Metodi Matematici per la Fisica

Prova parziale del 19 giugno 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio massimo: 5/60)

Nello spazio di Hilbert separabile a infinite dimensioni H sono definiti il vettore $|v\rangle$ e l'operatore $\hat{A}$ come

$$|v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}|e_k\rangle\,, \qquad \hat{A}|e_k\rangle = \frac{1}{k}|e_k\rangle + k|e_{k+1}\rangle\,,$$

dove $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ è una successione ortonormale. Si calcoli il valor medio

$$V = \frac{\langle v|\hat{A}|v\rangle}{\langle v|v\rangle}\,.$$

Soluzione del primo problema

Usando la regola di azione dell'operatore $\hat{A}$ sui vettori della successione ortonormale e l'espressione del vettore $|v\rangle$ in termini degli stessi vettori, calcoliamo il valore di aspettazione dell'operatore $\hat{A}$ rispetto al vettore $|v\rangle$

$$\begin{aligned}\langle v|\hat{A}|v\rangle &= \sum_{j,k=1}^{\infty} 3^{-j-k}\langle e_j|\hat{A}|e_k\rangle = \sum_{j,k=1}^{\infty} 3^{-j-k}\langle e_j|\left(\frac{1}{k}|e_k\rangle + k|e_{k+1}\rangle\right) = \sum_{j,k=1}^{\infty} 3^{-j-k}\left(\frac{1}{k}\delta^j_k + k\delta^j_{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3^{-2k}}{k} + 3^{-2k-1}k\right),\end{aligned}$$

Le due serie possono essere sommate considerando la serie geometrica

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{xj}\,,$$

di ragione α^x, che, per $|\alpha^x| < 1$, converge a

$$s(x) = \frac{1}{1-\alpha^x}\,.$$

Derivando il membro sinistro e il membro destro si hanno

$$\begin{aligned}\frac{ds(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1-e^{x\ln(\alpha)}} = \frac{\ln(\alpha)\alpha^x}{(1-\alpha^x)^2}\,,\\ \frac{ds(x)}{dx} &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{d}{dx}e^{xj\ln(\alpha)} = \sum_{j=1}^{\infty} j\ln(\alpha)e^{xj\ln(\alpha)} = \ln(\alpha)\sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^{xj}\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^{xj} = \frac{\alpha^x}{(1-\alpha^x)^2}\,,$$

che con $x = 1$ e $|\alpha| < 1$ dà

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\alpha^j = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\,.$$

Integriamo questa serie geometrica privata del primo termine

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^{xj} = \frac{1}{1-\alpha^x} - 1 = \frac{\alpha^x}{1-\alpha^x}\,,$$

in dx, tra uno ed infinito l'identità, si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty}\int_1^{\infty} \alpha^{xj} dx &= \int_1^{\infty} \frac{\alpha^x}{1-\alpha^x} dx \\
\sum_{j=0}^{\infty}\int_1^{\infty} e^{xj\ln(\alpha)} dx &= \int_1^{\infty} \frac{e^{x\ln(\alpha)}}{1-e^{x\ln(\alpha)}} dx \\
\sum_{j=0}^{\infty} \left.\frac{e^{xj\ln(\alpha)}}{j\ln(\alpha)}\right|_1^{\infty} &= -\left.\frac{\ln\left(1-e^{x\ln(\alpha)}\right)}{\ln(\alpha)}\right|_1^{\infty} \\
\sum_{j=0}^{\infty} \left.\frac{\alpha^{xj}}{j}\right|_1^{\infty} &= -\ln(1-\alpha^x)|_1^{\infty}\,,
\end{aligned}$$

assumendo

$$\lim_{x\to\infty} \alpha^x = 0\,,$$

condizione compatibile con il vincolo di convergenza $|\alpha^x| < 1$, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j} = -\ln(1-\alpha)\,.$$

Dal precedente e da questo risultato si hanno le somme delle due serie dell'espressione del valore di aspettazione

$$\langle v|\hat{A}|v\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3^{-2k}}{k} + 3^{-2k-1}k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(3^{-2}\right)^k}{k} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(3^{-2}\right)^k = -\ln\left(1-3^{-2}\right) + \frac{1}{3}\frac{3^{-2}}{(1-3^{-2})^2}\,,$$

quindi

$$\langle v|\hat{A}|v\rangle = \ln\left(\frac{9}{8}\right) + \frac{3}{64}\,.$$

Poiché il prodotto scalare $\langle v|v\rangle$ vale

$$\langle v|v\rangle = \sum_{j,k=1}^{\infty} 3^{-j-k}\langle e_j|e_k\rangle = \sum_{j,k=1}^{\infty} 3^{-j-k}\delta_k^j = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-2k} = \frac{3^{-2}}{1-3^{-2}} = \frac{1}{8}\,,$$

il valor medio richiesto è

$$V = 8\ln\left(\frac{9}{8}\right) + \frac{3}{8}\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 7/60)

L'operatore $\hat{K}$ è definito in uno spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 dalle azioni

$$\hat{K}|e_1\rangle = |e_2\rangle\,, \qquad \hat{K}|e_2\rangle = |e_3\rangle\,, \qquad \hat{K}|e_3\rangle = |e_1\rangle\,,$$

sui vettori della base canonica ortonormale $\left\{|e_j\rangle\right\}_{j=1}^{3} \subset E_3$ e inoltre verifica l'identità: $\hat{K}^3 = \hat{I}$.
Dopo aver dimostrato che l'operatore è unitario, se ne determini lo spettro discreto e si ottengano la matrice 3×3 K e i vettori 3×1 k_1, k_2 e k_3, che rappresentano rispettivamente lo stesso operatore e i tre suoi autovettori rispetto alla base data.

Soluzione del secondo problema

L'operatore è unitario in quanto trasforma una base ortonormale in una base ortonormale. La condizione $\hat{K}^3 = \hat{I}$ è inoltre conseguenza delle regole di azione, infatti, facendo agire la terza potenza dell'operatore sui tre vettori della base canonica si hanno

$$\begin{aligned}
\hat{K}^3|e_1\rangle &= \hat{K}^2\hat{K}|e_1\rangle = \hat{K}^2|e_2\rangle = \hat{K}\hat{K}|e_2\rangle = \hat{K}|e_3\rangle = |e_1\rangle\,,\\
\hat{K}^3|e_2\rangle &= \hat{K}^2\hat{K}|e_2\rangle = \hat{K}^2|e_3\rangle = \hat{K}\hat{K}|e_3\rangle = \hat{K}|e_1\rangle = |e_2\rangle\,,\\
\hat{K}^3|e_3\rangle &= \hat{K}^2\hat{K}|e_3\rangle = \hat{K}^2|e_1\rangle = \hat{K}\hat{K}|e_1\rangle = \hat{K}|e_2\rangle = |e_3\rangle\,,
\end{aligned}$$

da cui, appunto, $\hat{K}^3 = \hat{I}$.
La matrice che lo rappresenta rispetto alla base data è

$$\hat{K} \overset{e}{\hookleftarrow} K = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{K}|e_1\rangle & \langle e_1|\hat{K}|e_2\rangle & \langle e_1|\hat{K}|e_3\rangle \\ \langle e_2|\hat{K}|e_1\rangle & \langle e_2|\hat{K}|e_2\rangle & \langle e_2|\hat{K}|e_3\rangle \\ \langle e_3|\hat{K}|e_1\rangle & \langle e_3|\hat{K}|e_2\rangle & \langle e_3|\hat{K}|e_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\begin{aligned}
\det(K - Ix) &= 0\\
\det\begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} &= 0\\
-x^3 + 1 &= 0\,,
\end{aligned}$$

quindi i tre autovalori sono le tre radici terze dell'unità, lo spettro discreto è l'insieme $\left\{x_k = e^{2ik\pi/3}\right\}_{k=1}^{3}$.
I vettori che rappresentano gli autovettori si ottengono come soluzioni dei sistemi lineari omogenei

$$\begin{pmatrix} -x_k & 0 & 1 \\ 1 & -x_k & 0 \\ 0 & 1 & -x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ v_k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad k = 1,2,3\,,$$

dove v_k^j è la j-esima componente contro-variante del k-esimo autovettore, con $k \in \{0,1,2\}$ e $j \in \{1,2,3\}$. Posto $v_k^1 = v$, per un generico $k \in \{0,1,2\}$, si hanno

$$v_k^3 = vx^k = ve^{2ik\pi/3}\,, \qquad v_k^2 = \frac{v}{x_k} = ve^{-2ik\pi/3}\,, \qquad k = 0,1,2\,.$$

Normalizzando all'unità i tre vettori sono

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2i\pi/3} \\ e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}, \qquad v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-4i\pi/3} \\ e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/60)

L'operatore

$$\hat{P} = \hat{I} + 2\hat{\sigma}_1\,,$$

è definito nello spazio di Hilbert bidimensionale E_2 come combinazione lineare dell'operatore identità e del primo operatore di Pauli. Si ottenga l'insieme $G \subset \mathbb{C}$ dei valori del parametro η per i quali la serie operatoriale

$$\hat{Q}_\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \hat{P}^k\,,$$

converge. Si calcoli, quindi, la matrice 2×2 Q_η che rappresenta l'operatore $\hat{Q}_\eta$ rispetto alla base ortonormale degli autovettori del terso operatore di Pauli.

Soluzione del terzo problema

L'operatore $\hat{P}$ è hermitiano in quanto somma di operatori hermitiani è, di conseguenza un operatore normale. La matrice che rappresenta l'operatore $\hat{P}$ rispetto alla base degli autovettori del terzo operatore di Pauli è

$$\hat{P} \longleftrightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det\begin{pmatrix} 1-\omega & 2 \\ 2 & 1-\omega \end{pmatrix} = 0$$
$$(1-\omega)^2 - 4 = 0\,,$$

quindi $\omega_1 = -1$ e $\omega_2 = 3$. Le componenti dei vettori che rappresentano gli autovettori rispetto alla stessa base sono le soluzioni dei sistemi lineari e omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\omega_j & 2 \\ 2 & 1-\omega_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j^1 \\ u_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j \in \{1,2\}\,,$$

dove u_j^k è la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, con $k, j \in \{1,2\}$. Posto $u_1^1 = u_2^1 = u$, si ottengono

$$u_{1,2}^2 = \frac{1-\omega_{1,2}}{2}u = \pm 1\,,$$

quindi, scegliendo per u un valore reale che normalizzi i vettori, si hanno

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice unitaria diagonalizzante è

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

si ha

$$V^\dagger P V = P_d = \mathrm{diag}\,(\omega_1, \omega_2)\,.$$

Per il teorema spettrale, la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{Q}_\eta$ rispetto alla base degli autovettori dell'operatore $\hat{P}$ è anch'essa diagonale e si ottiene come

$$\hat{Q}_\eta \overset{u}{\longleftrightarrow} \left(Q_\eta\right)_d = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k P_d^k = \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \begin{pmatrix} \omega_1^k & 0 \\ 0 & \omega_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k (-1)^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k 3^k \end{pmatrix},$$

l'intersezione dei domini di convergenza delle due serie geologiche è

$$G = \{\eta : |\eta| < 1\} \cap \{\eta : |\eta| < 1/3\} = \{\eta : |\eta| < 1/3\}\,,$$

è il cerchio centrato nell'origine del piano complesso η di raggio $1/3$. Per valori di $\eta \in G$, si ha

$$\left(Q_\eta\right)_d = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k (-1)^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k 3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1+\eta) & 0 \\ 0 & 1/(1-3\eta) \end{pmatrix}.$$

In definitiva, la matrice che rappresenta lo stesso operatore $\hat{Q}_\eta$ rispetto alla base degli autovettori del terzo operatore di Pauli è

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_\eta \quad \longleftrightarrow \quad Q_\eta &= V\left(Q_\eta\right)_d V^\dagger \\
Q_\eta &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/(1+\eta) & 0 \\ 0 & 1/(1-3\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
Q_\eta &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/(1+\eta) & 1/(1+\eta) \\ 1/(1-3\eta) & -1/(1-3\eta) \end{pmatrix} \\
Q_\eta &= \frac{1}{(\eta+1)(3\eta-2)}\begin{pmatrix} \eta-1 & -2\eta \\ -2\eta & \eta-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Quarto problema (punteggio massimo: 5/60)

Si dimostri che l'identità di Parseval generalizzata enunciata dal teorema di Plancherel per le trasformate di Fourier di funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ con funzione peso unitaria, si ottiene come caso particolare del teorema della convoluzione. Lo si verifichi con le funzioni

$$f(x) = i\,\theta(1-x)\theta(1+x)\,, \qquad g(x) = i\,e^{-|x|}\,.$$

Soluzione del quarto problema

Per una coppia generica di funzioni a quadrato sommabili $f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, indicando con $\tilde{f}(k)$ e $\tilde{g}(k)$ le trasformate di Fourier, cioè

$$\tilde{f}(k) = \mathscr{F}_k[f]\,, \qquad \tilde{g}(k) = \mathscr{F}_k[g]\,,$$

l'identità di Parseval prevista dal teorema di Plancherel è

$$(f, g) = \left(\tilde{f}, \tilde{g}\right),$$

ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k)dk\,.$$

Il teorema della convoluzione afferma che la trasformata di Fourier del prodotto coincide con la convoluzione delle trasformate di Fourier divise per $\sqrt{2\pi}$, cioè

$$\mathscr{F}_k[f\,g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}[f] * \mathscr{F}[g]\right)(k)\,.$$

Consideriamo lo stesso per le funzioni $f^*(x)$ e $g(x)$, essendo anche $f^*(x)$ a quadrato sommabile, si ha

$$\mathscr{F}_k[f^*(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}[f^*] * \mathscr{F}[g]\right)(k)\,.$$

La trasformata di Fourier della complessa coniugata è

$$\mathscr{F}_k[f^*] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{-ikx}dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dk\right)^* = \left(\mathscr{F}_{-k}[f]\right)^*,$$

coincide con la complessa coniugata della trasformata di Fourier in $-k$, cioè, se $\mathscr{F}_k[f] = \tilde{f}(k)$, allora

$$\mathscr{F}_k[f^*] = \tilde{f}^*(-k)\,.$$

Alla luce di queste considerazioni, i due membri dell'identità del teorema della convoluzione per le funzioni $f^*(x)$ e $g(x)$ sono

$$\mathscr{F}_k[f^*(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)e^{-ikx}dx\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathscr{F}[f^*] * \mathscr{F}[g]\right)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_{k-k'}[f^*]\mathscr{F}_{k'}[g]\,dk' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k'-k)\tilde{g}(k')dk'\,,$$

valutando l'identità funzionale in $k = 0$ e scrivendo gli integrali in forma di prodotti scalari, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)e^{-ikx}dx\Big|_{k=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k'-k)\tilde{g}(k')dk'\Big|_{k=0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k')\tilde{g}(k')$$

$$(f, g) = \left(\tilde{f}, \tilde{g}\right),$$

che è l'identità di Parseval.
Le trasformate di Fourier delle funzioni date sono

$$\mathscr{F}_k[f] = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{sen}(k)}{k}, \qquad \mathscr{F}_k[g] = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{k^2+1}.$$

Calcoliamo i prodotti scalari e verifichiamo che hanno lo stesso valore, infatti si hanno:

$$\begin{aligned}
(f,g) &= \int_{-\infty}^{\infty}\theta(1-x)\theta(1+x)e^{-|x|}dx = \int_{-1}^{1}e^{-|x|}dx = \int_{-1}^{0}e^{x}dx + \int_{0}^{1}e^{-x}dx = 1-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right) = 2\left(1-\frac{1}{e}\right),\\
(\tilde{f},\tilde{g}) &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(k)}{k(k^2+1)}dk = \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik}-e^{-ik}}{k(k^2+1)}dk\\
&= 2\left(\mathrm{Res}\left[\frac{e^{ik}}{k(k^2+1)}, i\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ik}}{k(k^2+1)}, -i\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ik}}{k(k^2+1)}, 0\right]\right)\\
&= 2\left(\frac{e^{-1}}{i(2i)} + \frac{e^{-1}}{-i(-2i)} + 1\right) = 2\left(1+\frac{1}{e}\right),
\end{aligned}$$

quindi

$$(f,g) = \left(\tilde{f},\tilde{g}\right).$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/60)

Si ottenga l'espressione degli integrali

$$T_{\mp} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta''\left(x^2-1\right)f_{\mp}(x)dx,$$

con $f_-(z)$ e $f_+(z)$ analitiche in un intorno dell'asse reale e tali che: $f_-(z) = -f_-(-z)$ e $f_+(z) = f_+(-z)$, per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Soluzione del quinto problema

Possiamo integrare per parti, integrando le derivate della delta di Dirac e derivando le funzioni $f_{\mp}(x)$, si ha

$$T_{\mp} = \frac{1}{2}\delta'\left(x^2-1\right)\frac{f_{\mp}(x)}{x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'\left(x^2-1\right)\frac{xf'_{\mp}(x)-f_{\mp}(x)}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta'\left(x^2-1\right)\frac{xf'_{\mp}(x)-f_{\mp}(x)}{x^2}dx,$$

il primo termine è nullo in quanto nei punti in cui l'argomento della delta non è diverso da zero. Un'ulteriore integrazione per parti dà

$$\begin{aligned}
T_{\mp} &= -\frac{1}{4}\,\delta\left(x^2-1\right)\frac{xf'_{\mp}(x)-f_{\mp}(x)}{x^3}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2-1\right)\frac{x^2f''_{\mp}(x)-3xf'_{\mp}(x)+3f_{\mp}(x)}{x^4}dx\\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2-1\right)\frac{x^2f''_{\mp}(x)-3xf'_{\mp}(x)+3f_{\mp}(x)}{x^4}dx.
\end{aligned}$$

Sfruttando la formula della delta che ha per argomento una funzione si ha

$$\begin{aligned}
T_{\mp} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(x-1)}{|dx^2/dx|_{x=1}}\frac{x^2f''_{\mp}(x)-3xf'_{\mp}(x)+3f_{\mp}(x)}{4x^4}dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(x+1)}{|dx^2/dx|_{x=-1}}\frac{x^2f''_{\mp}(x)-3xf'_{\mp}(x)+3f_{\mp}(x)}{4x^4}dx\\
&= \frac{f''_{\mp}(1)-3f'_{\mp}(1)+3f_{\mp}(1)}{8}\\
&= \frac{f''_{\mp}(1)+f''_{\mp}(-1)-3\big(f'_{\mp}(1)-f'_{\mp}(-1)\big)+3\big(f_{\mp}(1)+f_{\mp}(-1)\big)}{8},
\end{aligned}$$

La parità della funzione si inverte ad ogni derivazione, cioè

$$f_{\mp}(x) = \mp f_{\mp}(-x), \qquad f'_{\mp}(x) = \pm f'_{\mp}(-x), \qquad f''_{\mp}(x) = \mp f''_{\mp}(-x).$$

Le somme e la sottrazione delle derivate dello stesso ordine della funzione $f_-(x)$ a numeratore dell'espressione di T_- sono nulle, cioè

$$f_-''(1)+f_-''(-1)=f_-'(1)-f_-'(-1)=f_-(1)+f_-(-1)=0\,,$$

mentre per T_+ si ha

$$f_+''(1)+f_+''(-1)=2f_+''(1)\,,\qquad f_+'(1)-f_+'(-1)=2f_+'(1)\,,\qquad f_+(1)+f_+(-1)=2f_+(1)\,.$$

Ne conseguono i risultati finali

$$T_-=0\,,\qquad T_+=\frac{f_+''(1)-3f_+'(1)+3f_+(1)}{4}\,.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 6/60)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x+1)}\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Calcoliamo direttamente la trasformata di Fourier usando per la funzione seno l'espressione di Eulero

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[f]&=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x(x+1)}e^{-ikx}dx=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{\Delta}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{z(z+1)}e^{-ikz}dz\\&=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{\Delta}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{z}e^{-ikz}dz-\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{\Delta}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{z+1}e^{-ikz}dz\,.\end{aligned}$$

Nel secondo integrale della prima riga abbiamo sostituito l'asse reale con il percorso dentato intorno all'origine con una semi-circonferenza immersa nel semi-piano delle parti immaginarie positive e indicato esplicitamente il valore principale relatico alla singolarità della funzione integranda presente sul percorso d'integrazione, ovvero il polo semplice in $z=-1$. Il primo degli ultimi due integrali non è in valore principale in quanto non singolarità sul percorso d'integrazione. La deformazione $\mathbb{R}\to\Delta$ non cambia il valore dell'integrale poiché la singolarità nell'origine è eliminabile.
Per il primo integrale, usando il teorema dei residui e il lemma di Jordan, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{\Delta}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{z}e^{-ikz}dz&=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\int_{\Delta}\frac{e^{-iz(k-1)}-e^{-iz(k+1)}}{z}dz=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{cases}0 & k<-1\\ 1 & -1<k<1\\ 0 & k>1\end{cases}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta(1+k)\theta(1-k)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{Segno}[1+k]+\mathrm{Segno}[1-k]\right)\,.\end{aligned}$$

Del secondo integrale calcoliamo singolarmente i due termini

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Pr}\int_{\Delta}\frac{e^{iz(\pm1-k)}}{z+1}dz&=\frac{1}{2i\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\Delta}\frac{e^{iz(\pm1-k)}}{z+1+i\epsilon}dz+i\pi e^{-i(\pm1-k)}\right)\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\begin{cases}(-2+1)\,e^{-i(\pm1-k)}=-e^{-i(\pm1-k)} & \pm1-k<0\\[2ex] (0+1)\,e^{-i(\pm1-k)}=e^{-i(\pm1-k)} & \pm1-k>0\end{cases}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Segno}[\pm1-k]\,e^{-i(\pm1-k)}\,.\end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[f]&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{Segno}[1+k]+\mathrm{Segno}[1-k]\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{Segno}[1-k]\,e^{-i(1-k)}+\mathrm{Segno}[1+k]\,e^{i(1+k)}\right)\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{Segno}[1+k]\left(1-e^{i(k+1)}\right)+\mathrm{Segno}[1-k]\left(1-e^{i(k-1)}\right)\right]\end{aligned}$$

e riordinando

$$\mathscr{F}_k[f]=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\mathrm{Segno}[k+1]\left(1-e^{i(k+1)}\right)-\mathrm{Segno}[k-1]\left(1-e^{i(k-1)}\right)\right]\,.$$