Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 settembre 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$S = \oint_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(2z)}{\cos(2z)+2}dz\,,$$

dove il percorso d'integrazione Γ è l'unione delle tre circonferenze T_k, con $k = 0, 1, 2$, orientate in senso antiorario di raggio 2 e centri in $c_k = e^{2ik\pi/3}$, ovvero

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{2} T_k \equiv \bigcup_{k=0}^{2} \left\{z : z = e^{2ik\pi/3} + 2e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\right\}\,.$$

Soluzione del primo problema

L'integranda ha infiniti poli, coincidenti con le soluzioni dell'equazione $\cos(2z) + 2 = 0$, che può essere risolta scrivendo la funzione coseno in forma esponenziale e facendo la sostituzione $w = e^{2iz}$, si ottiene, infatti, un'equazione di secondo grado in w

$$\cos(2z)+2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad w^2+4w+1=0\,.$$

La soluzioni nella variabile w prima e quindi in z sono

$$w^\pm = -2 \pm \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad e^{2iz_k^\pm} = \left(2 \mp \sqrt{3}\right)e^{(2k+1)i\pi}\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

i poli hanno la forma

$$z_k^\pm = \frac{\ln\left(2\mp\sqrt{3}\right)+(2k+1)i\pi}{2i} = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{i}{2}\ln\left(2\mp\sqrt{3}\right) = \frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \frac{i}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

dove l'ultima identità segue dalla semplice relazione

$$2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left(2-\sqrt{3}\right) = -\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\,.$$

In definitiva i due insiemi di singolarità $\left\{z_k^+\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\left\{z_k^-\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, allineate lungo le rette parallele all'asse reale e simmetriche rispetto ad esso di equazioni $\operatorname{Im}(z) = \pm\ln\left(2+\sqrt{3}\right)/2$, sono l'uno il complesso coniugato dell'altro. In figura sono mostrate le tre circonferenze T_k con i rispettivi centri c_k, $k = 0, 1, 2$, unitamente ai quattro poli più vicini all'origine: $z_{-1}^\pm$ e $z_0^\pm$.
Per stabilire quali singolarità siano contenute nelle circonferenze che costituiscono il percorso di integrazione è sufficiente calcolare la distanza delle stesse dai centri e confrontarla con il raggio. Se la quantità

$$\begin{aligned} d_{m,k}^\pm \equiv \left|c_m - z_k^\pm\right| &= \left|e^{2mi\pi/3} - \frac{(2k+1)\pi}{2} \mp \frac{i}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right| \\ &= \left[\left(\cos\left(\frac{2m\pi}{3}\right) - \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi}{3}\right) \mp \frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}\right)^2\right]^{1/2}\,, \qquad m = 0,1,2;\ k \in \mathbb{Z}\,, \end{aligned}$$

è strettamente minore di o uguale a o strettamente maggiore di 2, allora la singolarità $z_k^{\pm}$ è, rispettivamente, interna o appartenente o esterna alla circonferenza T_m di centro c_m. Come funzione dell'indice k il modulo quadro $\left(d_{k,m}^{\pm}\right)^2$ ha un andamento parabolico con concavità positiva, quindi se il minimo è raggiunto per $k = k_0$, si avrà $\left(d_{k,m}^{\pm}\right)^2 \geq \left(d_{k_0,m}^{\pm}\right)^2$ per ogni $k > k_0$ o $k < k_0$. Ovvero, le funzioni di $d_{k_0+n,m}^{\pm}$ e $d_{k_0-n,m}^{\pm}$, per un dato segno e un dato valore di m, sono monotone crescenti in $n \in \mathbb{N}$.
Consideriamo la prima circonferenza, T_0 di centro $c_0 = 1$, si hanno i seguenti valori

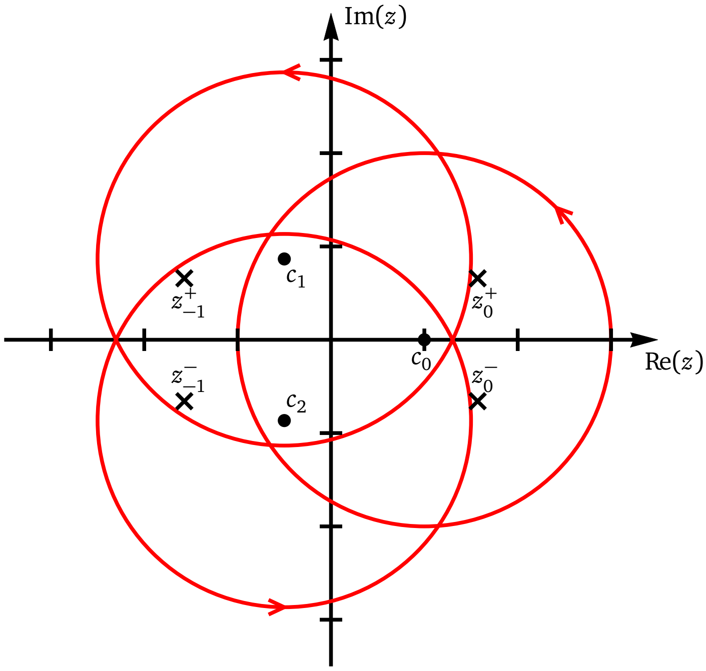
$$d_{k,m=0}^{-} = d_{k,m=0}^{+} \simeq \begin{cases} 2.65 & k=-1 \\ 0.87 & k=0 \\ 3.77 & k=1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \text{solo i poli } z_0^{\pm} \text{ sono interni a } T_0.$$

Per la seconda circonferenza, T_1, si hanno

$$d_{k,m=1}^{-} \simeq \begin{cases} 4.48 & k=-2 \\ 1.86 & k=-1 \\ 2.57 & k=0 \end{cases} \qquad d_{k,m=1}^{+} \simeq \begin{cases} 4.22 & k=-2 \\ 1.09 & k=-1 \\ 2.08 & k=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \text{solo i poli } z_{-1}^{\pm} \text{ sono interni sia a } T_1.$$

Infine la terza circonferenza, T_2,

$$d_{k,m=2}^{-} \simeq \begin{cases} 4.22 & k=-2 \\ 1.09 & k=-1 \\ 2.08 & k=0 \end{cases} \qquad d_{k,m=2}^{+} \simeq \begin{cases} 4.48 & k=-2 \\ 1.86 & k=-1 \\ 2.57 & k=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \text{solo i poli } z_{-1}^{\pm} \text{ sono interni sia a } T_2.$$



Alla luce di quanto riscontrato, usando il teorema dei residui e indicando con $f(z)$ la funzione integranda, l'integrale vale

$$S = 2i\pi \left(2\text{Res}\left[f(z), z_{-1}^{+}\right] + 2\text{Res}\left[f(z), z_{-1}^{-}\right] + \text{Res}\left[f(z), z_0^{+}\right] + \text{Res}\left[f(z), z_0^{-}\right]\right),$$

infatti, ognuna delle circonferenze contiene due poli; T_0 la coppia di complessi coniugati $z_0^{\pm}$, mentre T_1 e T_2 contengono la stessa coppia $z_{-1}^{\pm}$, da cui il fattore 2 che moltiplica i corrispondenti residui.
Per il generico residuo si ha

$$\text{Res}\left[f(z), z_k^{\pm}\right] = \lim_{z \to z_k^{\pm}} \frac{\text{sen}(2z)}{\cos(2z)+2}\left(z - z_k^{\pm}\right) = \frac{\text{sen}\left(2z_k^{\pm}\right)}{-2\,\text{sen}\left(z_k^{\pm}\right)} = -\frac{1}{2},$$

ovvero il valore è indipendente sia dal segno che dall'indice k, ne consegue che l'integrale cercato vale

$$S = -6i\pi\,.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si determini la funzione meromorfa $f(z)$, sapendo che:

- l'inversa $1/f(z)$ è una funzione intera;
- ha solo poli semplici sia al finito che all'infinito;
- verifica le seguenti condizioni

  $$\oint_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -4i\pi\,, \quad \oint_{|z|=R} f(z) dz = 0\,, \quad \oint_{\gamma} f(z)\cos(z) dz = 0\,, \quad \oint_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{sen}(z) dz = 2i\pi\,,$$

  $\forall\, R > 2$ e per ogni curva chiusa $\gamma \subset \mathbb{C}$.

Suggerimento. Potrebbe essere utile considerare lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione cercata.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Poiché l'inversa è una funzione intera non costante, essa deve avere una singolarità all'infinito. Tale singolarità non può essere essenziale, infatti, in questo caso anche $f(z)$ avrebbe una singolarità essenziale all'infinito, in contraddizione con quanto asserito nel secondo punto. Ne consegue che $1/f(z)$ ha un polo all'infinito, indicandone con $n \in \mathbb{N}$ l'ordine, si ha quindi $f(z) = O(1/z^n)$, con $z \to \infty$.
Scriviamo la funzione sotto forma di sviluppo di Mittag-Leffler, sfruttando il fatto che $f(z)$ ha solo poli semplici , si ha

$$f(z) = g(z) + \sum_k \frac{D_k}{z - z_k}\,,$$

dove $g(z)$ è la parte intera. Poichè $f(z)$ si annulla all'infinto almeno come $1/z$, $g(z)$ è nulla, quindi

$$f(z) = \sum_k \frac{R_k}{z - z_k}\,.$$

Dal teorema dell'indice segue che

$$\oint_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi (M - N)\,,$$

dove M e N sono, rispettivamente, il numero di zeri e di poli, contati con le loro molteplicità, che la funzione ha nel disco $\{z : |z| < R\}$. Per ipotesi $M = 0$, la funzione non ha zeri, quindi $N = 2$, ovvero la funzione ha solo due poli semplici, la possibilità che abbia un polo doppio è esclusa dall'ipotesi di presenza di soli poli semplici. Inoltre, poiché l'integrale della prima condizione rimane costante per ogni $R > 2$, i poli devono appartenere al disco $\{z : |z| < 2\}$. In definitiva lo sviluppo di Mittag-Leffler ha solo due termini ed è

$$f(z) = \frac{D_1}{z - z_1} + \frac{D_2}{z - z_2}\,.$$

Dalla seconda condizione integrale

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=R} f(z) dz = \mathrm{Res}\,[f(z), z_1] + \mathrm{Res}\,[f(z), z_2] = D_1 + D_2\,,$$

si ha $D_1 = -D_2 \equiv D$ e, ovviamente, $|z_1|, |z_2| < 2$.
Dalla terza condizione integrale si evince che la funzione $f(z)\cos(z)$ è analitica e che quindi i poli di $f(z)$ coincidono

con gli zeri della funzione coseno. Poiché i poli di $f(z)$ sono nel cerchio centrato nell'origine e di raggio $R = 2$, gli unici zeri del coseno, coincidenti con i poli di $f(z)$, appartenenti a tale insieme sono $z_{1,2} = \pm\pi/2$. Si arriva alla forma

$$f(z) = D\left(\frac{1}{z-\pi/2} - \frac{1}{z+\pi/2}\right) = \frac{\pi D}{z^2 - \pi^2/4}\,.$$

Infine, usando l'ultima condizione integrale, si ottiene il valore di D, infatti

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{sen}(z)\,dz = D\left(\mathrm{Res}\left[f(z)\,\mathrm{sen}(z), \pi/2\right] + \mathrm{Res}\left[f(z)\,\mathrm{sen}(z), -\pi/2\right]\right) \\ &= D\left(\mathrm{sen}(\pi/2) - \mathrm{sen}(-\pi/2)\right) = 2D \qquad \Rightarrow \qquad D = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

La funzione cercata è quindi

$$f(z) = \frac{\pi/2}{z^2 - \pi^2/4}\,.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Dopo aver determinato i domini di convergenza delle rappresentazioni

$$R_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+k^2}\,, \qquad R_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\zeta(2j+2)z^{2j}\,,$$

si dimostri che la prima è la continuazione analitica della seconda.
Suggerimenti. I comportamenti asintotici della funzione zeta di Riemann valutata sui numeri pari e della serie dei logaritmi naturali dei numeri interi sono

$$\zeta(2n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\pi n}}{(2n)!}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\,, \qquad \sum_{j=1}^{n}\ln(j) \underset{n\to\infty}{\sim} n\left(\ln(n)-1\right)\,.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La rappresentazione $R_0(z)$ è lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione, infatti

$$R_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-ik} - \frac{1}{z+ik}\right)\frac{1}{2ik} = \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1/k}{z-ik} + \frac{1}{2i}\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1/k}{z-ik},$$

ovvero $R_0(z)$ e quindi la funzione completa è meromorfa, ha poli semplici in $z = z_k = ik$, con residui $R_k = (2ik)^{-1}$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Il dominio di convergenza coincide con quello di analiticià ovvero

$$D_0 = \{z : z \neq ik,\ k = \pm1, \pm2, \ldots\}\,.$$

La rappresentazione $R_1(z)$ è una serie di Taylor, in dominio di convergenza è un cerchio di raggio

$$\begin{aligned} R &= \left(\limsup_{j\to\infty}|\zeta(2j+2)|^{1/j}\right)^{-1} \\ &= \left(\lim_{j\to\infty}\left|\frac{2\sqrt{\pi(j+1)}}{(2j+2)!}\left(\frac{2j+2}{e}\right)^{2j+2}\right|^{1/j}\right)^{-1} \\ &= \left[\lim_{j\to\infty}\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2j}}}{e^{2+\frac{2}{j}}}e^{\left(2+\frac{2}{j}\right)\ln(2j+2) - \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{2j+2}\ln(k)}\right]^{-1} \\ &= \left\{\lim_{j\to\infty}(2\pi)^{\frac{1}{2j}}\exp\left[\left(2+\frac{2}{j}\right)(\ln(2j+2)-1) - \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{2j+2}\ln(k)\right]\right\}^{-1}\,, \end{aligned}$$

usando il comportamento limite della somma dei logaritmi

$$\sum_{j=1}^{n} \ln(j) \underset{n\to\infty}{\sim} n\,(\ln(n)-1)$$

possiamo riscrivere l'ultimo termine ad esponente come

$$\begin{aligned}
R &= \left\{ \lim_{j\to\infty} (2\pi)^{\frac{1}{2j}} \exp\left[\left(2+\frac{2}{j}\right)(\ln(2j+2)-1) - \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{2j+2} \ln(k) \right] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \lim_{j\to\infty} (2\pi)^{\frac{1}{2j}} \exp\left[\left(2+\frac{2}{j}\right)(\ln(2j+2)-1) - \left(2+\frac{2}{j}\right)(\ln(2j+2)-1) \right] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \lim_{j\to\infty} (2\pi)^{\frac{1}{2j}} \right\}^{-1} = 1\,,
\end{aligned}$$

il raggio di convergenza è $R=1$, quindi il dominio è il cerchio unitario $D_1 = \{z : |z| < 1\}$.
Calcoliamo lo sviluppo in serie di Taylor di $R_0(z)$ centrato nell'origine. Per il teorema di Abel, il raggio di convergenza di un tale sviluppo sarà dato dalla distanza tra il centro, l'origine, e la singolarità più vicina. In questo caso le singolarità più vicine sono i due poli semplici $z_{\pm 1} = \pm i$ e quindi il raggio di convergenza è $R = |0 \mp i| = 1$, ovvero la serie di Taylor converge nel cerchio unitario. Per ottenere la serie usiamo la serie geometrica come segue

$$R_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1/k^2}{1+z^2/k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{k^{2j+2}} = \sum_{j=0}^{\infty} z^{2j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{k^{2j+2}} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} C_{2j} z^{2j}\,,$$

la penultima identità vale in quanto si ha

$$\left| \frac{z^2}{k^2} \right| < 1\,, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

che, a sua volta, è implicata della condizione $|z| < 1$, ovvero $z \in D_0$, data per ipotesi.
Per valori di w tali che $\mathrm{Re}(w) > 1$, la funzione zeta di Riemann può essere rappresentata dalla serie

$$\zeta(w) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-w}\,,$$

ne consegue che la serie che rappresenta il coefficiente $2j$-esimo C_{2j} della serie di Taylor può essere espressa in termini della stessa funzione zeta, ovvero

$$C_{2j} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2j+2)} = \zeta(2j+2)\,,$$

infatti $(2j+2) \geq 4$ per $j \in \mathbb{N}$. In definitiva, nel cerchio unitario vale la rappresentazione

$$R_0(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \zeta\,(2j+2)\, z^{2j}\,,$$

che coincide con $R_1(z)$ e quindi l'una è la continuazione analitica dell'altra.

Quarto problema (punteggio 6/30)

L'operatore hermitiano $\hat{S}$, definito in uno spazio di Hilbert di dimensione tre, ha le seguenti proprietà

$$\det\left(\hat{S}\right) = -\frac{1}{4}, \qquad \mathrm{Tr}\left(\hat{S}\right) = 1, \qquad \left\|\hat{S}\right\| = 1.$$

Sapendo, inoltre, che $\left[\hat{S}, \hat{T}\right] = 0$, dove l'operatore $\hat{T}$ è, in notazione a blocchi rispetto alla base canonica,

$$T = \begin{pmatrix} 2 & \\ & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

e σ_1 è la prima matrice di Pauli, si ottenga la matrice S che rappresenta l'operatore $\hat{S}$ rispetto alla stessa base canonica.

Suggerimento. Nella rappresentazioni diagonali si dispongano gli autovalori in ordine crescente, ovvero se gli autovalori di una matrice 3×3 M sono μ_1 ,μ_2 e μ_3 con $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$, allora $M_d = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

Soluzione del quarto problema

Poiché l'operatore è hermitiano gli autovalori λ_1,λ_2 e λ_3 sono reali. Il determinante, la traccia e la norma sono esprimibili in termini degli autovalori come:

$$\det\left(\hat{S}\right) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{1}{4}, \qquad \mathrm{Tr}\left(\hat{S}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \qquad \left\|\hat{S}\right\| = \max_{j=1,2,3}\left\{\left|\lambda_j\right|\right\} = 1.$$

Dal valore della norma si ottiene che uno degli autovalori deve essere uguale a $+1$ o -1. Consideriamo i due casi, con $\lambda_1 = 1$ avremmo

$$\det\left(\hat{S}\right) = \lambda_2\lambda_3 = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{4\lambda_2},$$

l'ultima identità è lecita in quanto nessuno degli autovalori è nullo essendo non nullo il determinante. Sostituendo questa espressione di λ_3 nella definizione della traccia si ottiene un'equazione per il rimanente autovalore

$$\lambda_2 - \frac{1}{4\lambda_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{2}.$$

È immediato osservare come lo spettro $\{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2, \lambda_3 = -1/2\}$ verifichi le condizioni richieste

$$\begin{aligned}
\det\left(\hat{S}\right) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},\\
\mathrm{Tr}\left(\hat{S}\right) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1,\\
\left\|\hat{S}\right\| &= \max_{j=1,2,3}\left\{\left|\lambda_j\right|\right\} = \max\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = 1.
\end{aligned}$$

Nel caso di $\lambda_1 = -1$, avremmo

$$\det\left(\hat{S}\right) = -\lambda_2\lambda_3 = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_3 = \frac{1}{4\lambda_2},$$

l'equazione e gli autovalori che si ottengono dalla condizione della traccia sono

$$\lambda_2 + \frac{1}{4\lambda_2} - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2^2 - 2\lambda_2 + \frac{1}{4} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{2,3} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lo spettro $\left\{-1, 1 - \sqrt{3}/2, 1 + \sqrt{3}/2\right\}$ verifica solo le condizioni del determinante e della traccia e non quella della norma, infatti

$$\begin{aligned}
\det\left(\hat{S}\right) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\left(1 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4},\\
\mathrm{Tr}\left(\hat{S}\right) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1,\\
\left\|\hat{S}\right\| &= \max_{j=1,2,3}\left\{\left|\lambda_j\right|\right\} = \max\left\{1, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1.
\end{aligned}$$

Ne consegue che la rappresentazione diagonale dell'operatore $\hat{S}$ è

$$S_d = \mathrm{diag}\,(-1/2, 1/2, 1)\ ,$$

dove, seguendo il suggerimento, gli autovalori sono disposti in ordine crescente.
I due operatori $\hat{S}$ e $\hat{T}$ sono hermitiani, quindi normali e hanno commutatore nullo, il che implica che ammettono lo stesso insieme ortonormale di autovettori. Gli autovalori dell'operatore $\hat{T}$ si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica

$$\det\left(\hat{T} - \lambda \hat{I}\right) = 0$$
$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$(2-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right) = 0\,,$$

la soluzioni sono

$$\lambda_1 = -1\,, \qquad \lambda_2 = 1\,, \qquad \lambda_3 = 2\,.$$

Gli autovettori corrispondenti

$$u_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3\,,$$

verificano le equazioni agli autovalori

$$T u_j = \lambda_j u_j$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix},$$

da cui si hanno le condizioni

$$\begin{cases} 2x_1 = -x_1 \\ z_1 = -y_1 \\ y_1 = -z_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_2 = x_2 \\ z_2 = y_2 \\ y_2 = z_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_3 = 2x_3 \\ z_3 = 2y_3 \\ y_3 = 2z_3 \end{cases}$$

posto $y_1 = y_2 = 1$ e $y_3 = 0$, si hanno le componenti

$$\begin{cases} x_1' = 0 \\ y_1' = 1 \\ z_1' = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = 0 \\ y_2' = 1 \\ z_2' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 1 \\ y_3 = 0 \\ z_3 = 0 \end{cases},$$

dove con le i valori "primati" indicano le componenti non normalizzate. In definitiva gli autovettori normalizzati sono

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria che diagonalizza entrambi le matrici S e T è

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero si hanno

$$T_d = U^\dagger T U = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 2)\ , \qquad S_d = U^\dagger S U = \mathrm{diag}\,(-1/2, 1/2, 1)\ .$$

Invertendo l'ultima identità si ricava la matrice S che rappresenta l'operatore $\hat{S}$ rispetto alla base canonica

$$
\begin{aligned}
S = U S_d U^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/\left(2\sqrt{2}\right) & 1/\left(2\sqrt{2}\right) & 0 \\ 1/\left(2\sqrt{2}\right) & 1/\left(2\sqrt{2}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si ottenga la matrice A, di norma $\|A\| = \ln(2)$, che verifica l'equazione

$$
e^A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Soluzione del quinto problema

Applichiamo il teorema spettrale, infatti la matrice B è hermitiana e quindi diagonalizzabile. Indicando con $A^d = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e $B^d = \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ le rappresentazioni diagonali delle matrici, si ha per gli autovalori la relazione: $e^{\alpha_j} = \beta_j$, $j = 1, 2, 3$, da cui

$$
A^d_{k_1,k_2,k_3} = \begin{pmatrix} \ln(\beta_1) + 2ik_1\pi & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\beta_2) + 2ik_2\pi & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\beta_3) + 2ik_3\pi \end{pmatrix},
$$

valida $\forall\ (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3$. Gli autovalori della matrice B si ottengono come soluzioni dell'equazione caratteristica

$$
\begin{aligned}
\det(B - \beta I) &= 0 \\
\det \begin{pmatrix} 1-\beta & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2-\beta & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1-\beta \end{pmatrix} &= 0 \\
(1-\beta)\left[\left(\frac{3}{2} - \beta\right)(1-\beta) - \frac{1}{4}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1-\beta)\right] &= 0 \\
(1-\beta)\left[\left(\frac{3}{2} - \beta\right)(1-\beta) - \frac{1}{2}\right] &= 0 \\
(1-\beta)\left(\beta^2 - \frac{5}{2}\beta + 1\right) &= 0,
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\beta_1 = \frac{1}{2}, \qquad \beta_2 = 1, \qquad \beta_3 = 2.
$$

Gli autovettori corrispondenti b_j, $j = 1, 2, 3$, sono

$$
\begin{aligned}
B b_j &= \beta_j b_j \\
\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} &= \beta_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

si ottiene il sistema

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_j\left(1-\beta_j\right)+y_j=0 \\ x_j+y_j\left(3-2\beta_j\right)+z_j=0 \\ y_j+2z_j\left(1-\beta_j\right)=0 \end{array}\right. .$$

Per $\beta_j \neq 1$, ovvero per $j \neq 2$, posto $x'_j = 1$, si ottengono

$$y'_j = -2\left(1-\beta_j\right), \qquad z'_j = 1,$$

dove le componenti "primate" sono quelle dei vettori non normalizzati. Invece, nel caso di $j = 2$, posto $x_2 = 1$, si ha $y_2 = 0$ e $z_2 = -x_2 = -1$. In definitiva gli autovettori normalizzati di B sono

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per cui si ha la matrice unitaria diagonalizzante

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Usando gli autovalori di B si ottiene la rappresentazione diagonale della matrice A, dipendente dai tre parametri k_1, k_2 e k_3, come

$$A^d_{k_1,k_2,k_3} = \begin{pmatrix} -\ln(2)+2ik_1\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2ik_2\pi & 0 \\ 0 & 0 & \ln(2)+2ik_3\pi \end{pmatrix}.$$

I valori dei parametri possono essere scelti usando la condizione sulla norma. La norma coincide con il massimo dei moduli degli autovalori, in generale si ha

$$\begin{aligned} \left\|A_{k_1,k_2,k_3}\right\| &= \max\left\{\left|-\ln(2)+2ik_1\pi\right|, \left|2ik_2\pi\right|, \left|\ln(2)+2ik_3\pi\right|\right\} \\ &= \max\left\{\sqrt{\ln^2(2)+4k_1^2\pi^2}, 2\left|k_2\right|\pi, \sqrt{\ln^2(2)+4k_3^2\pi^2}\right\}. \end{aligned}$$

Affinché si ottenga, come richiesto, una norma pari a $\ln(2)$, l'unica terna possibile è quella nulla, ovvero $(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$. Infatti, in questo caso avremmo

$$\left\|A_{0,0,0}\right\| = \max\left\{\left|-\ln(2)\right|, 0, \left|\ln(2)\right|\right\} = \ln(2).$$

Ne consegue che la rappresentazione diagonale della matrice cercata è $A^d_{0,0,0}$, da questa, usando la matrice unitaria V, si calcola la matrice A, come

$$\begin{aligned} A = VA^d_{0,0,0}V^\dagger &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\ln(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln(2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\ln(2)}{\sqrt{6}} \\ \frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2\ln(2)}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\ln(2)}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\ln(2)}{6} & \frac{2\ln(2)}{3} & -\frac{\ln(2)}{6} \\ \frac{2\ln(2)}{3} & \frac{\ln(2)}{3} & \frac{2\ln(2)}{3} \\ -\frac{\ln(2)}{6} & \frac{2\ln(2)}{3} & -\frac{\ln(2)}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Definito in $L^2(\mathbb{R})$ l'operatore trasformata di Fourier $\hat{F}$ come

$$\hat{F}f(k) = \mathscr{F}_k[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixk} dx \,,$$

si determino le autofunzioni e gli autovalori dell'operatore $\left(\hat{F}^4 - \hat{F}^2\right)$, ovvero le funzioni $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e gli scalari $\lambda \in \mathbb{C}$ tali da verificare l'equazione agli autovalori

$$\left(\hat{F}^4 - \hat{F}^2\right) g(x) = \hat{F}^4 g(x) - \hat{F}^2 g(x) = \lambda g(x) \,.$$

Suggerimento. L'azione di una potenza intera $n \in \mathbb{N}$ dell'operatore $\hat{F}$ è data da

$$\hat{F}^n f(x) = \mathscr{F}_x \left[\mathscr{F}_{x_1} \left[\mathscr{F}_{x_2} \left[\ldots \mathscr{F}_{x_{n-1}} [f] \right] \right] \right] \,.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

L'azione del quadrato dell'operatore $\hat{F}$ non è altro che la trasformata di Fourier della trasformata di Fourier, non si ottiene la funzione di partenza poiché la seconda azione non è l'antitrasformata di Fourier, si ha infatti

$$\hat{F}^2 f(x) = \hat{F} \tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ik(-x)} dk = f(-x) \,.$$

Ne consegue che $\hat{F}^2$ è l'operatore di riflessione, in quanto la sua azione su una generica funzione di $L^2(\mathbb{R})$ restituisce la stessa funzione con la variabile cambiata di segno. Facendo agire due volte $\hat{F}^2$, ovvero $\hat{F}^4$, su una funzione si ottiene la stessa funzione (si ha una doppia riflessione della variabile $x \to -(-x) = x$), quindi $\hat{F}^4$ coincide con l'operatore identità di $L^2(\mathbb{R})$. Alla luce di questi risultati, consideriamo l'azione dell'operatore $\left(\hat{F}^4 - \hat{F}^2\right)$, cioè il primo membro dell'equazione agli autovalori del problema, avremo

$$\left(\hat{F}^4 - \hat{F}^2\right) g(x) = g(x) - g(-x) \,.$$

Si vede facilmente che le uniche autofunzioni di questo operatore sono quelle a parità definita, ovvero le funzioni pari $p(x)$, tali da verificare l'identità $p(x) = p(-x)$ e quelle dispari $d(x)$, per le quali si ha $d(x) = -d(-x)$. In questi casi si avranno le due equazioni agli autovalori

$$\begin{aligned} \left(\hat{F}^4 - \hat{F}^2\right) p(x) &= p(x) - p(-x) = p(x) - p(x) = 0 p(x) \,, \\ \left(\hat{F}^4 - \hat{F}^2\right) d(x) &= d(x) - d(-x) = d(x) + d(x) = 2 d(x) \,. \end{aligned}$$

In definitiva si ha che lo spettro discreto dell'operatore $\left(\hat{F}^4 - \hat{F}^2\right)$ contiene i soli due autovalori: $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = 2$ e che le autofunzioni corrispondenti sono rispettivamente tutte le funzioni pari e tutte quelle dispari di $L^2(\mathbb{R})$.