Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 settembre 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$\Psi = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{Im}(z)^2}{\mathrm{Re}(z)^2 + 2} d\arg(z) \,.$$

Soluzione del primo problema

Il percorso d'integrazione è la circonferenza unitaria

$$c_1 = \{z : |z| = 1\} = \left\{z : z = e^{it},\, t \in [0, 2\pi]\right\} \,,$$

ne consegue che $\forall\, z \in c_1$ si ha $z^* = 1/z$, quindi

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + 1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}\,, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - 1/z}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}\,, \qquad \arg(z) = t = -i\ln(z)\,, \qquad d\arg(z) = dt = -i\frac{dz}{z}\,.$$

Usando queste espressioni l'integrale può essere riscritto come

$$\Psi = i \oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2 + 8z^2} \frac{dz}{z} = i \oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2}{z\,(z^4 + 10z^2 + 1)} dz = \oint_{|z|=1} f(z) dz\,,$$

dove si è definita la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{i(z^2-1)^2}{z\,(z^4 + 10z^2 + 1)}\,,$$

che ha i cinque poli semplici

$$z_0 = 0\,, \qquad z_{1,2} = \pm\sqrt{-5 + 2\sqrt{6}}\,, \qquad z_{3,4} = \pm\sqrt{-5 - 2\sqrt{6}}\,.$$

I primi tre, z_0, z_1 e z_2, sono interni alla circonferenza unitaria, infatti si ha banalmente $|z_0| = 0 < 1$, mentre possiamo stimare il modulo quadro di $z_{1,2}$ come

$$|z_{1,2}|^2 = 5 - 2\sqrt{6} = \sqrt{25} - \sqrt{24} = 5\left(1 - \sqrt{\frac{24}{25}}\right) = 5\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{25}}\right) \simeq 5\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{25}\right) = \frac{1}{10}\,,$$

ne consegue che $|z_{1,2}| < 1$. Allo stesso modo si ha che i poli $z_{3,4}$ sono esterni a c_1,

$$|z_{3,4}|^2 = 5\left(1 + \sqrt{\frac{24}{25}}\right) = 5\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{25}}\right) \simeq 5\left(1 + 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{25}\right) = \frac{99}{10}\,,$$

da cui $|z_{3,4}| > 1$.
Il valore dell'integrale Ψ si ottiene come somma dei residui dei poli interni a c_1, cioè

$$\Psi = 2i\pi \sum_{k=0}^{2} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right]\,.$$

Il residuo nell'origine è uguale ad uno, infatti

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0} f(z)z = \lim_{z\to 0} \frac{i(z^2-1)^2}{z^4+10z^2+1} = i\,.$$

I residui in z_1 e z_2 coincidono in quanto dipendono dai quadrati dei valori dei poli, che differiscono solo per il segno,

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_{1,2}\right] = \lim_{z\to z_{1,2}} f(z)(z-z_{1,2}) = \frac{i(z_{1,2}^2-1)^2}{z_{1,2}} \lim_{z\to z_{1,2}} \frac{(z-z_{1,2})}{z^4+10z^2+1} = \frac{i(z_{1,2}^2-1)^2}{4z_{1,2}^2\left(z_{1,2}^2+5\right)}\,.$$

Esplicitamente si ha il valore comune $z_{1,2}^2 = -5+2\sqrt{6}$, quindi

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_{1,2}\right] = \frac{i(z_{1,2}^2-1)^2}{4z_{1,2}^2\left(z_{1,2}^2+5\right)} = \frac{i\left(-6+2\sqrt{6}\right)^2}{4\left(-5+2\sqrt{6}\right)2\sqrt{6}} = \frac{12i\left(5-2\sqrt{6}\right)}{8\left(12-5\sqrt{6}\right)} = \frac{3i\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(12+5\sqrt{6}\right)}{2\left(12-5\sqrt{6}\right)\left(12+5\sqrt{6}\right)} = -\frac{\sqrt{6}}{4}i\,.$$

In definitiva il valore dell'integrale è

$$\Psi = 2\pi\sum_{k=0}^{2}\mathrm{Res}[f(z),z_k] = 2\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right).$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Studiando la posizione degli zeri nel piano complesso, si ottenga l'espressione esplicita della funzione intera $f(z)$ che ha espansione di Weierstrass

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(e^{(2k-1)i\pi/n}-z\right)^m \exp\left[m\left(ze^{-(2k-1)i\pi/n}-\frac{(2k-1)i\pi}{n}\right)\right],$$

con $m,n\in\mathbb{N}$ e $n\geq 2$.

Memorandum. L'espansione di Weierstrass di una funzione intera con zeri isolati e non nulli $z_k\in\mathbb{C}$ di molteplicità $\beta_k\in\mathbb{N}$, con $k=1,2,\ldots$, è

$$f(z) = f(0)e^{zf'(0)/f(0)}\prod_k\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^{\beta_k}e^{\beta_k z/z_k}\,.$$

Soluzione del secondo problema

Possiamo riscrivere l'espressione data in modo da portarla nella forma tipica di un'espansione di Weierstrass. In particolare i binomi contenenti la variabile z, possono essere scritti nella forma $(1-z/z_k)$ come

$$\begin{aligned}
f(z) &= \prod_{k=1}^{n}\left(e^{(2k-1)i\pi/n}-z\right)^m \exp\left[m\left(ze^{-(2k-1)i\pi/n}-\frac{(2k-1)i\pi}{n}\right)\right]\\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{e^{(2k-1)i\pi/n}}\right)^m e^{m(2k-1)i\pi/n}\exp\left[m\left(ze^{-(2k-1)i\pi/n}-\frac{(2k-1)i\pi}{n}\right)\right]\\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{e^{(2k-1)i\pi/n}}\right)^m \exp\left[mze^{-(2k-1)i\pi/n}\right]\\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{e^{(2k-1)i\pi/n}}\right)^m e^{mz/e^{(2k-1)i\pi/n}}\,.
\end{aligned}$$

Confrontando questa espressione con la forma generale dell'espansione di Weierstrass si ottengono gli insiemi degli zeri e delle molteplicità corrispondenti

$$\left\{z_k = e^{(2k-1)i\pi/n}\right\}_{k=1}^{n}\,,\qquad \left\{\beta_k = m\right\}_{k=1}^{n}\,.$$

Si ha inoltre l'identità

$$f(0)e^{zf'(0)/f(0)} = 1\,,$$

da cui si ricavano i valori nell'origine della funzione e della sua derivata prima: $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$.
Una funzione intera con un numero finito di zeri isolati è necessariamente un polinomio di grado N, pari al numero degli zeri contati con le loro molteplicità, ovvero $N = m \cdot n \in \mathbb{N}$. Scriviamo il polinomio nella forma

$$f(z) \equiv P_N(z) = a\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)^m = a\left[\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)\right]^m = a\,[P_n(z)]^m\;,$$

dove $P_n(z)$ è un polinomio di grado n ed a rappresenta il coefficiente della sua potenza massima. Poiché tutti gli zeri hanno la stessa molteplicità m, il polinomio $P_N(z)$ non è altro che la potenza m-esima del polinomio $P_n(z)$, moltiplicata per il coefficiente a e quindi ha gli stessi zeri di $P_N(z)$, ma tutti con molteplicità uguale ad uno, ovvero sono tutti zeri semplici.
Il coefficiente della potenza massima può essere determinato sapendo che $f(0) = P_N(0) = 1$, dalle precedente definizione abbiamo

$$1 = P_N(0) = a\left[(-1)^n\prod_{k=1}^{n} z_k\right]^m\;,$$

ma il prodotto degli zeri è pari a $(-1)^n$, infatti

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \prod_{k=1}^{n} e^{(2k-1)i\pi/n} = \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)i\pi}{n}\right] = \exp\left[\frac{(n(n+1)-n)i\pi}{n}\right] = e^{ni\pi} = (-1)^n\,,$$

ne consegue che

$$1 = a\left[(-1)^{2n}\right]^m = a\,,$$

e quindi

$$P_N(z) = [P_n(z)]^m = \left[\prod_{k=1}^{n}(z - z_k)\right]^m\;.$$

È facile vedere che gli zeri $\{z_k\}_{k=1}^n$ rappresentano le n radici n-esime di -1, ovvero le n determinazioni diverse della radice n-esima. Indicando con il pedice j la j-esima radice, si ha

$$(-1)_j^{1/n} = \left(e^{(2j-1)i\pi}\right)^{1/n} = e^{(2j-1)i\pi/n}\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

In altri termini

$$z_k = (-1)_k^{1/n}\,, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

elevando ad n ambo i membri e scrivendo l'identità a zero si hanno le n equazioni

$$1 + z_k^n = 0\,, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Poichè gli n zeri del polinomio $P_n(z)$ verificano le equazioni

$$P_n(z_k) = 0\,, \qquad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

è facile dedurre l'espressione esplicita di $P_n(z)$, ovvero

$$P_n(z) = 1 + z^n\,.$$

Infine il polinomio cercato è

$$f(z) = P_N(z) = (1 + z^n)^m\;.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Si verifichi che

$$g(z)=\sum_{j=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(2j\pi/3)-\cos(2j\pi/3)\right]z^j$$

è la serie di Laurent, centrata nell'origine e convergente nella corona circolare $C_{1,\infty}=\{z:1<|z|<\infty\}$, della funzione

$$f(z)=-\sum_{k=-1}^{\infty}\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{k+2}(z-z_1)^k\,,\qquad z_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\qquad |z-z_1|<\sqrt{3}\,.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La serie $f(z)$ è facilmente sommabile, infatti, con $|z-z_1|<\sqrt{3}$, si può sfruttare la serie geometrica di ragione $(z-z_1)i/\sqrt{3}$ e si ha

$$\begin{aligned}
f(z)&=-\sum_{k=-1}^{\infty}\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{k+2}(z-z_1)^k=-\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^{k}(z-z_1)^k\\
&=-\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-(z-z_1)i/\sqrt{3}}=-\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z-z_1}+\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z+i\sqrt{3}-z_1}\\
&=-\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z-z_1}+\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z-z_2}=-\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)}\\
&=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}=\frac{1}{(z+1/2-i\sqrt{3}/2)(z+1/2+i\sqrt{3}/2)}\,,\\
&=\frac{1}{(z+1/2)^2+3/4}=\frac{1}{z^2+z+1}\,,
\end{aligned}$$

dove: $z_2=-1/2-i\sqrt{3}/2$.
Per ottenere la serie di Laurent centrata nell'origine e convergente in $C_{1,\infty}=\{z:1<|z|<\infty\}$, riscriviamo la funzione come

$$f(z)=-\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z-z_1}+\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z-z_2}=-\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z(1-z_1/z)}+\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z(1-z_2/z)}\,,$$

e, poiché $|z_1|=|z_2|=1$, con $1<|z|<\infty$ si ha: $|z_1/z|<1$ e $|z_2/z|<1$, quindi

$$g(z)=\frac{i}{z\sqrt{3}}\left[-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_1}{z}\right)^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_2}{z}\right)^k\right]=\frac{i}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}(-z_1^k+z_2^k)z^{-k-1}\,,$$

con la sostituzione $j=-k-1$ si ha

$$g(z)=\frac{i}{\sqrt{3}}\sum_{j=-\infty}^{-1}\left(-z_1^{-j-1}+z_2^{-j-1}\right)z^j\,.$$

Sfruttando la forma polare di z_1 e z_2, cioè: $z_{1,2}=e^{\pm 2i\pi/3}$, è possibile riscrivere i coefficienti della serie $g(z)$ in forma di funzioni seno, ovvero

$$g(z)=\frac{i}{\sqrt{3}}\sum_{j=-\infty}^{-1}\left(-e^{-2i(j+1)\pi/3}+e^{2i(j+1)\pi/3}\right)z^j=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{j=-\infty}^{-1}\operatorname{sen}(2(j+1)\pi/3)z^j\,.$$

Infine, con la formula di somma della funzione seno, si ottiene l'espressione cercata

$$\begin{aligned}
g(z)&=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{j=-\infty}^{-1}[\operatorname{sen}(2j\pi/3)\cos(2\pi/3)+\cos(2j\pi/3)\operatorname{sen}(2\pi/3)]z^j\\
&=\sum_{j=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(2j\pi/3)-\cos(2j\pi/3)\right]z^j\,.
\end{aligned}$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

L'operatore normale $\hat{F}$, definito in uno spazio di Hilbert a 3 dimensioni, E_3, ha autovalori

$$\phi_1 = 2/3\,, \qquad \phi_2 = 2\,, \qquad \phi_3 = -2/3\,.$$

Sapendo che gli autovettori rappresentano un insieme ortonormale e che i primi due sono definiti come

$$|f_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1\rangle + |e_2\rangle\right)\,, \qquad |f_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|e_1\rangle - |e_2\rangle + i|e_3\rangle\right)\,,$$

dove $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$ è una base ortonormale, si determini la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{G} = \widehat{\cos}\left(\pi\hat{F}\right)$ rispetto alla stessa base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$.

Soluzione del quarto problema

Determiniamo l'espressione del terzo autovettore, $|f_3\rangle$, relativo all'autovalore $\phi_3 = -2/3$, sfruttando la condizione di ortogonalità ai primi due autovettori. La forma generica è

$$|f_3\rangle = \frac{x|e_1\rangle + y|e_2\rangle + z|e_3\rangle}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}}\,,$$

le condizioni di ortogonalità, sfruttando l'ortonormalità dei vettori della base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$, sono

$$0 = \langle f_1|f_3\rangle = \frac{x + y}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}}\,, \qquad 0 = \langle f_2|f_3\rangle = \frac{x - y - iz}{\sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2}}\,,$$

da queste, posto $x = 1$, si hanno i valori dei coefficienti: $y = -1$, $z = -2i$ e quindi il terzo autovettore è

$$|f_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|e_1\rangle - |e_2\rangle - 2i|e_3\rangle\right)\,.$$

La matrice unitaria diagonalizzante, che si costruisce disponendo in colonna le componenti degli autovettori ortonormali, è

$$U = \begin{pmatrix} \langle e_1|f_1\rangle & \langle e_1|f_2\rangle & \langle e_1|f_3\rangle \\ \langle e_2|f_1\rangle & \langle e_2|f_2\rangle & \langle e_2|f_3\rangle \\ \langle e_3|f_1\rangle & \langle e_3|f_2\rangle & \langle e_3|f_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & i/\sqrt{3} & -2i/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

La matrice F, che rappresenta l'operatore $\hat{F}$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$, si ottiene a partire da quella diagonale $F_d = \operatorname{diag}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, per mezzo della trasformazione

$$F = UF_dU^\dagger\,.$$

La stessa relazione si ha anche per l'operatore $\hat{G}$, infatti è possibile applicare il teorema spettrale per cui le rappresentazioni spettrali dei due operatori sono

$$\hat{F} = \sum_{k=1}^{3} \phi_k |f_k\rangle\langle f_k|\,, \qquad \hat{G} = \sum_{k=1}^{3} \cos(\pi\phi_k)|f_k\rangle\langle f_k|\,,$$

ovvero $\hat{F}$ e $\hat{G}$ hanno gli stessi autovettori, mentre gli insiemi degli autovalori sono, rispettivamente, $\{\phi_k\}_{k=1}^3$ e $\{\cos(\pi\phi_k)\}_{k=1}^3$. La matrice G, che rappresenta l'operatore $\hat{G}$ rispetto alla base $\{|e_3\rangle\}_{k=1}^3$, si ottiene da quella diagonale $G_d = \operatorname{diag}(\cos(2\pi/3), \cos(2\pi), \cos(-2\pi/3)) = \operatorname{diag}(-1/2, 1, -1/2)$ con la stessa trasformazione unitaria U che diagonalizza F, si ha

$$G = UG_dU^\dagger = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & i/\sqrt{3} & -2i/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2i/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

da cui

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -i/2 \\ -1/2 & 0 & i/2 \\ i/2 & -i/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x-x') \int_{-\infty}^{x'} dx'' g(x''),$$

con

$$f(x) = \theta(\pi+x)\theta(\pi-x)\cos(x), \qquad g(x) = e^{-x^2},$$

dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino di Heaviside.

Soluzione del quinto problema

La funzione $F(x)$ è la convoluzione di $f(x)$ e

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-x'^2} dx',$$

quindi, per il teorema della convoluzione, la sua trasformata di Fourier è proporzionale al prodotto delle trasformate delle due funzioni, in particolare

$$\mathscr{F}_k[F] = \sqrt{2\pi}\, \mathscr{F}_k[f]\mathscr{F}_k[G].$$

Per calcolare $\mathscr{F}_k[G]$ usiamo la relazione

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(G(x)+C) = g(x),$$

dove C è una costante arbitraria, e la formula per ottenere la trasformata di Fourier della derivata prima, ovvero

$$\mathscr{F}_k[g] = \mathscr{F}_k\left[G'\right] = ik\mathscr{F}_k[G(x)+C] \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{F}_k[G] = \frac{\mathscr{F}_k[g]}{ik} - \mathscr{F}_k[C] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}\,ik} - C\sqrt{2\pi}\,\delta(k).$$

La funzione $f(x)$ può essere ridefinita, esplicitando i comportamenti delle funzioni di Heaviside, con la duplice legge

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}.$$

La sua trasformata di Fourier si ottiene integrando esplicitamente

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_k[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{ix}+e^{-ix}\right) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-ix(k-1)} + e^{-ix(k+1)}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\pi(k-1)} - e^{i\pi(k-1)}}{-i(k-1)} + \frac{e^{-i\pi(k+1)} - e^{i\pi(k+1)}}{-i(k+1)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi(k-1))}{k-1} + \frac{\operatorname{sen}(\pi(k+1))}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{-\operatorname{sen}(\pi k)}{k-1} + \frac{-\operatorname{sen}(\pi k)}{k+1} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(\pi k) \frac{k}{1-k^2}. \end{aligned}$$

Infine, la trasformata di Fourier cercata vale

$$\mathscr{F}_k[F] = \sqrt{2\pi}\, \mathscr{F}_k[f]\mathscr{F}_k[G] = \sqrt{2\pi}\left(\frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}\,ik} - C\sqrt{2\pi}\,\delta(k)\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(\pi k) \frac{k}{1-k^2},$$

ma, sfruttando l'identità simbolica: $h(x)\delta(x) = h(0)\delta(x)$, si elimina il termine dipendente dalla delta di Dirac, ovvero

$$\mathscr{F}_k[F] = \frac{i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(\pi k)\,e^{-k^2/4}}{k^2-1}\,.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

L'operatore $\hat{B} = |b\rangle\langle b|$ è definito in termini di un vettore $|b\rangle$, appartenente ad uno spazio di Hilbert E_N di dimensione finita $N \in \mathbb{N}$. Sapendo che è un proiettore si dimostri che $\hat{B}$ ha norma unitaria.
Inoltre, dopo averne stabilito il dominio di convergenza nel piano complesso β, si calcoli, in termini dell'operatore $\hat{B}$ e dello scalare β, l'operatore somma $\hat{S}_\beta$ della serie

$$\hat{S}_\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\hat{B}\right)^k .$$

Soluzione del sesto Problema

Essendo un proiettore, l'operatore $\hat{B}$ deve essere hermitiano ed idempotente. L'hermitianità è automaticamente garantita dalla definizione, infatti per un generico operatore "ket-bra" $\hat{O} = |x\rangle\langle y|$ si ha

$$\hat{O}^\dagger = (|x\rangle\langle y|)^\dagger = |y\rangle\langle x|,$$

da cui: $\hat{B}^\dagger = (|b\rangle\langle b|)^\dagger = |b\rangle\langle b| = \hat{B}$. La condizione di idempotenza si ha solo se il vettore $|b\rangle$ ha norma unitaria, ovvero, assumendola si arriva alla condizione $||b|| = 1$, infatti

$$\hat{B} = \hat{B}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{|b\rangle\langle b|}_{\hat{B}} = \underbrace{(|b\rangle\langle b|)(|b\rangle\langle b|)}_{\hat{B}^2} = |b\rangle\langle b|b\rangle\langle b| = |b\rangle\langle b| \qquad \Rightarrow \qquad \langle b|b\rangle = ||b||^2 = 1\,.$$

La norma del proiettore, così come quella di un generico operatore, è data dall'estremo superiore

$$||B|| = \sup_{||x||=1} \left\{ \left\|\hat{B}|x\rangle\right\| \right\},$$

usano la definizione del proiettore in termini del vettore $|b\rangle$ si ha, per la norma di $\hat{B}$, la seguente

$$||B|| = \sup_{||x||=1} \left\{ \left\|\hat{B}|x\rangle\right\| \right\} = \sup_{||x||=1} \{ |||b\rangle\langle b|x\rangle|| \} = \sup_{||x||=1} \left\{ |\langle b|x\rangle| \sqrt{\langle b|b\rangle} \right\} = \sup_{||x||=1} \{ |\langle b|x\rangle| \}, \qquad (\langle b|b\rangle = ||b||^2 = 1),$$

infine, con la diseguaglianza di Schwarz, si ottiene la limitazione

$$||B|| = \sup_{||x||=1} \{ |\langle b|x\rangle| \} \le \sup_{||x||=1} \{ ||b||\,||x|| \} = \sup_{||x||=1} \{ ||b||\,||x|| \} = 1\,, \qquad (||b|| = ||x|| = 1),$$

da cui si deduce $||B|| = 1$. Infatti il valore massimo, pari ad uno, è raggiunto dalla norma $\left\|\hat{B}|x\rangle\right\|$ quando $|x\rangle = |b\rangle$.
Per imporre la convergenza della serie operatoriale, richiediamo la limitatezza della somma come

$$0 \le \left\|S_\beta\right\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(\beta\hat{B}\right)^k \right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} |\beta|^k \,\|\hat{B}^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} |\beta|^k ,$$

la serie ottenuta è una serie geometrica di ragione $|\beta|$ che converge nel cerchio unitario del piano complesso β, $C_1 = \{\beta \in \mathbb{C} : |\beta| < 1\}$, che rappresenta quindi il dominio di convergenza cercato.
La precedente limitazione implica la convergenza del serie operatoriale, ovvero l'esistenza dell'operatore limitato $\hat{S}_\beta$, si ha infatti

$$\left\|S_\beta\right\| \le \sum_{k=0}^{\infty} |\beta|^k = \frac{1}{1-|\beta|} < \infty\,, \qquad (0 \le |\beta| < 1)\,.$$

Si dimostra, infine, che l'espressione dell'operatore somma in termini dell'operatore $\hat{B}$ e dello scalare β è

$$\hat{S}_\beta = \left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1} .$$

Per ottenere questa risultato facciamo agire sulla somma parziale n-esima, $\hat{S}_\beta^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\beta\hat{B}\right)^k$, l'operatore $\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)$

$$\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)\hat{S}_\beta^{(n)} = \left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\beta\hat{B}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\beta\hat{B}\right)^k - \sum_{k=0}^{n+1}\left(\beta\hat{B}\right)^k = \hat{I} - \left(\beta\hat{B}\right)^{n+1} ,$$

e facciamo tendere n ad infinito. Sotto questo limite la somma parziale tende, ovviamente, alla somma, che, come già dimostrato, esiste, mentre il secondo operatore a secondo membro si annulla, ovvero tende all'operatore nullo, in quanto $|\beta| < 1$, quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)\hat{S}_\beta^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\hat{I} - \left(\beta\hat{B}\right)^{n+1}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)\hat{S}_\beta = \hat{I} .$$

A questo punto, isoliamo $\hat{S}_\beta$ facendo agire su ambo i membri l'inverso di $\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)$

$$\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1}\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)\hat{S}_\beta = \left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1}\hat{I} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{S}_\beta = \left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1} .$$

Un'altra possibilià è la seguente in cui si consiste nello sfruttare l'idempotenza del proiettore, avendo però l'accortezza di separare dalla serie in termine zero, ovvero l'operatore identità, che, a differenza di tutti gli altri termini, non è proporzionale a $\hat{B}$, quindi

$$\hat{S}'_\beta = \hat{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\beta^k\hat{B}^k = \hat{I} + \hat{B}\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k = \hat{I} + \frac{\beta}{1-\beta}\hat{B} .$$

È facile provare che le due espressioni dell'operatore somma, per ora indicate con simboli diversi, $\hat{S}_\beta = \left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1}$ e $\hat{S}'_\beta = \hat{I} + \beta(1-\beta)^{-1}\hat{B}$, coincidono. A tal fine, facciamo agire $\hat{S}'_\beta$ sull'operatore $\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)$, si ottiene l'operatore identità, infatti

$$\hat{S}'_\beta\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right) = \left(\hat{I} + \frac{\beta}{1-\beta}\hat{B}\right)\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right) = \hat{I} - \frac{\beta^2}{1-\beta}\hat{B} + \frac{\beta}{1-\beta}\hat{B} - \beta\hat{B} = \hat{I} .$$

La stessa identità si ottiene facendo agire $\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)$ su $\hat{S}'_\beta$ in quanto i due operatori commutano, ovvero

$$\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)\hat{S}'_\beta = \hat{I} .$$

Infine, applicando l'operatore $\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1}$ su ambo i membri, si arriva all'identità cercata

$$\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1}\left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)\hat{S}'_\beta = \left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad S'_\beta = \left(\hat{I} - \beta\hat{B}\right)^{-1} = \hat{S}_\beta .$$