Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 settembre 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$M = \int_0^\infty \frac{\ln\left[\cosh(x)\right]}{\cosh^3(x)} dx\,.$$

Soluzione del primo problema

La funzione integranda è pari, possiamo quindi estendere l'intervallo di integrazione a $(-\infty, \infty)$ dividendo per due,

$$M = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln\left[\cosh(x)\right]}{\cosh^3(x)} dx\,.$$

Nell'argomento della funzione logaritmo scriviamo la funzione coseno iperbolico come somma di esponenziali e mettiamo in evidenza e^{-x}

$$M = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln\left[e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)/2\right]}{\cosh^3(x)} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{-x+\ln\left(e^{2x}+1\right)-\ln(2)}{\cosh^3(x)} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)-\ln(2)}{\cosh^3(x)} dx\,,$$

l'ultima identità segue dal fatto che la funzione $x/\cosh^3(x)$ è dispari e quindi il suo integrale su un intervallo simmetrico rispetto all'origine è nullo. Scriviamo anche la funzione coseno iperbolico a denominatore come somma di esponenziali e facciamo la sostituzione $w = e^x$

$$M = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln\left(w^2+1\right)-\ln(2)}{\left(w^2+1\right)^3/(2w)^3}\frac{dw}{w} = 4\int_0^\infty \frac{\ln\left(w^2+1\right)-\ln(2)}{\left(w^2+1\right)^3} w^2 dw = 2\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln\left(w^2+1\right)-\ln(2)}{\left(w^2+1\right)^3} w^2 dw\,,$$

l'ultima identità segue dalla simmetria dell'integranda. la funzione logaritmo è polidroma, i suoi punti di diramazione al finito coincidono con gli zeri dell'argomento, in questo casto ce ne sono due, $w_\pm = \pm i$, sono anche poli tripli della funzione integranda. Usando la fattorizzazione $w^2+1 = (w+i)(w-i)$ possiamo scrivere l'integrale come somma di tre contributi,

$$M = 2\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(w+i)}{\left(w^2+1\right)^3} w^2 dw + 2\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(w-i)}{\left(w^2+1\right)^3} w^2 dw - 2\ln(2)\int_{-\infty}^\infty \frac{w^2}{\left(w^2+1\right)^3} dw \equiv M_+ + M_- + M_0\,,$$

con

$$M_\pm = 2\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(w\pm i)}{\left(w^2+1\right)^3} w^2 dw\,, \qquad M_0 = -2\ln(2)\int_{-\infty}^\infty \frac{w^2}{\left(w^2+1\right)^3} dw\,.$$

Questi integrali possono essere calcolati usando il Lemma di Jordan, ovvero considerando gli integrali delle stesse funzioni integrande su percorsi chiusi nel piano complesso w, ottenuti unendo al segmento reale $[-R, R]$ una opportuna semicirconferenza centrata nell'origine, di raggio R, e considerando il limite $R \to \infty$.
Partiamo dall'integrale M_+, il punto di diramazione è $w_- = -i$, scegliamo il taglio lungo il semi-asse immaginario negativo, ovvero corrispondente alla semiretta $(-i\infty, -i)$, e come percorso di integrazione la curva Γ_R^+ mostrato in grigio nella parte sinistra della figura. Nella stessa figura il taglio è rappresentato dall'area verde. Il percorso Γ_R^+

avvolge il polo triplo $w_+ = i$ e non interseca il taglio, è quindi possibile calcolare l'integrale M_+ usando il teorema dei residui nel limite $R \to \infty$ e considerando nullo il contributo sull'arco, per cui si ha

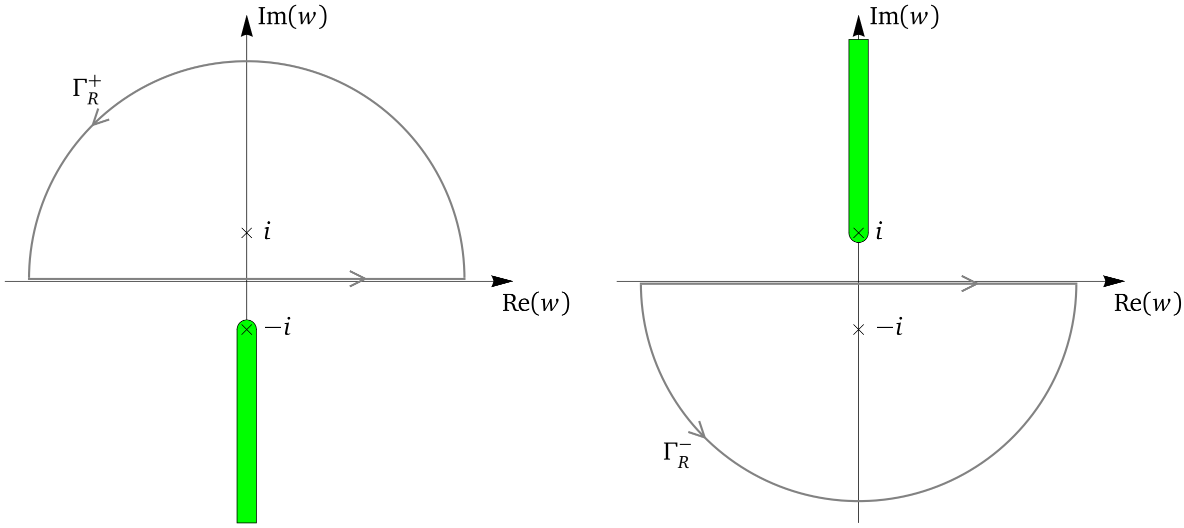
$$M_+ = 2i\pi \operatorname{Res}\left[\frac{2\ln(w+i)w^2}{(w^2+1)^3}, i\right] = 2i\pi \frac{1}{2}\frac{d^2}{dw^2}\frac{2\ln(w+i)w^2}{(w^2+1)^3}(w-i)^3\bigg|_{w=i} = 2i\pi \frac{d^2}{dw^2}\frac{\ln(w+i)w^2}{(w+i)^3}\bigg|_{w=i}.$$

L'annullamento del contributo sull'arco $\gamma_R^+ = \left\{w : w = Re^{i\theta}, \theta \in (0,\pi)\right\}$ nel limite $R \to \infty$ è conseguenza della limitazione uniforme

$$\begin{aligned}\left|\frac{2\ln(w+i)w^2}{(w^2+1)^3}w\right| = \frac{2R^3\sqrt{\ln^2|w+i| + \arg^2(w+i)}}{|w^2+1|^3} &= \frac{2R^3\sqrt{\ln^2|R+e^{i(\pi/2-\theta)}| + \arg^2(w+i)}}{|w^2+1|^3} \\ &\le \frac{2R^3\sqrt{\ln^2\left[(R+\cos(\pi-\theta))^2+\operatorname{sen}^2(\pi-\theta)\right]/4 + 4\pi^2}}{(R^2-1)^3} \\ &\le \frac{2R^3\sqrt{\ln^2\left[(R+1)^2+1\right]/4+4\pi^2}}{(R^2-1)^3} \underset{R\to\infty}{\sim} \frac{2\ln(R)}{R^3} \underset{R\to\infty}{\to} 0\,.\end{aligned}$$

Per rendere più semplice il calcolo della derivata seconda che dà il residuo, facciamo il cambiamento di variabile $t = w+i$, per cui la derivata seconda rispetto a w valutata in $w = i$ diventa la derivata seconda rispetto a t in $t = 2i$, ovvero

$$M_+ = 2i\pi \frac{d^2}{dw^2}\frac{\ln(w+i)w^2}{(w+i)^3}\bigg|_{w=i} = 2i\pi \frac{d^2}{dt^2}\frac{\ln(t)(t-i)^2}{t^3}\bigg|_{t=2i} = 2i\pi\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\ln(t)}{t} - 2i\frac{\ln(t)}{t^2} - \frac{\ln(t)}{t^3}\right)_{t=2i}.$$



Usando la regola di Leibniz per la derivata seconda del prodotto di due funzioni, si ottiene

$$\begin{aligned}M_+ &= 2i\pi\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\ln(t)}{t} - 2i\frac{\ln(t)}{t^2} - \frac{\ln(t)}{t^3}\right)_{t=2i} \\ &= 2i\pi\left(-\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^3} + \frac{2\ln(t)}{t^3} + \frac{2i}{t^4} + \frac{8i}{t^4} - \frac{12i\ln(t)}{t^4} + \frac{1}{t^5} + \frac{6}{t^5} - \frac{12\ln(t)}{t^5}\right)_{t=2i} \\ &= \frac{2i\pi}{t^5}\left[-3t^2 + 10it + 7 + \ln(t)\left(2t^2 - 12it - 12\right)\right]_{t=2i} \\ &= \frac{\pi}{16}\big(-1 + 4\ln(2i)\big)\,.\end{aligned}$$

A questo punto usiamo la determinazione scelta per scrivere l'unità immaginaria come esponenziale, cioè $i = e^{i\pi/2}$, quindi

$$M_+ = \frac{\pi}{16}\left(-1 + 4\ln(2) + 2i\pi\right).$$

Il valore dell'integrale M_- può essere ottenuto sfruttando alcuni passaggi del calcolo precedente. In questo caso, il punto di diramazione della funzione integranda è $w_+ = i$, si definisce quindi il taglio $(i, i\infty)$ appartenente al semiasse immaginario positivo e di conseguenza si sceglie il percorso di integrazione Γ_R^- mostrato nella parte destra della figura. Usando il teorema dei residui per il polo triplo in $w = -i$ e facendo il passaggio al limite $R \to \infty$, si ha

$$M_- = -2i\pi \,\text{Res}\left[\frac{2\ln(w-i)w^2}{(w^2+1)^3}, -i\right] = -2i\pi \frac{d^2}{dw^2} \frac{\ln(w-i)w^2}{(w-i)^3}\bigg|_{w=-i} .$$

Con il cambiamento di variabile $s = w - i$

$$M_- = -2i\pi \frac{d^2}{dw^2}\frac{\ln(w-i)w^2}{(w-i)^3}\bigg|_{w=i} = -2i\pi\frac{d^2}{ds^2}\frac{\ln(s)(s+i)^2}{s^3}\bigg|_{s=-2i} = -2i\pi\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\ln(s)}{s} + 2i\frac{\ln(s)}{s^2} - \frac{\ln(s)}{s^3}\right)_{s=-2i} .$$

Si tratta del complesso coniugato del residuo precedente

$$M_- = \frac{\pi}{16}\left(-1 + 4\ln(2) - 2i\pi\right) ,$$

e la somma dà due volte la parte reale

$$M_+ + M_- = \frac{\pi}{8}\left(-1 + 4\ln(2)\right) .$$

Infine, l'integrale M_0 può essere calcolato usando indifferentemente o il percorso Γ_R^+ o Γ_R^-. Chiudendo sopra, ovvero usando Γ_R^+ si ha

$$\begin{aligned}
M_0 = 2i\pi\text{Res}\left[-2\ln(2)\frac{w^2}{(w^2+1)^3}, i\right] &= -2i\pi\ln(2)\frac{d^2}{dw^2}\frac{w^2}{(w+i)^3}\bigg|_{w=i} \\
&= -2i\pi\ln(2)\left(\frac{2}{(w+i)^3} - \frac{12w}{(w+i)^4} + \frac{12w^2}{(w+i)^5}\right)_{w=i} \\
&= -\frac{\pi\ln(2)}{4} .
\end{aligned}$$

Sommando i tre integrali $M_\pm$ e M_0 si ha il risultato finale

$$\begin{aligned}
M &= M_+ + M_- + M_0 = \frac{\pi}{8}\left(-1 + 4\ln(2)\right) - \frac{\pi\ln(2)}{4} \\
M &= \frac{\pi}{8}\left(-1 + 2\ln(2)\right) .
\end{aligned}$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la somma della serie di integrali

$$L = \frac{1}{2i\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\oint_{|z|=1}\frac{z^k \,\text{sen}^3(z)}{\cos(z^3)-1}dz .$$

Suggerimento. Potrebbe essere vantaggioso sfruttare la definizione dei coefficienti di Laurent.

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda è meromorfa ed ha una singolarità polare nell'origine dovuta allo zero della funzione a denominatore. Detto $m \in \mathbb{N}$ l'ordine dello zero che la funzione

$$g(z) = \frac{\text{sen}^3(z)}{\cos(z^3)-1}$$

ha nell'origine si ha la serie di Laurent

$$g(z) = \sum_{j=-m}^{\infty} C_j z^j .$$

Tale serie converge uniformemente in ogni corona chiusa contenuta nella corona $C_{0,\pi^{1/3}} = \left\{z : 0 < |z| < (2\pi)^{1/3}\right\}$ e quindi converge uniformemente sulla circonferenza unitaria. Usando la serie di Laurent nell'integrale, si ha

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\oint_{|z|=1}\frac{z^k\,\mathrm{sen}^3(z)}{\cos(z^3)-1}dz = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=-m}^{\infty}C_j\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}z^{k+j}dz = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=-m}^{\infty}C_j\delta_{k,-j-1}\\
L &= \underbrace{C_{-1}}_{k=0,j=-1} + \underbrace{C_{-2}}_{k=1,j=-2} + \cdots + \underbrace{C_{-m}}_{k=m-1,j=-m}\\
L &= \sum_{j=-m}^{-1}C_j\,,
\end{aligned}
$$

ovvero la serie non è altro che la somma di tutti i coefficienti della parte principale finita della serie di Laurent della funzione $g(z)$ centrata nell'origine, convergente sulla circonferenza unitaria. Lo stesso risultato può essere ottenuto usando la definizione integrale dei coefficienti di Laurent, infatti per la serie di una funzione $f(z)$ centrata in $z = z_0$ si hanno i coefficienti

$$
C_l = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{l+1}}dz\,, \qquad l \in \mathbb{Z}\,,
$$

dove γ è una curva chiusa che avvolge una sola volta il punto z_0, centro della serie, e nessun'altra singolarità della funzione. Alla luce di questa definizione il k-esimo integrale della serie data rappresenta il coefficiente $(-k-1)$ della serie di Laurent centrata nell'origine della funzione $g(z)$, infatti riscrivendo opportunamente si ha

$$
\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z^k\mathrm{sen}^3(z)}{\cos\left(z^3\right)-1}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{sen}^3(z)}{\left(\cos\left(z^3\right)-1\right)z^{-k-1+1}}dz = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=1}\frac{g(z)}{z^{-k-1+1}}dz = C_{-k-1}\,,
$$

sa cui la serie, o meglio la somma

$$
L = \sum_{k=0}^{\infty}C_{-k-1} = \sum_{k=0}^{m-1}C_{-k-1}\,.
$$

Si tratta infatti di una somma finita, poiché la singolarità nell'origine è un polo di ordine m e quindi i coefficienti di Fourier con indice minore di $-m$ sono nulli. Facendo il cambiamento di indice $j = -k-1$ si ottiene la somma precedentemente ricavata

$$
L = \sum_{j=-m}^{-1}C_j\,.
$$

Per ottenere l'insieme dei coefficienti e quindi la parte principale della serie di Laurent, sfruttiamo le serie di Taylor note delle funzioni seno e coseno, cioè

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k+1}/(2k+1)!\right)^3}{\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j z^{6j}/(2j)!} = \frac{\left(z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + O(z^8)\right)^3}{\frac{z^6}{2}\left(-1 + 2z^6/2! - 2z^{12}/4! + 2z^{18}/6! + O(z^{24})\right)}\\
&= -\frac{2}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + O(z^8)\right)^3\left[1 + \left(z^6 - \frac{2z^{12}}{4!} + \frac{2z^{18}}{6!} + O(z^22)\right) + (\cdots)^2 + (\cdots)^3 + \cdots\right]\\
&= -\frac{2}{z^3}\left[1 - 3\frac{z^2}{3!} + z^4\left(\frac{3}{5!} + \frac{3}{(3!)^2}\right) + z^6\left(-\frac{3}{7!} - \frac{6}{3!5!} + \frac{1}{(3!)^3}\right) + O(z^8)\right]\\
&\quad\times\left[1 + \left(z^6 - \frac{2z^{12}}{4!} + \frac{2z^{18}}{6!} + O(z^22)\right) + (\cdots)^2 + \cdots\right]\\
&= -\frac{2}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2} + z^4\frac{13}{120} - z^6\frac{13}{3024} + O(z^8)\right)\left[1 + \left(z^6 - \frac{2z^{12}}{4!} + \frac{2z^{18}}{6!} + O(z^22)\right) + (\cdots)^2 + \cdots\right]\\
&= -\frac{2}{z^3} + \frac{1}{z} - z\frac{13}{60} + O(z^3)\,.
\end{aligned}
$$

Abbiamo ottenuto che la funzione $g(z)$ ha nell'origine un polo di ordine tre e che lo sviluppo di Laurent cercato ha solo coefficienti dispari. Ne consegue che nella parte principale ci sono solo due coefficienti non nulli: $C_{-3} = -2$, $C_{-1} = 1$. La somma della serie cercata è

$$L = C_{-1} + C_{-3} = -1\,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\Omega = \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}dx\,.$$

Suggerimento. Potrebbe essere utile l'identità $\mathrm{sen}(x) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right)$.

Soluzione del terzo problema

Seguendo il suggerimento possiamo scrivere

$$\Omega = \mathrm{Im}\left(\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}dx\right)\,,$$

per calcolare l'integrale in questa forma possiamo utilizzare il lemma di Jordan nel semipiano superiore, ovvero quello della parti immaginarie positive. La funzione integranda ha poli appartenenti al percorso di integrazione, si tratta di sette poli semplici, gli zeri del polinomio a denominatore

$$x_0 = 0\,, \qquad x_{1,2} = \pm 1\,, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{2}\,, \qquad x_{5,6} = \pm\sqrt{3}\,.$$

Usando la formula di Sokhotski-Plemelj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0}dx \mp i\pi f(x_0)\,,$$

dove ϵ è infinitesimo e la funzione $f(z)$ è analitica in un intorno dell'asse reale e infinitesima all'infinito sull'asse reale, cioè $f(x) = o(1/\ln|x|)$ con $x \to \pm\infty$. Nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned}
\Omega &= \mathrm{Im}\left(\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}dx\right) \\
&= \mathrm{Im}\Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x+i\epsilon)(x-1+i\epsilon)(x+1+i\epsilon)\left(x-\sqrt{2}+i\epsilon\right)\left(x+\sqrt{2}+i\epsilon\right)\left(x-\sqrt{3}+i\epsilon\right)\left(x+\sqrt{3}+i\epsilon\right)}dx \\
&\quad + i\pi\sum_{j=0}^{6}\lim_{x\to x_j}\frac{e^{ix}}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}(x-x_j)\Bigg) \\
&= \mathrm{Im}\Bigg(\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z+i\epsilon)(z-1+i\epsilon)(z+1+i\epsilon)\left(z-\sqrt{2}+i\epsilon\right)\left(z+\sqrt{2}+i\epsilon\right)\left(z-\sqrt{3}+i\epsilon\right)\left(z+\sqrt{3}+i\epsilon\right)}dz \\
&\quad + i\pi\sum_{j=0}^{6}\lim_{x\to x_j}\frac{e^{ix}}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}(x-x_j)\Bigg)\,,
\end{aligned}$$

l'ultima identità è stata ottenuta in virtù del lemma di Jordan con il percorso chiuso Γ_R rappresentato dalla frontiera del semicerchio $\{z : |z| \in [0, R], \arg(z) \in [0, \pi]\}$. Il primo integrale dell'ultimo membro dell'espressione precedente è nullo poichè le singolarità della funzione integranda sono esterne al percorso Γ_R, avendo tutte parte immaginaria strettamente negativa, si tratta, infatti, dei punti dell'insieme $\left\{z_j = x_j - i\epsilon\right\}_{j=0}^{6}$. Ne consegue che

$$\begin{aligned}
\Omega &= \mathrm{Im}\left(i\pi\sum_{j=0}^{6}\lim_{x\to x_j}\frac{e^{ix}}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}(x-x_j)\right)\\
&= \pi\,\mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{6}\lim_{x\to x_j}\frac{e^{ix}}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}(x-x_j)\right)\\
&= \pi\sum_{j=0}^{6}\lim_{x\to x_j}\frac{\mathrm{Re}\left(e^{ix}\right)}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}(x-x_j)\\
&= \pi\sum_{j=0}^{6}\lim_{x\to x_j}\frac{\cos(x)}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}(x-x_j)\,,
\end{aligned}$$

esplicitamente, usando anche le relazioni $x_2 = -x_1$, $x_4 = -x_3$ e $x_6 = -x_5$, i sette contributi sono

$$\begin{aligned}
\Omega &= \pi\sum_{j=0}^{6}\lim_{x\to x_j}\frac{\cos(x)}{x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)}(x-x_j)\\
&= \pi\left[\frac{\pi\cos(x_0)}{\left(x_0^2-1\right)\left(x_0^2-2\right)\left(x_0^2-3\right)}+\frac{\cos(x_1)}{x_1^2(x_1^2-2)(x_1^2-3)}+\frac{\cos(x_2)}{(x_2^2-1)x_2^2(x_1^2-3)}+\frac{\cos(x_3)}{(x_3^2-1)(x_2^2-2)x_3^2}\right].
\end{aligned}$$

Infine, sostituendo i valori noti dei poli si arriva al risultato finale

$$\Omega = \frac{\pi}{6}\left(-1+3\cos(1)-3\cos\left(\sqrt{2}\right)+\cos\left(\sqrt{3}\right)\right).$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Sia $\left\{F_k\right\}_{k=0}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ la successione di Fibonacci o successione aurea, è la successione di numeri interi in cui, ad eccezione di $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, ciascun termine si ottiene dalla somma dei due precedenti, ovvero si ha $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ \forall\, n \geq 2$. Ne consegue che i primi 10 numeri di Fibonacci, da $F_0 = 0$ a $F_{10} = 34$ sono: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Indicando con v_0 il vettore 2×1

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ottenga la matrice hermitiana R, 2×2, tale che

$$Rv_0 = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix} \equiv v_1\,, \qquad R^2 v_0 = Rv_1 = \begin{pmatrix} F_4 \\ F_3 \end{pmatrix} \equiv v_2\,, \qquad \ldots \qquad R^j v_0 = Rv_{j-1} = \begin{pmatrix} F_{j+2} \\ F_{j+1} \end{pmatrix} \equiv v_j$$

e se ne calcolino autovalori ed autovettori. Si dimostri, infine, la validità del limite

$$\lim_{j\to\infty}\frac{F_{j+1}}{F_j} = \phi_1\,,$$

dove ϕ_1 è il maggiore degli autovalori della matrice R.

Soluzione del quarto problema

Partiamo dalla matrice generica

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix},$$

e imponiamo le due condizioni relative all'applicazione di R ed R^2 al vettore v_0, si hanno quattro equazioni dalle quali si ottengono i quattro elementi di R, ovvero

$$\begin{aligned} Rv_0 = v_1 \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} r_1 + r_2 \\ r_3 + r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ R^2 v_0 = R v_1 = v_2 \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2r_1 + r_2 \\ 2r_3 + r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_4 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} r_1 + r_2 = 2 \\ r_3 + r_4 = 1 \\ 2r_1 + r_2 = 3 \\ 2r_3 + r_4 = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 1 \\ r_4 = 0 \end{array} \right. ,$$

quindi

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori si possono ottenere come soluzioni dell'equazione secolare, ovvero dal determinate e dalla traccia, essendo R una matrice 2×2. In quest'ultimo caso, indicando con ϕ_1 e ϕ_2 i due autovalori, si hanno le relazioni

$$\det(R) = \phi_1 \phi_2 = -1 , \qquad \mathrm{Tr}(R) = \phi_1 + \phi_2 = 1 ,$$

da cui l'equazione per $\phi_{1,2}$

$$\phi_{1,2} \left(1 - \phi_{1,2}\right) + 1 = -\phi_{1,2}^2 + \phi_{1,2} + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} .$$

In particolare, dalla condizione del determinante si ha che i due autovalori hanno prodotto uguale a -1, sono quindi l'uno l'opposto dell'inverso dell'altro, con il maggiore dei due $\phi_1 > 1$ e $-1 < \phi_2 < 0$.
Gli autovettori u_1 e u_2, che sono ortogonali in quanto la matrice R è hermitiana ed ha autovalori distinti, si ottengono dalle equazioni agli autovalori

$$R u_j = \phi_j u_j \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \phi_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} , \qquad j = 1, 2 .$$

Posto $x_{1,2} = 1$, si ha $y_j \phi_j = 1$, cioè $y_j = 1/\phi_j$ e considerando la normalizzazione si ottengono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\phi_1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\phi_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_1^2}} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\phi_2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\phi_1 \end{pmatrix} ,$$

la seconda componente del secondo autovettore e la sua costante di normalizzazione sono state riscritte usando la relazione $\phi_1 = -1/\phi_2$. Come anticipato, i due autovettori sono ortonormali e costituiscono una base. La rappresentazione del vettore v_0 rispetto a questa base è

$$v_0 = v_0^1 u_1 + v_0^2 u_2 .$$

I coefficienti controvarianti $v_0^{1,2}$ sono dati dai prodotti scalari dei vettori della base, gli autovettori, con il vettore v_0,

$$\begin{aligned} v_0^1 = u_1^\dagger v_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_1^2}} \left(\phi_1 \ 1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 + \phi_1}{\sqrt{1 + \phi_1^2}} , \\ v_0^2 = u_2^\dagger v_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_1^2}} \left(1 \ -\phi_1\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1 - \phi_1}{\sqrt{1 + \phi_1^2}} . \end{aligned}$$

Per ricavare il limite richiesto, consideriamo l'azione della j-esima potenza della matrice R sul vettore v_0 rappresentato come combinazione deli autovettori, cosicché si possa sfruttare l'equazione agli autovalori e scrivere il vettore risultate in termini di potenze degli autovalori. In particolare si ha

$$\begin{aligned} R^j v_0 &= R^j \left(v_0^1 u_1 + v_0^2 u_2\right) = v_0^1 R^j u_1 + v_0^2 R^j u_2 = v_0^1 \phi_1^j u_1 + v_0^2 \phi_2^j u_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \phi_1^2}} \left[(1 + \phi_1) \phi_1^j u_1 + (1 - \phi_1) \left(-\frac{1}{\phi_1}\right)^j u_2 \right] \\ &= \frac{1}{1 + \phi_1^2} \left[(1 + \phi_1) \phi_1^j \begin{pmatrix} \phi_1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \phi_1) \left(-\frac{1}{\phi_1}\right)^j \begin{pmatrix} 1 \\ -\phi_1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{1 + \phi_1^2} \begin{pmatrix} (1 + \phi_1) \phi_1^{j+1} + (1 - \phi_1) \left(-1/\phi_1\right)^j \\ (1 + \phi_1) \phi_1^j + (1 - \phi_1) \left(-1/\phi_1\right)^{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{j+2} \\ F_{j+1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto un'espressione dei numeri di Fibonacci in termini dell'autovalore ϕ_1, infatti, dall'identità della seconda componente, si ha

$$F_{j+1} = \frac{(1+\phi_1)\phi_1^j + (1-\phi_1)\left(-1/\phi_1\right)^{j-1}}{1+\phi_1^2}\,, \qquad j = 0, 1, \ldots\,. \tag{1}$$

Questa espressione può essere ulteriormente semplificata, infatti, dall'equazione secolare, nella forma $-\phi^2+\phi+1 = 0$ e in quella data dalla precedente divisa per ϕ, $-\phi + 1 + 1/\phi = 0$ si ottengono le identità: $1 + \phi_1 = \phi_1^2$ e $1 - \phi_1 = -1/\phi_1$, che sostituite nell'espressione precedente danno

$$\begin{aligned} F_{j+1} &= \frac{(1+\phi_1)\phi_1^j + (1-\phi_1)\left(-1/\phi_1\right)^{j-1}}{1+\phi_1^2} = \frac{\phi_1^{j+2} + \left(-1/\phi_1\right)^j}{1+\phi_1^2} \\ &= \phi_1 \frac{\phi_1^{j+1} - \left(-1/\phi_1\right)^{j+1}}{1+\phi_1^2} = \frac{\phi_1^{j+1} - \left(-1/\phi_1\right)^{j+1}}{1/\phi_1 + \phi_1}\,. \end{aligned}$$

Numericamente il denominatore vale $\sqrt{5}$, infatti

$$\frac{1}{\phi_1} + \phi_1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\,,$$

in definitiva si arriva all'espressione

$$F_{j+1} = \frac{\phi_1^{j+1} - \left(-1/\phi_1\right)^{j+1}}{\sqrt{5}}\,,$$

che al passo j-esimo diventa

$$F_j = \frac{\phi_1^j - \left(-1/\phi_1\right)^j}{\sqrt{5}}\,, \qquad j = 0, 1, \ldots\,.$$

È immediato verificare che, essendo $\phi_1 > 1$, il comportamento asintotico, al divergere di j, del j-esimo numero di Fibonacci è

$$F_j \underset{j\to\infty}{\sim} \frac{\phi_1^j}{\sqrt{5}}\,,$$

lo stesso risultato si poteva ottenere a partire dall'espressione non semplificata dell'Eq. (1)

$$F_{j+1} \underset{j\to\infty}{\sim} \frac{1+\phi_1}{1+\phi_1^2}\phi_1^j\,,$$

che al passo j dà

$$F_j \underset{j\to\infty}{\sim} \frac{1+\phi_1}{1+\phi_1^2}\phi_1^{j-1} = \frac{1+\phi_1}{\phi_1(1+\phi_1^2)}\phi_1^j = \frac{\phi_1^2}{\phi_1(1+\phi_1^2)}\phi_1^j = \frac{1}{1/\phi_1+\phi_1}\phi_1^j = \frac{\phi_1^j}{\sqrt{5}}\,.$$

Ne consegue che il rapporto delle componenti nel limite $j \to \infty$ tende all'autovalore ϕ_1, infatti si ha

$$\lim_{j\to\infty} \frac{F_{j+1}}{F_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\phi_1^{j+1}/\sqrt{5}}{\phi_1^j/\sqrt{5}} = \phi_1\,.$$

Questo valore limite è noto come sezione aurea o numero di Fidia e si indica con ϕ.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$t(w) = \frac{\operatorname{sen}(w)}{(w+1)^2}\,.$$

Promemoria. L'integrale di Fourier è calcolato sempre in valore principale.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Possiamo usare il teorema della convoluzione interpretando la funzione $t(w)$ come prodotto della funzione seno e dell'inverso del polinomio $(w+1)^2$, inoltre la trasformata di Fourier di quest'ultimo si può ottenere come trasformata di Fourier della derivata della funzione $-1/(w+1)$. Alla luce di queste considerazioni si ha

$$t(w) = \text{sen}(w)\,\frac{1}{(w+1)^2} = -\text{sen}(w)\,\frac{d}{dw}\frac{1}{w+1}$$

e la trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[t\right] &= \mathscr{F}_k\left[-\text{sen}(w)\,\frac{d}{dw}\frac{1}{w+1}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[\text{sen}(w)\right] * \mathscr{F}_k\left[\frac{d}{dw}\frac{1}{w+1}\right] \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[\text{sen}(w)\right] * \left(k\,\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{w+1}\right]\right).\end{aligned}$$

La seconda trasformata di Fourier si calcola usando l'integrale in valore principale, come ricordato, rispetto al polo della funzione integranda in $w = -1$, ovvero

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{w+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{Pr}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikw}}{w+1}dw\,,$$

usiamo la formula di Sokhotski-Plemelj

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{w+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{Pr}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikw}}{w+1}dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikw}}{w+1+i\epsilon}dw + i\pi\,e^{ik}\right).$$

L'integrale rimasto può essere calcolato con il lemma di Jordan considerando il polo semplice $w = -1 - i\epsilon$ nel semipiano delle parti immaginare negative, chiudendo il percorso con una semicirconferenza centrata nell'origine e appartenente al semipiano delle parti immaginare positive o negative a seconda che la variabile k sia rispettivamente negativa o positiva e quindi l'annullamento del contributo sull'arco "infinito" al divergere del raggio. In questo modo l'integrale sarà proporzionale al residuo del polo se esso è avvolto del percorso e nullo altrimenti, si ha cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikw}}{w+1+i\epsilon}dw = \begin{cases} -2i\pi e^{ik} & k>0 \\ 0 & k<0 \end{cases}.$$

Inserendo questo risultato nell'espressione della trasformata di Fourier

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{w+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikw}}{w+1+i\epsilon}dw + i\pi\,e^{ik}\right) = \left\{\begin{array}{ll} -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ik} & k>0 \\ i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ik} & k<0 \end{array}\right\} = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{segno}(k)\,e^{ik}.$$

Per la trasformata di Fourier della funzione seno si ha

$$\mathscr{F}_k\left[\text{sen}(w)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}e^{-iwk}dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iw(1-k)}-e^{-i(w+k)}}{2i}dw\,,$$

sfruttando la rappresentazione integrale della funzione generalizzata

$$\delta(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iup}dp\,,$$

si ha

$$\mathscr{F}_k\left[\text{sen}(w)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iw(1-k)}-e^{-i(w+k)}}{2i}dw = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\delta(k+1)-\delta(k-1)\Big).$$

La trasformata di Fourier completa, ovvero la convoluzione delle due già ottenute, vale

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[t\right] &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[\text{sen}(w)\right] * \left(k\,\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{w+1}\right]\right) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\delta(k+1-k')-\delta(k-1-k')\Big)k'\text{segno}(k')e^{ik'}dk'\,,\end{aligned}$$

calcoliamo l'integrale sfruttando le due funzioni generalizzate delta di Dirac, si ha quindi l'espressione finale

$$\mathscr{F}_k[t] = -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{ik}\left(|k+1|e^{i} - |k-1|e^{-i}\right).$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Dati i vettori

$$|u_1\rangle = |e_1\rangle - |e_3\rangle, \qquad |u_2\rangle = |e_1\rangle - |e_2\rangle + |e_3\rangle,$$

definiti in termini dei vettori della base ortonormale canonica $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=1}^{3}$ dello spazio di Hilbert tridimensionale E_3, si determini la matrice che rappresenta, rispetto alla base data, l'operatore hermitiano $\hat{K}$ definito dalle azioni sugli stessi vettori $|u_1\rangle$ e $|u_2\rangle$

$$\hat{K}|u_1\rangle = 2|u_1\rangle, \quad \hat{K}|u_2\rangle = -|u_2\rangle;$$

dalla traccia $\mathrm{Tr}\left(\hat{K}^3\right) = 8$ e dal possedere un autovettore ortogonale a entrambi i vettori $|u_1\rangle$ e $|u_2\rangle$.
Una volta ottenuta la matrice che rappresenta l'operatore, si determinino lo spettro discreto e gli autovettori.

Soluzione del sesto Problema

I due vettori $|u_1\rangle$ e $|u_2\rangle$ sono ovviamente autovettori dell'operatore $\hat{K}$ con autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$, in quanto le due azioni date non sono altro che le corrispondenti equazioni agli autovalori. Il terzo autovalore può essere determinato a partire dai due noti e dalla traccia.
L'operatore è diagonalizzabile, in quanto hermitiano, possiamo quindi applicare il teorema spettrale, in base al quale gli spettri discreti di $\hat{K}$ e di $\hat{K}^3$ sono rispettivamente $\left\{\lambda_j\right\}_{j=1}^{3}$ e $\left\{\lambda_j^3\right\}_{j=1}^{3}$, ovvero si hanno le tracce

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{K}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \qquad \mathrm{Tr}\left(\hat{K}^3\right) = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3.$$

Dall'ultima identità si ottiene il cubo del terzo autovalore come

$$8 = \mathrm{Tr}\left(\hat{K}^3\right) = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 8 - 1 + \lambda_3^2 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_3^3 = 1.$$

Si hanno tre possibili soluzioni $(\lambda_3)_{1,2,3} = 1$, $e^{2i\pi/3}$, $e^{4i\pi/3}$, ma l'unica soluzione accettabile è $\lambda_3 = 1$, infatti l'operatore è hermitiano e può avere solo autovalori reali.
Il terzo autovettore $|u_3\rangle$ si ottiene imponendo le condizioni di ortogonalità

$$\langle u_1|u_3\rangle = \langle u_2|u_3\rangle = 0,$$

che, usando la rappresentazione $|u_3\rangle = u_3^j|e_j\rangle$, danno due equazioni per i coefficienti controvarianti

$$\begin{cases} \langle u_1|u_3\rangle = u_3^1 - u_3^3 = 0 \\ \langle u_2|u_3\rangle = u_3^1 - u_3^2 + u_3^3 = 0 \end{cases}.$$

Data l'arbitrarietà della normalizzazione, è lecito porre $u_3^1 = 1$ per cui si hanno i coefficienti controvarianti: $u_3^3 = 1$ e $u_3^2 = 2$, di conseguenza il terzo autovettore è dato dalla combinazione

$$|u_3\rangle = |e_1\rangle + 2|e_2\rangle + |e_3\rangle.$$

Le rappresentazioni dei tre autovettori normalizzati sono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi definire la matrice unitaria U, infatti gli autovettori sono ortonormali, che diagonalizza la matrice K, rappresentante l'operatore rispetto alla base canonica, come

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

Ovvero allineando le componenti degli autovettori normalizzati lungo le colonne. Invertendo la relazione di diagonalizzazione

$$K_d \equiv \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = U^\dagger K U\,,$$

che dà la rappresentazione diagonale K_d dell'operatore $\hat{K}$ rispetto alla base ortonormale dei sui autovettori, si ottiene la matrice cercata

$$\begin{aligned} K &= U K_d U^\dagger \\ K &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ K &= \begin{pmatrix} 5/6 & 2/3 & -7/6 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -7/6 & 2/3 & 5/6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$