Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - primo dicembre 2011

Esercizio 1 (7 punti)
Calcolare l'integrale

$$A = \int_{|z|^+=3} \frac{\cos\left(z^{-1}\right)}{\tan\left(z^{-1}\right)} dz$$

con il cammino d'integrazione percorso in senso antiorario.

. . . .

L'integrale può essere riscritto come

$$A = \int_{|z|^+=3} \left[\frac{1}{\sin\left(z^{-1}\right)} - \sin\left(z^{-1}\right)\right] dz = A_1 + A_2 \,,$$

così da avere due integrali. Calcoliamo

$$A_1 = \int_{|z|^+=3} \frac{1}{\sin\left(z^{-1}\right)} dz = -\int_{|z'|^-=1/3} \frac{1}{z'^2 \sin\left(z'\right)} dz = \int_{|z|^+=1/3} \frac{1}{z^2 \sin\left(z\right)} dz \,,$$

dove si è fatta la sostituzione: $z' = 1/z$ e i cambiamenti di segno si sono ottenuti cambiando il verso di percorrenza della circonferenza di raggio 1/3. L'integranda, così ottenuta, ha poli semplici nei punti di annullamento del seno diversi dallo zero, ovvero negli $z_k = (k\pi)^{-1}$ con $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, mentre la singolarità $z_0 = 0$ è un polo di ordine 3. La funzione è quindi analitica sul cammino d'integrazione e all'interno di esso, quindi possiamo applicare il teorema dei residui

$$\begin{aligned}
A_1 = \int_{|z|^+=1/3} \frac{1}{z^2 \sin\left(z\right)} dz &= 2i\pi \sum_k^{|z_k|<1/3} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2 \sin\left(z\right)}, z_k\right] \\
&= 2i\pi\, \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2 \sin\left(z\right)}, z_0\right] \\
&= 2i\pi\, \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{z}{\sin\left(z\right)}\right]_{z_0 \equiv 0} = 2i\pi\, C_{-1} \,,
\end{aligned}$$

infatti sappiamo che il residuo corrisponde al coefficiente C_{-1} della serie di Laurent in $z = z_0 = 0$. Usiamo questo argomento e lo sviluppo di Taylor in $z = 0$ del seno

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \\
&= z\left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)\right] \\
&= \frac{z}{1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \cdots\right)^2 + \ldots} \,,
\end{aligned}$$

quindi l'integranda avrà lo sviluppo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^2\sin(z)} &= \frac{1}{z^3}\left[1+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\cdots\right)^2+\ldots\right] \\
&= \frac{1}{z^3}\left[1+\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\frac{z^4}{(3!)^2}+O(z^6)\right] \\
&= \frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!z}-z\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right)+O(z^3)\equiv\sum_{k=-3}^{\infty}C_k z^k\,,
\end{aligned}
$$

da cui $C_{-1}=\frac{1}{3}$ e l'integrale

$$
A_1=\int_{|z|^+=3}\frac{1}{\sin\left(z^{-1}\right)}dz=2i\pi\,C_{-1}=\frac{i\pi}{3}\,.
$$

Consideriamo A_2, facciamo la sostituzione $z'=1/z$ e come nel caso precedente cambiamo i segni invertendo il verso di percorrenza della circonferenza "3", si ha quindi:

$$
A_2=-\int_{|z|^+=3}\sin\left(z^{-1}\right)dz=\int_{|z'|^-=1/3}\frac{\sin(z')}{z'^2}dz'=-\int_{|z|^+=1/3}\frac{\sin(z)}{z^2}dz\,.
$$

L'integranda ha un solo polo al finito in $z_0=0$ ed è un polo semplice. Per il teorema dei residui

$$
A_2=-2i\pi\,\mathrm{Res}\left[\frac{\sin(z)}{z^2},0\right]=-2i\pi\,C_{-1}\,.
$$

Dallo sviluppo di Taylor del seno in $z=0$ si ha

$$
\frac{\sin(z)}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\ldots\right)=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^2}{5!}\ldots\,.
$$

da cui $C_{-1}=1$ e l'integrale sarà

$$
A_2=-2i\pi\,C_{-1}=-2i\pi\,.
$$

Il risultato finale è quindi

$$
A=\int_{|z|^+=3}\frac{\cos\left(z^{-1}\right)}{\tan\left(z^{-1}\right)}dz=A_1+A_2=-\frac{5i\pi}{3}\,.
$$

. . . .

Esercizio 2 (6 punti)
Calcolare l'integrale

$$
I(a,b,c)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,a^{i\,x}dx}{(x-b)^2+c^2}
$$

dove a, b e c sono reali con: $a>1$ e $b,c>0$.

. . . .

Riscriviamo l'integranda come

$$I(a,b,c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, a^{i\,x} dx}{(x-b)^2+c^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, e^{i\,x\ln(a)} dx}{(x-b)^2+c^2} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, e^{i\,k\,x} dx}{(x-b)^2+c^2}\,,$$

dove si è posto $k = \ln(a)$ e, avendo $a > 1$, $k > 0$. Ponendo inoltre

$$f(z) = \frac{1}{(z-b)^2+c^2}\,,$$

si osserva che

$$\lim_{z\to\infty} z\, f(z) \sim \frac{1}{z} = 0\,,$$

quindi possiamo applicare il lemma di Jordan nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$, sul cammino $L_R \cup \Gamma_R$ con: $L_R = \{z : \mathrm{Im}(z) = 0, -R < \mathrm{Re}(z) < R\}$ e $\Gamma_R = \{z : z = R\, e^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi\}$, per poi considerare il limite $R \to \infty$. L'integrale sarà quindi dato dalla somma dei residui nelle singolarità della $f(z)$ che si trova nel semipiano $\mathrm{Im}(z) > 0$, ovvero

$$\oint_{L_R\cup\Gamma_R} \frac{z\, a^{i\,z} dz}{(z-b)^2+c^2} = +2i\pi \sum_{k}^{\mathrm{Im}(z_k)<0} \mathrm{Res}[f(z)\, z\, e^{ikz}, z_k]\,,$$

dove il segno "più" indica che il cammino chiuso è percorso in senso antiorario. La $f(z)$ ha solo due poli semplici in $z_{1,2} = b \pm i\, c$ e, essendo $c > 0$, solo z_1 si trova nel semipiano positivo. Quindi

$$\oint_{L_R\cup\Gamma_R} \frac{z\, a^{i\,z} dz}{(z-b)^2+c^2} = 2i\pi\, \mathrm{Res}[f(z)\, z\, e^{ikz}, b + i\, c] = 2i\pi\, \frac{e^{ikb+kc}}{2ic}(b+ic) = \frac{\pi\, e^{-kc}}{c}\,(b+ic)\, e^{ikb}\,,$$

e, poiché, il risultato non dipende da R possiamo considerare il limite $R \to \infty$ e si ha

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{L_R\cup\Gamma_R} \frac{z\, a^{i\,z} dz}{(z-b)^2+c^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \frac{z\, a^{i\,z} dz}{(z-b)^2+c^2} = I(a,b,c) = \frac{\pi\, e^{-kc}}{c}\,(b+ic)\, e^{ikb}\,.$$

. . . .

Esercizio 3 (6 punti)
Dimostrare che la funzione definita dalla serie

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-k^2}$$

è meromorfa e caratterizzarne le singolarità.
N.B. Una funzione meromorfa ha le seguenti proprietà:

- ha solo singolarità polari;
- $\forall\, R > 0$, il cerchio $C_R = \{z : |z| < R\}$ contiene solo un numero finito di tali poli.

. . . .

Riscrivendo la serie come

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+k)(z-k)}\,,$$

si vede immediatamente che i poli sono nei punti z_n con

$$z_n = n \qquad \text{con: } n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

e sono tutti semplici. Per dimostrare che la somma è una funzione meromorfa spezziamo la somma come

$$S(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{\mathrm{Int}(2R)} \frac{1}{z^2 - k^2}}_{M(z)} + \underbrace{\sum_{k=\mathrm{Int}(2R)+1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}}_{A(z)}\,,$$

allora, $\forall z \in C_R$, ovvero $|z| < R$, il secondo termine non ha poli. Infatti il secondo termine, la somma $A(z)$ qualora esista, ha come poli

$$z = \mathrm{Int}(2R) + 1, \mathrm{Int}(2R) + 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad |z| > 2\,R\,,$$

tutti fuori dal cerchio C_R. Mentre il primo termine contiene esattamente $2\times\mathrm{Int}(2R)$ poli, cioè: $z = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\mathrm{Int}(2R)$. Quindi è sufficiente dimostrare che la serie del secondo termine sia uniformemente convergente. Per farlo osserviamo che, con: $|z| < R$ e $k \geq \mathrm{Int}(2R) + 1$, ovvero: $2|z| < k$, si ha

$$|z^2 - k^2| > \Big||z|^2 - k^2\Big| = k^2 - |z|^2 > k^2 - R^2 = k^2\left(1 - \frac{R^2}{k^2}\right)$$

ma essendo

$$k \geq \mathrm{Int}(2R) + 1 \geq 2R \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{k} \leq \frac{1}{2}\,,$$

dalla precedente si ha

$$|z^2 - k^2| > \frac{3}{4}k^2\,.$$

Usando la precedente per minorare il termine generico della serie, si ottiene

$$\frac{1}{|z^2 - k^2|} < \frac{4}{3}\frac{1}{k^2}\,,$$

ma la serie numerica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge quindi convergerà uniformemente e assolutamente anche la serie funzionale

$$A(z) = \sum_{k=\mathrm{Int(2R)}+1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2}\,.$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Data la matrice

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} ,$$

- definirne la classe (unitaria, hermitiana,...);
- calcolare autovalori e autovettori;
- calcolare H^6.

. . . .

La matrice H è unitaria, infatti

$$H^\dagger H = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -i & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'equazione caratteristica è

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - a & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i - a & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - a \end{pmatrix} = (i - a) \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - a \right)^2 + \frac{1}{4} \right] ,$$

gli autovalori sono

$$a_1 = i = e^{i\pi/2} , \qquad a_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) , \qquad a_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i) ,$$

e gli autovettori normalizzati corrispondenti

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

diagonalizza la H, ovvero

$$H' = U^\dagger H U = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} .$$

La sesta potenza è

$$H^6 = U(H'^6)U^\dagger = U \begin{pmatrix} a_1^6 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^6 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^6 \end{pmatrix} U^\dagger = U \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} U^\dagger = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

. . . .

Esercizio 5 (5 punti)
Calcolare la funzione $f(x)$ sapendo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(x-y)dy = \frac{a}{a^2 + x^2/4},$$

con a reale e $a > 0$.

. . . .

Sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(x-y)dy = (f * g)(x),$$

e che la TF di una convoluzione è

$$\mathcal{F}_k[(f*g)] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}_k[f]\,\mathcal{F}_k[g],$$

quindi

$$\mathcal{F}_k[(f*f)] = \sqrt{2\pi}\,\left(\mathcal{F}_k[f]\right)^2 .$$

Si ha che

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[(f*f)] = \mathcal{F}\left[\frac{a}{a^2+x^2/4}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\, e^{ikx}}{a^2+x^2/4} dx = \frac{4a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{4a^2+x^2} dx \\
&= \frac{4a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x-2ia)(x+2ia)} dx \\
&= \frac{4a}{\sqrt{2\pi}} 2i\pi \left\{ \begin{array}{ll} e^{-2ak}/4ia & k>0 \\ -e^{2ak}/(-4ia) & k<0 \end{array} \right\} \\
&= \sqrt{2\pi}\, e^{-2a|k|}.
\end{aligned}$$

Dalla precedente si ha che

$$\mathcal{F}_k[f] = \sqrt{\frac{\mathcal{F}_k[f*f]}{\sqrt{2\pi}}} = e^{-a|k|},$$

ovvero

$$\begin{aligned}
f(x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{-a|k|}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|k|} e^{-ikx} dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-k(ix-a)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-k(ix+a)} dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix}\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{a}{a^2+x^2}.
\end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 6 (5 punti)
Si risolva l'equazione integrale

$$f(x) = \alpha \int_0^\pi \sin(x+y) f(y) dy \,.$$

. . . .

Il kernel è separabile infatti

$$K(x,y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) = M_1(x)N_1(y) + M_2(x)N_2(y)\,,$$

possiamo definire

$$\begin{array}{ll} M_1(x) = \sin(x) & N_1(x) = \cos(x) \\ M_2(x) = \cos(x) & N_2(x) = \sin(x) \end{array} \,.$$

Quindi la matrice A sarà:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^\pi N_i(x) M_j(x) dx\,, \\ A_{11} = A_{22} &= \int_0^\pi \sin(x)\cos(x) dx = 0\,, \\ A_{12} = A_{21} &= \int_0^\pi \cos^2(x) dx = \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

La matrice ha autovalori e autovettori

$$\begin{array}{l} 1/\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \\ 1/\alpha_2 = -\frac{\pi}{2} \end{array} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Le soluzioni sono ($i = 1, 2$)

$$f_i(x) = \alpha_i \sum_{k=1}^{2} (u_i)_k M_k(x)\,,$$

ovvero

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi}\big[\sin(x) + \cos(x)\big]\,,$$

$$f_2(x) = \frac{2}{\pi}\big[\sin(x) - \cos(x)\big]\,.$$