Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 20 febbraio 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$J = \int_\rho \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz \,,$$

dove il percorso di integrazione è la prima bisettrice del piano complesso

$$\rho = \{z : \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) = 0\} \,.$$

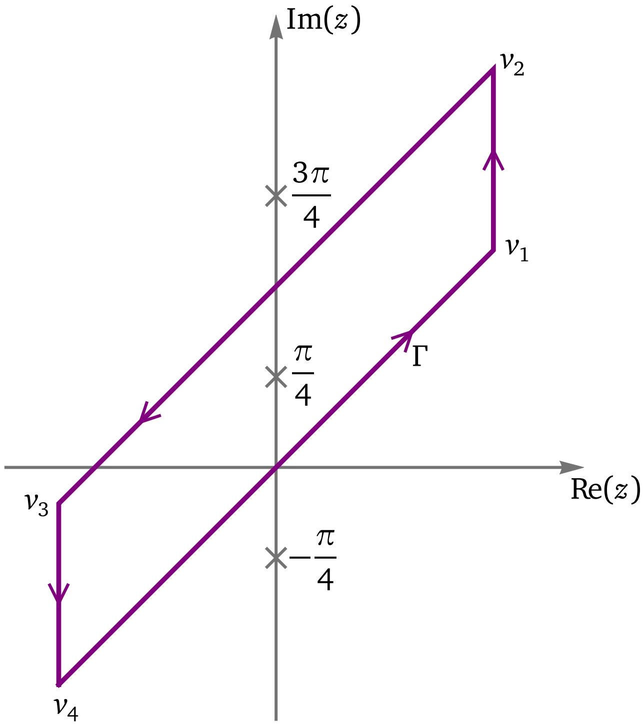
Soluzione del primo problema

L'integranda ha poli semplici nei punti

$$z_k = (2k+1)\frac{i\pi}{4} \,, \qquad k \in \mathbb{Z} \,,$$

in cui si annulla la funzione coseno iperbolico a denominatore. Consideriamo il percorso di integrazione, Γ, mostrato in figura, ovvero un parallelogramma di vertici

$$v_1 = R + iR \,, \qquad v_2 = R + i(R + \pi/2) \,,$$
$$v_3 = -R - i(R - \pi/2) \,, \qquad v_4 = -R - iR \,.$$



L'integrale su Γ coincide con il residuo in $z = z_0 = i\pi/4$

$$\oint_\Gamma \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz = 2i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{z e^z}{\cosh(2z)}, \frac{i\pi}{4}\right] = \frac{i\pi^2 e^{i\pi/4}}{4} \,,$$

ed è indipendente da R.
Inoltre, con la sostituzione $z' = z - i\pi/2$, sul tratto che unisce i punti v_2 e v_3,

$$\lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz = J - \int_\rho \frac{(z' + i\pi/2) e^{z' + i\pi/2}}{-\cosh(2z')} dz'$$
$$+ \lim_{R\to\infty} \int_{[v_1,v_2]} \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz + \lim_{R\to\infty} \int_{[v_3,v_4]} \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz \,,$$

dove abbiamo indicato con $[z_1, z_2]$ il tratto rettilineo che unisce i punti z_1 e z_2, orientato da z_1 verso z_2.

Dimostriamo che gli integrali sui tratti verticali

$$
\begin{aligned}
D_R &= \int_{[v_1,v_2]} \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz = \{z = R + iy\} = i \int_R^{R+\pi/2} \frac{(R+iy)e^{R+iy}}{\cosh(2R+2iy)} dy\,, \\
L_R &= \int_{[v_3,v_4]} \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz = \{z = -R + iy\} = i \int_{-R+\pi/2}^{-R} \frac{(-R+iy)e^{-R+iy}}{\cosh(-2R+2iy)} dy\,.
\end{aligned}
$$

sono infinitesimi nel limite $R \to \infty$. Usando la disuguaglianza di Darboux

$$
\begin{aligned}
|D_R| &\le \int_R^{R+\pi/2} \frac{|R+iy||e^{R+iy}|}{|\cosh(2R+2iy)|} dy = 2\int_R^{R+\pi/2} \frac{\sqrt{R^2+y^2}\, e^R}{|e^{2R+2iy}+e^{-2R-2iy}|} dy \\
&\le 2\sqrt{R^2+(R+\pi/2)^2}\frac{e^R}{e^{2R}-e^{-2R}} \int_R^{R+\pi/2} dy \\
&= \pi\sqrt{R^2+(R+\pi/2)^2}\frac{e^R}{e^{2R}-e^{-2R}} \underset{R\to\infty}{\sim} \pi\sqrt{2}R\,e^{-R} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,; \\
|L_R| &\le \int_{-R}^{-R+\pi/2} \frac{|-R+iy||e^{-R+iy}|}{|\cosh(-2R+2iy)|} dy = 2\int_{-R}^{-R+\pi/2} \frac{\sqrt{R^2+y^2}\, e^{-R}}{|e^{-2R+2iy}+e^{2R-2iy}|} dy \\
&\le 2\sqrt{R^2+(R-\pi/2)^2}\frac{e^{-R}}{e^{2R}-e^{-2R}} \int_{-R}^{-R+\pi/2} dy \\
&= \pi\sqrt{R^2+(R-\pi/2)^2}\frac{e^{-R}}{e^{2R}-e^{-2R}} \underset{R\to\infty}{\sim} \pi\sqrt{2}R\,e^{-3R} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.
\end{aligned}
$$

Ne consegue che valgono le identità

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz = J + \int_\rho \frac{(z'+i\pi/2)e^{z'+i\pi/2}}{\cosh(2z')} dz' = J\,(1+i) - \frac{\pi}{2}\int_\rho \frac{e^z}{\cosh(2z)} dz \\
&\lim_{R\to\infty} \oint_\Gamma \frac{z e^z}{\cosh(2z)} dz = 2i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{z e^z}{\cosh(2z)}, \frac{i\pi}{4}\right] = \frac{i\pi^2 e^{i\pi/4}}{4}\,,
\end{aligned}
$$

potremmo ottenere il valore di J qualora conoscessimo quello dell'integrale nell'ultimo membro della prima equazione. Tale valore può essere calcolato con una procedura analoga, ovvero, consideriamo l'integrale sul percorso chiuso Γ, e usiamo il teorema dei residui e la scomposizione dell'integrale. Si hanno quindi

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{e^z}{\cosh(2z)} dz = 2i\pi \mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{\cosh(2z)}, \frac{i\pi}{4}\right] = \pi e^{i\pi/4}\,, \\
&\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma \frac{e^z}{\cosh(2z)} dz = (1+i)\int_\rho \frac{e^z}{\cosh(2z)} dz = \sqrt{2}e^{i\pi/4}\int_\rho \frac{e^z}{\cosh(2z)} dz\,,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\int_\rho \frac{e^z}{\cosh(2z)} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.
$$

Usando questo risultato otteniamo il valore di J

$$
\begin{aligned}
J\,(1+i) - \frac{\pi}{2}\int_\rho \frac{e^z}{\cosh(2z)} dz &= \frac{i\pi^2 e^{i\pi/4}}{4} \\
J\,(1+i) - \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} &= \frac{\pi^2(-1+i)}{4\sqrt{2}} \\
J &= \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga il valore dell'integrale

$$O = \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{x^3-1} dx\,.$$

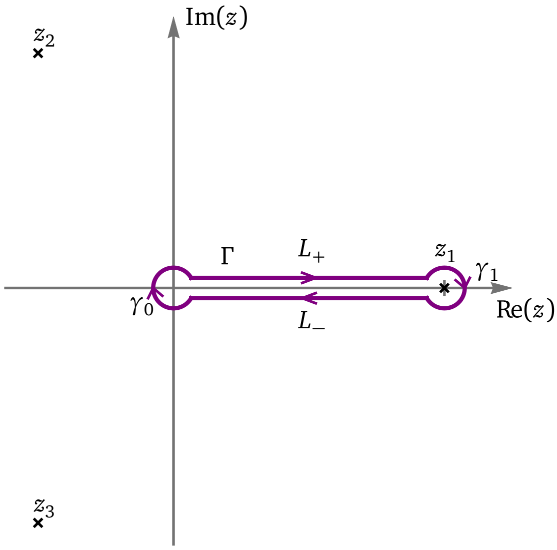
Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è polidroma e ha due poli semplici in $z_{2,3} = e^{\pm 2i\pi/3}$, l'origine e il punto $z_1 = 1$ rappresentano punti di diramazione di ordine uno. Consideriamo il percorso di integrazione chiuso, Γ, mostrato in figura, che avvolge in senso orario il segmento reale $[0,1]$.

Il polinomio sotto radice, $z(1-z)$, può essere fattorizzato come prodotto delle funzioni

$$\begin{aligned} z &= |z| e^{i\theta_1} \qquad && \theta_1 \in (0, 2\pi)\,, \\ 1-z &= |1-z| e^{i\theta_2} \qquad && \theta_2 \in (-\pi, \pi)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

le fasi sono state definite in modo tale che il taglio sia effettiva lungo l'intervallo di integrazione $[0,1]$. Infatti, il punto di diramazione nell'origine genera, in virtù della fase θ_1, un taglio lungo il semiasse reale positivo; mentre il punto di diramazione in $z = 1$ produce un taglio che si estende lungo la semiretta $(1, \infty)$. Nella regione di sovrapposizione i due tagli si elidono, la discontinuità risultante è limitata all'intervallo di integrazione $[0,1]$.



L'integrale sul percorso Γ può essere calcolato con il teorema dei residui. Inoltre, scomponendo il percorso nell'unione dei due tratti rettilinei $L_\pm$ e dei due archi infinitesimi $\gamma_{0,1}$, mostrati in figura, si ha

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz &= \int_{L_+} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz + \int_{L_-} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz - \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\int_{\gamma_0} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz + \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz \right) \\ &= \int_{L_+} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz + \int_{L_-} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz \\ &= 2i\pi \left(\text{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_2 \right] + \text{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_3 \right] + \text{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, \infty \right] \right). \end{aligned}$$

Dove sono stati usati i limiti

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{0,1}} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz = 0\,,$$

che sono conseguenza dei limiti uniformi sugli archi γ_0 e γ_1

$$\lim_{\epsilon\to 0^+ (z\to 0)} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} z = 0\,, \qquad \lim_{\epsilon\to 0^+ (z\to 1)} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} (z-1) = 0\,.$$

Il residuo all'infinito è nullo, lo si dimostra usando la relazione

$$\text{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, \infty \right] = -\text{Res}\left[\frac{\sqrt{(1-1/w)/w}}{1/w^3-1} \frac{1}{w^2}, 0 \right],$$

e verificando che la funzione di cui si sta calcolando il residuo nell'origine è ivi regolare. Infatti, a meno di un segno dovuto all'estrazione della radice: $\sqrt{w^2} = \pm w$, si ha che il valore limite

$$\frac{\sqrt{(1-1/w)/w}}{1/w^3-1} \frac{1}{w^2} = \pm \frac{\sqrt{w-1}}{1-w^3} \underset{w\to 0}{\longrightarrow} = \pm 1\,,$$

è definito e quindi, come anticipato,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, \infty\right] = 0\,.$$

La somma degli integrali sui tratti rettilinei vale

$$\int_{L_+} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz + \int_{L_-} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1} dz = \int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}e^{i0}}{x^3-1} dx + \int_1^0 \frac{\sqrt{x(1-x)}e^{i\pi st}}{x^3-1} dx = 2O\,.$$

Riprendendo l'identità precedente, ottenuta con il teorema dei residui e considerato il valore nullo di quello all'infinito, avremo

$$O = i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_2\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_3\right]\right).$$

I residui dei poli semplici si ottengono con i limiti

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_{2,3}\right] = \lim_{z\to z_{2,3}} \frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}(z - z_{2,3}) = \frac{\sqrt{z_{2,3}(1-z_{2,3})}}{3z_{2,3}^2}\,,$$

ricordando che

$$z_{2,3} = e^{\pm 2i\pi/3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

In particolare per z_2 si ha

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_2\right] = \frac{\sqrt{e^{2i\pi/3}\left(3/2 - i\sqrt{3}/2\right)}}{3e^{4i\pi/3}} = \frac{1}{3}e^{-i\pi}\sqrt{\sqrt{3}\,e^{-i\pi/6}} = -\frac{1}{3^{3/4}}e^{-i\pi/12}\,,$$

dove per il numero $\left(3/2 - i\sqrt{3}/2\right)$ si è usata la determinazione $(-\pi,\pi)$ in accordo con quanto stabilito nell'Eq. (1).
Il residuo in z_3 vale

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_3\right] = \frac{\sqrt{e^{4i\pi/3}\left(1/2 + i\sqrt{3}/2\right)}}{3e^{8i\pi/3}} = \frac{1}{3}e^{-2i\pi}\sqrt{\sqrt{3}\,e^{i\pi/6}} = \frac{1}{3^{3/4}}e^{i\pi/12}\,,$$

in questo caso per la prima funzione sotto la radice si è usata la determinazione $(0, 2\pi)$, quindi $e^{4i\pi/3}$ anziché $e^{-2i\pi/3}$; mentre, per la seconda funzione, $\left(3/2 + i\sqrt{3}/2\right)$, la determinazione è $(-\pi,\pi)$, come nel caso precedente.
In definitiva

$$O = i\pi\left(\operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_2\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{\sqrt{z(1-z)}}{z^3-1}, z_3\right]\right) = \frac{i\pi}{3^{3/4}}\left(e^{i\pi/12} - e^{-i\pi/12}\right) = -\frac{2\pi}{3^{3/4}}\operatorname{sen}(\pi/12)\,.$$

Calcoliamo il valore della funzione seno in $\pi/12$ usando la formula di duplicazione $\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta)$ e si ha

$$\operatorname{sen}(\pi/12) = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\,,$$

quindi il risultato finale diventa

$$O = -\frac{2\pi}{3^{3/4}}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = -\frac{\pi}{3^{3/4}}\sqrt{2-\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{3}\sqrt{2\sqrt{3}-3}\,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$t(z) = \frac{1}{1-\cos(z)}\,.$$

Potrebbe essere necessaria la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Soluzione del terzo problema

La funzione è meromorfa, ha poli nei punti in cui la funzione coseno vale 1, ovvero in $z_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In questi i poli sono doppi, infatti usando lo sviluppo in serie di Taylor centrato nell'origine

$$\cos(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!},$$

per la funzione a denominatore avremo

$$1 - \cos(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{z^{2j}}{(2j)!} = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + O\left(z^6\right).$$

Per la periodicità della funzione coseno, lo stesso sviluppo in serie vale in $z - 2k\pi$, $\forall | \in \rangle \mathbb{Z}$, cioè

$$1 - \cos(z) = 1 - \cos(z - 2k\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(z - 2k\pi)^{2j}}{(2j)!} = \frac{(z - 2k\pi)^2}{2} - \frac{(z - 2k\pi)^4}{4!} + O\left(z^6\right). \tag{2}$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione $t(z)$ ha la forma

$$t(z) = g(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{C_{-2}^{(k)}}{(z - 2k\pi)^2} + \frac{C_{-1}^{(k)}}{z - 2k\pi} \right),$$

dove la funzione $g(z)$ rappresenta la parte intera di $t(z)$ ed ha lo stesso comportamento asintotico ($z \to \infty$), mentre i termini della serie sono le parti principali delle serie di Laurent centrate nei poli doppi $z_k = 2k\pi$. I coefficienti $C_{-1,-2}^{(k)}$ posso essere calcolati a partire dalla serie di Taylor date in Eq. (2). Infatti, nel limite $z \to z_k$,

$$\begin{aligned}
t(z) = \frac{1}{1 - \cos(z)} &= \frac{1}{(z - 2k\pi)^2/2 - (z - 2k\pi)^4/4! + O\left(z^6\right)} \\
&= \frac{2}{(z - 2k\pi)^2} \frac{1}{1 - 2(z - 2k\pi)^2/4! + 2(z - 2k\pi)^4/6! + O\left(z^6\right)} \\
&= \frac{2}{(z - 2k\pi)^2} \left[1 + \left(\frac{2(z - 2k\pi)^2}{4!} + O\left(z^4\right) \right) + \left(\frac{2(z - 2k\pi)^2}{4!} + O\left(z^4\right) \right)^2 + \cdots \right] \\
&= \frac{2}{(z - 2k\pi)^2} + \frac{1}{6} + O\left(z^2\right),
\end{aligned}$$

ne consegue che

$$C_{-2}^{(k)} = 2, \qquad C_{-1}^{(k)} = 0.$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler diventa

$$t(z) = g(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(z - 2k\pi)^2}.$$

Il comportamento asintotico può essere studiato considerando i valori della funzione sui punti della successione $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, con $a_k = e^{i\alpha}(2k+1)\pi/2$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Questa successione, per $k \to \infty$ si accumula all'infinito, nella direzione definita dall'angolo α, senza intersecare le singolarità, avremo, usando $x_k = \text{Re}(a_k)/2$ e $y_k = \text{Im}(a_k)/2$,

$$\left| \frac{1}{1 - \cos(a_k)} \right| = \left| \frac{1}{1 - \cos(a_k)} \right| = \left| \frac{1}{2\,\text{sen}^2(a_k/2)} \right| = \frac{1}{2\,|\text{sen}(a_k/2)|^2} = \frac{1}{2\left(\text{senh}^2(y_k) + \text{sen}^2(x_k)\right)}.$$

Consideriamo due casi $y_k = 0$ e $y_k \neq 0$. Nel primo caso, $y_k = 0$ implica $\alpha = 0, \pi$, ovvero $x_k = \pm(2k+1)\pi/4$, la funzione seno valutata in multipli dispari di $\pi/4$ vale $\pm\sqrt{2}/2$, quindi la funzione $t(z)$ è, in modulo, asintoticamente limitata, si ha

$$\left| \frac{1}{1 - \cos(a_k)} \right| = \frac{1}{2\text{sen}^2(x_k)} = 1.$$

Nel secondo caso si ha $y_k \neq 0$, quindi, per $k \to \infty$, $y_k \to \pm\infty$ poiché $\operatorname{sen}^2(x_k) \geq 0$,

$$\left|\frac{1}{1-\cos(a_k)}\right| = \frac{1}{2\left(\operatorname{senh}^2(y_k) + \operatorname{sen}^2(x_k)\right)} \leq \frac{1}{2\operatorname{senh}^2(y_k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \left\{ \begin{array}{ll} e^{-2y_k}/2 & y_k \to \infty \\ e^{2y_k}/2 & y_k \to -\infty \end{array} \right\} \to 0\,.$$

Di conseguenza la funzione $g(z) = g_0$ è costante, ne otteniamo il valore valutando la funzione $t(z)$ in $z = \pi$, ovvero

$$t(\pi) = \frac{1}{2} = g_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2} = g_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} = g_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2}\,.$$

Nella prima serie dell'ultimo membro facciamo il cambiamento di indice $k' = -k-1$, $k = -k'-1$, e risolviamo rispetto a g_0

$$g_0 = \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} = \frac{1}{2} - \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k'+1)^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,,$$

dove abbiamo usato la serie nota

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

In definitiva lo sviluppo di Mittag-Leffler completo è

$$t(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(z-2k\pi)^2}\,.$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

L'operatore $\hat{S}$ è definito in uno spazio di Hilbert a $N > 2$ dimensioni come

$$\hat{S} = \hat{I} + |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità e i vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono a norma unitaria e ortogonali. Dopo aver dimostrato che $\hat{S}$ non è un proiettore, si determinino gli autovalori dell'operatore

$$\hat{T} = \cos\left(\frac{\pi\hat{S}}{2}\right)\,.$$

Soluzione del quarto problema

L'operatore $\hat{S}$, in quanto somma di operatori hermitiani è un operatore hermitiano, per verificare che non si tratta di un proiettore è sufficiente provare che non sia idempotente. Ne calcoliamo il quadrato e verifichiamo che non coincide con $\hat{S}$, si ha

$$\hat{S}^2 = \left(\hat{I} + |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right)\left(\hat{I} + |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right) = \hat{I} + 3|a\rangle\langle a| + 3|b\rangle\langle b| \neq \hat{S}\,.$$

Per ciò che riguarda lo spettro di $\hat{S}$ è facile verificare che sia $|a\rangle$ che $|b\rangle$ sono autovettori, le equazioni sono

$$\begin{aligned} \hat{S}|a\rangle &= \left(\hat{I} + |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right)|a\rangle = |a\rangle + |a\rangle = 2|a\rangle\,, \\ \hat{S}|b\rangle &= \left(\hat{I} + |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right)|b\rangle = |b\rangle + |b\rangle = 2|b\rangle\,, \end{aligned}$$

hanno entrambi autovalore $\lambda_a = \lambda_b = 2$. Definiamo un insieme ortonormale di vettori $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$, in modo tale che, ad esempio, il primo e l'ultimo coincidano, rispettivamente, con $|a\rangle$ e $|b\rangle$, ovvero $|u_1\rangle = |a\rangle$, $|u_N\rangle = |b\rangle$, questi vettori sono autovettori di $\hat{S}$ con autovalore unitario. Infatti, con $k \in \{2, 3, \ldots, N-1\}$, si hanno le equazioni

$$\hat{S}|u_k\rangle = \left(\hat{I} + |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right)|u_k\rangle = \hat{I}|u_k\rangle = |u_k\rangle\,,$$

poich'$\epsilon|u_k\rangle$, con $k=2,3,\dots,N_1$, è ortogonale sia ad $|a\rangle$ che a $|b\rangle$. Ne consegue che i corrispondenti autovalori sono tutti uguali ad uno, cioè $\lambda_2=\lambda_2=\cdots=\lambda_{N-1}=1$. Alla luce di questo risultato, la rappresentazione diagonale di $\hat{S}$ rispetto alla base ortonormale $\{|u_k\rangle\}_{k=1}^N$ è

$$S=\mathrm{diag}\,(2,1,\dots,1,2)\,.$$

Per il teorema spettrale, quella dell'operatore $\hat{T}$ sarà, di conseguenza,

$$T=\mathrm{diag}\,(\cos(2\pi/2)\,,\cos(\pi/2)\,,\dots,\cos(\pi/2)\,,\cos(2\pi/2))=\mathrm{diag}\,(-1,0,\dots,0,-1)$$

e quindi, indicando con τ_j, l'autovalore dell'operatore $\hat{T}$ relativo all'autovettore $|u_j\rangle$, con $j=1,2,\dots,N$, si hanno

$$\tau_1=\tau_N=-1\,,\qquad \tau_2=\tau_3=\cdots=\tau_{N-1}=0\,.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Data la matrice

$$C(x,y)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ y & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

si ottengano gli autovalori e gli autovettori. Infine, si stabilisca per quali valori dei parametri x, $y\in\mathbb{C}$ si hanno autovalori reali e autovettori ortogonali.

Soluzione del quinto problema

L'equazione secolare è

$$0=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & x & 0\\ y & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1-xy\right],$$

quindi gli autovalori sono

$$\lambda_1=1\,,\qquad \lambda_{2,3}=1\pm\sqrt{xy+1}\,.$$

Gli autovettori u_j, $j=1,2,3$, di componenti proporzionali a a_j, b_j e c_j (a meno della normalizzazione), si ottengono dalle equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix}1-\lambda_j & x & 0\\ y & 1-\lambda_j & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_j\\ b_j\\ c_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

da cui si ha il sistema omogeneo

$$\left\{\begin{aligned}\left(1-\lambda_j\right)a_j+xb_j&=0\\ ya_j+\left(1-\lambda_j\right)b_j+c_j&=0\\ b_j+\left(1-\lambda_j\right)c_j&=0\end{aligned}\right.\,.$$

Poniamo $a_j=1$, allora per $j=2,3$, dalla prima e terza equazione si hanno

$$b_{2,3}=\frac{\lambda_{2,3}-1}{x}=\pm\frac{\sqrt{xy+1}}{x}\,,\qquad c_{2,3}=\frac{1}{x}\,.$$

Nel caso di $\lambda_1=1$, dalla prima equazione si ottiene $b_1=0$ e dalla seconda $c_1=-y$, in definitiva

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{1+|y|^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-y\end{pmatrix},\qquad u_{2,3}=\frac{1}{\sqrt{|x|^2+1+|xy+1|}}\begin{pmatrix}x\\ \pm\sqrt{xy+1}\\ 1\end{pmatrix}.$$

Affinché si abbiano autovalori reali è necessario che il prodotto xy sia reale e tale che

$$xy + 1 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad xy \geq -1\,.$$

L'orotogonalità tra gli autovettori si ottiene se

$$u_1^\dagger u_{2,3} = \frac{x - y^*}{\sqrt{1+|y|^2}\sqrt{|x|^2+1+|xy+1|}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = y^*\,;$$

questa condizione assicura anche l'ortogonalità di u_2 e u_3, infatti

$$u_2^\dagger u_3 = \frac{|x|^2+1-|xy+1|}{|x|^2+1+|xy+1|} = \frac{|x|^2+1-|x|^2-1}{2|x|^2+2} = 0\,.$$

In definitiva le matrici

$$C(x, x^*) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ x^* & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\forall\, x \in \mathbb{C}$ hanno autovalori reali, autovettori ortogonali e sono anche hermitiane.

Sesto problema (punteggio 6/30)

Definendo la funzione di correlazione $C(x)$ tra due funzioni $f(x)$, $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ come

$$C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(y) g(x+y) dy \equiv (f \otimes g)(x)\,,$$

si dimostrino le identità

$$\mathscr{F}_k\left[(f\otimes g)(x)\right] = \sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[f]^*\,\mathscr{F}_k[g]\,, \qquad \mathscr{F}_k\left[f^*(x)\,g(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k[f]\otimes\mathscr{F}_k[g]\,,$$

ovvero indicando con $\tilde{f}(k)$, $\tilde{g}(k)$ e $\widetilde{C}(k)$ le trasformate di Fourier delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $C(x)$,

$$\widetilde{C}(k) = \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}^*(k)\,\tilde{g}(k)\,, \qquad \mathscr{F}_k\left[f^*(x)\,g(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\tilde{f}\otimes\tilde{g})(k)\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Per dimostrare la prima identità applichiamo la definizione

$$\mathscr{F}_k\left[(f\otimes g)(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f^*(y) g(x+y) e^{-ikx}\,,$$

facciamo la sostituzione $z = x+y$ per la x, per cui $x = z - y$ e $dx = dz$, per cui si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[(f\otimes g)(x)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f^*(y) g(z) e^{-ik(z-y)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(y) e^{iky} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-ikz} dz \\
&= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iky} dy\right)^* \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{-ikz} dz \\
&= \sqrt{2\pi}\,\tilde{f}^*(k)\,\tilde{g}(k)\,.
\end{aligned}$$

Consideriamo la seconda identità, il primo membro è

$$\mathscr{F}_k\left[f^*(x)\,g(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\,g(x) e^{-ikx} dx$$

integriamo anche in dy inserendo una dela di Dirac

$$\mathscr{F}_k\left[f^*(x)\,g(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)\,g(y)e^{-iky}\,\delta(x-y)\,,$$

usiamo per la delta la definizione integrale

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[f^*(x)\,g(x)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x)\,g(y)e^{-iky}\,e^{ik'(x-y)} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy(k+k')}dy \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{ik'x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk' \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-iy(k+k')}dy}_{\tilde{g}(k+k')} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ik'x}dx\right)^*}_{\tilde{f}^*(k)} f^*(x)e^{ik'x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k')\tilde{g}(k+k')dk' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\tilde{f}\otimes\tilde{g})(k)\,.
\end{aligned}$$