo $j \geq 0$, si ottiene $k \geq -m$. Quest'ultima condizione, per valori di $m \geq 0$, non dà alcun vincolo in quanto $k \geq 0$. Invece, se $m \leq -1$, si ha $k \geq -m = |m|$. Ne consegue che i coefficienti di Laurent sono

$$C_m = \begin{cases} \dfrac{e}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{-m}(-1)^{k+m}}{k!} = \frac{e}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1} & m \geq 0 \\[2ex] \dfrac{e}{2}\displaystyle\sum_{k=|m|}^{\infty}\frac{2^{-m}(-1)^{k+m}}{k!} = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+1}\left(1 - e\sum_{k=0}^{|m|-1}\frac{(-1)^k}{k!}\right) & m \leq -1 \end{cases}$$

La serie di Laurent in $C_{2,\infty}(1)$

Riscrivendo, anche in questo caso, la variabile z come $(z-1)+1$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{2+(z-1)}\exp\left(\frac{(z-1)+2}{z-1}\right) = \frac{e}{z-1}\,\frac{1}{1+2/(z-1)}\exp\left(\frac{2}{z-1}\right).$$

Poiché $z \in C_{2,\infty}(1)$ vale la condizione

$$2 < |z-1| < \infty \qquad \Rightarrow \qquad 1 < \frac{|z-1|}{2} < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \infty^{-1} = 0 < \frac{2}{|z-1|} < 1 = 1^{-1}\,,$$

quindi il secondo fattore è la somma della serie geometrica di ragione $-2/(z-1)$, mentre per il terzo fattore, come prima, si ha lo sviluppo in serie con raggio di convergenza infinito, si ha

$$f(z) = \frac{e}{z-1}\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{2^{k+j}(-1)^j}{k!} = e\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{2^{k+j}(-1)^j}{k!}(z-1)^{-k-j-1} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty}D_m(z-1)^m\,,$$

$\{D_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ è l'insieme dei coefficienti di Laurent. È facile notare che sono presenti solo potenze negative, ovvero $D_m = 0$ se $m \geq 0$. I coefficienti con indici negativi, $m \leq -1$, sono

$$C_m = e\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{2^{k+j}(-1)^j}{k!}\delta_{m,-k-j-1}\,.$$

Poiché la delta di Kronecker impone $k = -m - j - 1 = |m| - j - 1$ e $j,k \geq 0$, si ha $k \leq |m| - 1$, ovvero, posto $j = -k - m - 1$, si ottengono i coefficienti di Laurent

$$D_m = \begin{cases} 0 & m \geq 0 \\[2ex] e(-2)^{-m-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{-m-1}\frac{(-1)^k}{k!} & m \leq -1 \end{cases}\,.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si determinino autovalori e autovettori dell'operatore

$$\hat{A} = |e_1\rangle\langle e_2| - |e_2\rangle\langle e_1|\,,$$

definito in uno spazio di Hilbert a tre dimensione in termini dei vettori dell'insieme ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3}$.
Si dimostri inoltre l'identità

$$\hat{A}^{2n+1} = (-1)^n\hat{A}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Soluzione del quarto problema

Descriviamo due procedure risolutive.

Prima procedura risolutiva del quarto problema

La rappresentazione del generico autovettore $|v\rangle$ rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3}$ è

$$|v\rangle = \sum_{k=1}^{3} \langle e_k|v\rangle |e_k\rangle \equiv v^k |e_k\rangle \,.$$

Usando questa rappresentazione nell'equazione agli autovalori per l'operatore $\hat{A}$, si ottiene l'equazione secolare, ovvero l'equazione che definisce gli autovalori. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\hat{A}|v\rangle &= \lambda|v\rangle \\
\hat{A}\left(v^k|e_k\rangle\right) &= v^k \hat{A}|e_k\rangle = \lambda\left(v^j|e_j\rangle\right) \\
v^2|e_1\rangle - v^1|e_2\rangle &= \lambda\left(v^1|e_1\rangle + v^2|e_2\rangle + v^3|e_3\rangle\right) \,.
\end{aligned}$$

L'indentità finale implica le tre equazioni

$$v^2 = \lambda v^1 \,, \qquad -v^1 = \lambda v^2 \,, \qquad \lambda v^3 = 0 \,,$$

da cui, posto $v^1 = 1$, $v^3 = 0$, che verifica la terza equazione, ed eliminando v^2 dalle prime due, si ottiene da queste l'equazione per gli autovalori, cioè

$$\begin{cases} v^2 = \lambda \\ -1 = \lambda v^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{\pm} = \pm i \,.$$

D'altro canto, con $v^3 \neq 0$, ad esempio $v^3 = 1$, dall'equazione $\lambda v^3 = 0$ si ottiene il terzo autovalore $\lambda_0 = 0$, che sostituito nelle prime due dà $v^1 = v^2 = 0$. In definitiva, gli autovalori sono $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_{\pm} = \pm i$. Da questi, usando le equazioni precedenti, si calcolano i coefficienti degli autovettori come

$$\begin{array}{lll}
v_+^1 = 1/\sqrt{2} & v_-^1 = 1/\sqrt{2} & v_0^1 = 0 \\[1ex]
v_+^2 = i/\sqrt{2} & v_-^2 = -i/\sqrt{2} & v_0^2 = 0 \\[1ex]
v_+^3 = 0 & v_-^3 = 0 & v_0^3 = 1
\end{array} \,,$$

quindi gli autovettori sono

$$|v_{\pm}\rangle = \frac{|e_1\rangle \pm i|e_2\rangle}{\sqrt{2}} \,, \qquad |v_0\rangle = |e_3\rangle \,.$$

Poiché l'operatore $\hat{A}$ è evidentemente antihermitiano, è quindi normale, come si può anche evincere dal fatto che gli autovettori sono ortonormali, possiamo allora usare la rappresentazione spettrale

$$\hat{A} = \sum_{\alpha=+,-,0} \lambda_\alpha \hat{P}_\alpha \,,$$

dove $\left\{\hat{P}_+, \hat{P}_-, \hat{P}_0, \right\}$ è un insieme di proiettori normali e tali che la loro somma sia l'identità, cioè

$$\sum_{\alpha=+,-,0} \lambda_\alpha \hat{P}_\alpha = \hat{I} \,.$$

La potenza dispari $2n+1$ dell'operatore, con $n \in \mathbb{N}$, è un operatore che ha la rappresentazione spettrale

$$\hat{A}^{2n+1} = \sum_{\alpha=+,-,0} \lambda_\alpha^{2n+1} \hat{P}_\alpha \,,$$

le potenze degli autovalori sono

$$\begin{aligned}
&\lambda_+^{2n+1} = i^{2n+1} = i^{2n} i = (-1)^n i = (-1)^n \lambda_+ \,, \\
&\lambda_-^{2n+1} = (-i)^{2n+1} = (-i)^{2n}(-i) = (-1)^n(-i) = (-1)^n \lambda_- \,, \\
&\lambda_0^{2n+1} = 0 = (-1)^n 0 = (-1)^n \lambda_0 \,,
\end{aligned}$$

da cui

$$\hat{A}^{2n+1} = \sum_{\alpha=+,-,0} \lambda_\alpha^{2n+1} \hat{P}_\alpha = (-1)^n \sum_{\alpha=+,-,0} \lambda_\alpha \hat{P}_\alpha = (-1)^n \hat{A},$$

che è l'identità che si volava dimostrare.

Seconda procedura risolutiva del quarto problema

La matrice A che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_3\rangle \\ \langle e_2|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_3\rangle \\ \langle e_3|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori risolvendo l'equazione secolare

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda\left(\lambda^2 + 1\right) = 0\,,$$

si hanno i tre autovalori

$$\lambda_\pm = \pm i\,, \qquad \lambda_0 = 0\,.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_d che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base dei suoi autovettori, che rappresentano una base ortonormale, è ovviamente diagonale, ovvero si ha

$$A_d = \mathrm{diag}(i, -i, 0)\,.$$

In generale, la matrice A, che rappresenta lo stesso operatore $\hat{A}$ rispetto ad un base ortonormale generica, ha con la matrice A_d le seguenti relazioni

$$A_d = U^\dagger A U\,, \qquad A = U A_d U^\dagger\,,$$

dove U è la matrice unitaria, in quanto l'operatore è normale, che definisce il passaggio dalla base degli autovettori a quella generica. La potenza dispari $2n+1$, con $n \in \mathbb{N}$, della matrice diagonale A_d è

$$A_d^{2n+1} = \mathrm{diag}\left(i^{2n+1}, (-i)^{2n+1}, 0\right) = (-1)^n \mathrm{diag}\,(i, -i, 0) = (-1)^n A_d\,,$$

verifica quindi l'identità che vorremmo dimostrare per l'operatore $\hat{A}$. Consideriamo la potenza $2n+1$, con $n \in \mathbb{N}$, della matrice A e usiamo, sia la sua relazione con A_d, che l'identità tra la stessa matrice A_d e la sua potenza $(2n+1)$-esima, avremo

$$A^{2n+1} = \underbrace{\left(UA_dU^\dagger\right)\left(UA_dU^\dagger\right)\cdots\left(UA_dU^\dagger\right)}_{2n+1 \text{ volte}} = UA_d^{2n+1}U^\dagger = (-1)^n U^\dagger A_d U = (-1)^n A.$$

Il fatto che questa identità sia stata ottenuta per una rappresentazione generica ne dimostra la validità per l'operatore.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si ricavino gli autovalori della matrice 2×2 M, definita dalla serie

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3\right)^k\,,$$

dove σ_1, σ_2 e σ_3 sono le tre matrici di Pauli e α, β e γ sono tre parametri reali.

Soluzione del quinto problema

Sfruttando l'algebra della matrici di Pauli, in particolare il fatto che siano anticommutanti e abbiano quadrato uguale ll'identità I, ovvero

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk} I \,,$$

si ha che il quadrato della combinazione delle matrici di Pauli è proporzionale all'identità, cioè

$$(\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3)^2 = \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) I \,.$$

Ne consegue che le potenze pari sono anch'esse proporzionali all'identità, mentre quelle dispari sono proporzionali alla combinazione iniziale, ovvero, $\forall \; \| \in \| \; \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3)^{2n} &= \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)^n I \,,\\ (\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3)^{2n+1} &= \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)^n (\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3) \,.\end{aligned}$$

Alla luce di questi risultati, scriviamo la serie che definisce la matrice M, separando i contributi pari e dispari

$$M = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)^n}{(2n)!} + (\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)^n}{(2n+1)!} \,.$$

Osserviamo che le due serie possono essere ricondotte alle serie di Taylor delle funzioni coseno iperbolico e seno iperbolico di $x \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, infatti

$$\begin{aligned}M &= I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right)^{2n}}{(2n)!} + \frac{\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\ &= I \cosh\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right) + (\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3) \frac{\operatorname{senh}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}\\ &= I \cosh(x) + (\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3) \frac{\operatorname{senh}(x)}{x} \,,\end{aligned}$$

in forma matriciale si ha

$$M = \begin{pmatrix} \cosh(x) + \gamma \operatorname{senh}(x)/x & (\alpha - i\beta) \operatorname{senh}(x)/x \\ (\alpha + i\beta) \operatorname{senh}(x)/x & \cosh(x) - \gamma \operatorname{senh}(x)/x \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare,

$$\begin{aligned}\det(M - \lambda I) &= 0\\ (\cosh(x) - \lambda)^2 - \gamma^2 \frac{\operatorname{senh}(x)}{x^2} - \left(\alpha^2 + \beta^2\right) \frac{\operatorname{senh}^2(x)}{x^2} &= 0\\ (\cosh(x) - \lambda)^2 - \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) \frac{\operatorname{senh}^2(x)}{x^2} &= 0\\ (\cosh(x) - \lambda)^2 - \operatorname{senh}^2(x) &= 0 \,,\end{aligned}$$

dove si è usata l'identità $x^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. In definitiva i due autovalori sono

$$\lambda_\pm = \cosh(x) \pm \operatorname{senh}(x) = e^{\pm x} \,.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Usando le serie di Fourier delle funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$, si calcoli la somma della serie

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^4} \,.$$

Soluzione del sesto Problema

Entrambe le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$ sono pari, le serie di Fourier hanno quindi solo termini con le funzioni coseno, ovvero

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(kx)\,, \qquad g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cos(kx)\,,$$

i coefficienti sono dati dagli integrali

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx\,, \qquad c_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(jx)dx\,.$$

Iniziamo con il coefficiente "zero" della funzione $f(x)$, si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}\,.$$

I coefficienti con indice $j > 0$ si ottengono integrando, iterativamente per parti, ovvero

$$\begin{aligned}
a_j &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(jx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{x^2\frac{\operatorname{sen}(jx)}{j}\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{2}{j}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen}(jx)dx\right) = -\frac{2}{j\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen}(jx)dx \\
&= -\frac{2}{j\pi}\left(-x\frac{\cos(jx)}{j}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{j}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)dx}_{0}\right) = (-1)^j\frac{4}{j^2}\,,
\end{aligned}$$

quindi la serie di Fourier è

$$f(x) = x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j^2}\cos(jx)\,.$$

Il primo coefficiente della funzione $g(x)$ è

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{5}\,.$$

I coefficienti c_j con $j > 0$ sono

$$\begin{aligned}
c_j &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(jx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\cos(jx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{x^4\frac{\operatorname{sen}(jx)}{j}\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{4}{j}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\operatorname{sen}(jx)dx\right) = -\frac{4}{j\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^3\operatorname{sen}(jx)dx \\
&= -\frac{4}{j\pi}\left(\underbrace{-x^3\frac{\cos(jx)}{j}\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{-2\pi^3(-1)^j/j} + \frac{3}{j}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(jx)dx\right) = \frac{8\pi^2}{j^2}(-1)^j - \frac{12}{j^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(jx)dx \\
&= \frac{8\pi^2}{j^2}(-1)^j - \frac{12}{j^2\pi}\left(\underbrace{x^2\frac{\operatorname{sen}(jx)}{j}\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{0} - \frac{2}{j}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen}(jx)dx\right) = \frac{8\pi^2}{j^2}(-1)^j + \frac{24}{j^3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\operatorname{sen}(jx)dx \\
&= \frac{8\pi^2}{j^2}(-1)^j + \frac{24}{j^3\pi}\left(\underbrace{-x\frac{\cos(jx)}{j}\bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{-2\pi(-1)^j/j} + \underbrace{\frac{1}{j}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)dx}_{0}\right) = \frac{8\pi^2}{j^2}(-1)^j - \frac{48}{j^4}(-1)^j \\
&= (-1)^j\frac{8}{j^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{j^2}\right),
\end{aligned}$$

da cui si ha serie di Fourier

$$g(x) = x^4 \sim \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{j^2}\right)\cos(jx)\,.$$

Poiché la funzione $g(x)$ è continua, la serie converge puntualmente in nell'intervallo intervallo $(-\pi, \pi)$. Per ottenere una serie a segni alterni, valutiamo la funzione $g(x)$ e di conseguenza la serie di Fourier, in $x = \pi/2$,

$$g(\pi/2) = \frac{\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{j^2}\right)\cos(j\pi/2)\,,$$

i termini dispari sono nulli, mentre quelli pari hanno segni alterni in virtù della funzione $\cos(j\pi/2)$, infatti

$$\frac{\pi^4}{16} = \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2}\left(\pi^2 - \frac{6}{(2k)^2}\right)\cos(k\pi) = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2} - 48\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^4}\,,$$

l'ultima è la serie cercata,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^4} = \frac{1}{48}\left(\frac{11\pi^4}{80} + 8\pi^2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2}\right).$$

La serie a secondo membro può essere calcolata sfruttando la serie di Fourier della funzione $f(x)$ valutata in $x = \pi/2$. Anche in questo caso la continuità della funzione garantisce la convergenza puntuale

$$f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2}\cos(j\pi/2)\,,$$

sono non nulli solo i termini pari,

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2}\cos(k\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2}\,,$$

ovvero

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2} = -\frac{\pi^2}{48}\,.$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione della serie cercata, si ha il risultato finale

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^4} = \frac{1}{48}\left(\frac{11\pi^4}{80} - \frac{\pi^4}{6}\right) = -\frac{7\pi^4}{11520}\,.$$