Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 giugno 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

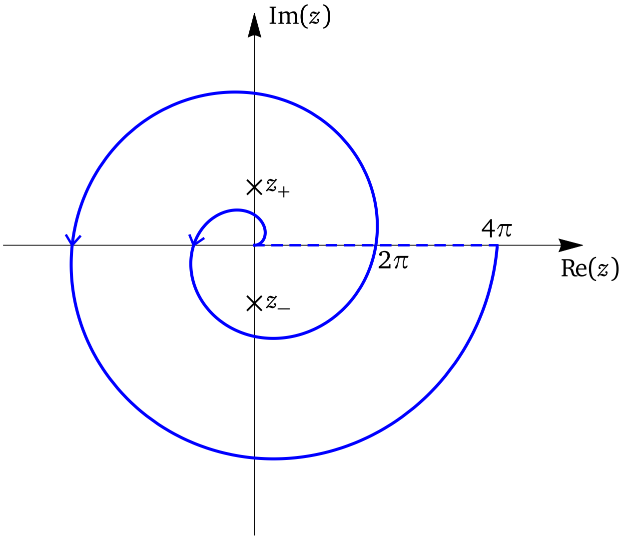
$$S = \int_\sigma \frac{dz}{z^2+9} \, ,$$

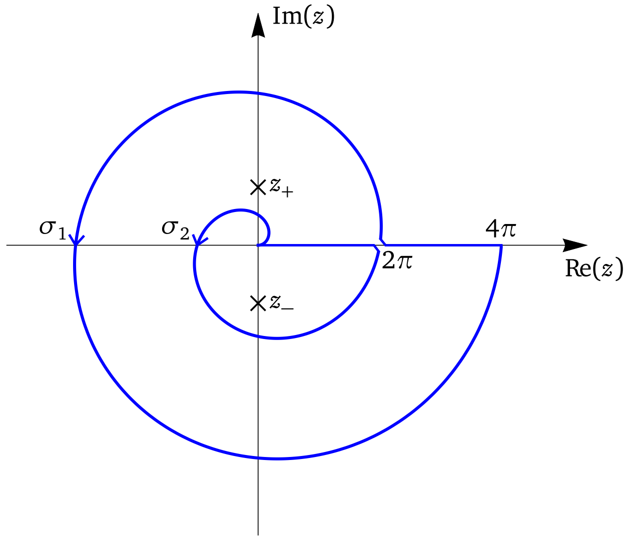
con

$$\sigma = \left\{ z : z = r e^{ir} , r \in [0, 4\pi] \right\} .$$

Soluzione del primo problema

Il percorso di integrazione σ è la spirale mostrata nella figura di sinistra, è orientata secondo il verso di percorrenza che va dall'estremo interno, l'origine, a quello esterno, il punto $z = 4\pi$.





La funzione integranda ha due poli semplici nei punti

$$z_\pm = \pm 3i \, ,$$

che sono indicati in figura dal simbolo "×". Chiudiamo il percorso di integrazione congiungendone gli estremi con il segmento reale $[0, 4\pi]$, orientato da destra verso sinistra, e, usando il teorema dei residui, calcoliamo l'integrale

$$C = \oint_{\sigma \cup (-[0,4\pi])} \frac{dz}{z^2+9} = 2i\pi \left(R_+ + 2R_- \right) ,$$

dove $R_\pm$ è il residuo del polo $z_\pm$

$$R_\pm = \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2+9}, z_\pm\right] = \frac{z_\pm^{-1}}{2} = \mp\frac{i}{6}\,.$$

Come mostrato in dettaglio nella figura di destra, il percorso chiuso σ può essere scomposto in due percorsi chiusi σ_1 e σ_2, cioè

$$\sigma \cup (-[0,4\pi]) = \sigma_1 \cup \sigma_2\,,$$

così da evidenziare meglio il fatto che l'indice di avvolgimento della curva chiusa completa è pari ad uno per il polo z_+, avvolto solo da σ_1 e pari a due per z_-, avvolto sia da σ_1 che σ_2, il che giustifica il fattore due di R_-. L'integrale C vale

$$C = \frac{2i\pi}{6}(-i+2i) = -\frac{\pi}{3}\,.$$

D'altro canto lo stesso integrale C non è altre che la somma dell'integrale cercato S e di quello della stessa integranda sul segmento $[0,4\pi]$, orientato da destra verso sinistra, cioè

$$C = S + \int_{-[0,4\pi]} \frac{dz}{z^2+9} = S - \int_0^{4\pi} \frac{dx}{x^2+9}\,,$$

da cui

$$S = C + \int_0^{4\pi} \frac{dx}{x^2+9}\,.$$

L'ultimo integrale si calcola osservando che la primitiva è la funzione arcotangente nella variabile $x/3$. Infatti, senza fare sostituzioni, mettendo in evidenza 9 a denominatore, si ha

$$\int_0^{4\pi} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\int_0^{4\pi} \frac{dx/3}{(x/3)^2+1} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

In definitiva l'integrale S vale

$$S = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si ottenga il valore principale dell'integrale

$$Q = \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\cos(x)}\,.$$

Soluzione del secondo problema

La funzione integranda ha infiniti poli semplici appartenenti al percorso di integrazione, corrispondenti agli zeri della funzione coseno, che sono i multipli dispari, positivi e negativi di $\pi/2$, i punti dell'insieme $\{x_k = (2k+1)\pi/2\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il valore principale si riferisce a queste singolarità. In aggiunta si hanno anche i due poli semplici $z_\pm = \pm i$, dovuti al polinomio di secondo grado a denominatore. Possiamo considerare il percorso "dentato" e chiuso nel semipiano delle parti immaginare positive, mostrato in figura nel caso $n=2$,

$$\Omega_n = \left\{\bigcup_{k=-n-1}^{n}\Big([k\pi,(2k+1)\pi/2-\epsilon]\cup(-\gamma_k)\cup[(2k+1)\pi/2+\epsilon,(k+1)\pi]\Big)\right\}\cup\Gamma_n\,, \qquad n\in\mathbb{N}\,,$$

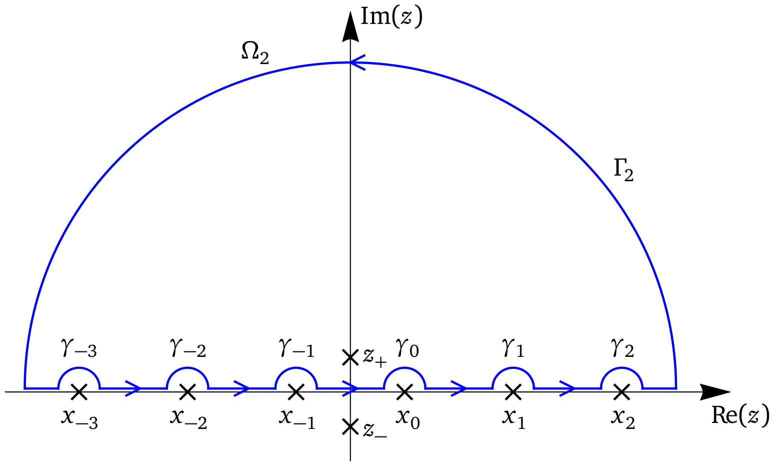
dove l'arco

$$\gamma_k = \left\{ z : z = (2k+1)\pi/2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (0,\pi) \right\} ,$$

è una semicirconferenza centrata nel polo x_k di raggio ϵ, mentre

$$\Gamma_n = \left\{ z : z = (n+1)\pi e^{i\theta}, \theta \in (0,\pi) \right\} ,$$

è la semicirconferenza centrata nell'origine di raggio $(n+1)\pi$.



Il contributo dell'arco Γ_n è infinitesimo nel limite $n \to \infty$, infatti, con $z \in \Gamma_n$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z}{(z^2+1)\cos(z)} \stackrel{\text{unif.}}{=} 0 ,$$

che, posto $z = (n+1)\pi e^{i\theta}$, segue dalla minorazione

$$\left| \frac{z}{(z^2+1)\cos(z)} \right| \le \frac{(n+1)\pi}{[(n+1)^2\pi^2 - 1]} \equiv \mu_n ,$$

dove abbiamo usato $|\cos(z)| \ge 1$ (si veda l'Addendum). Poiché la funzione μ_n è infinitesima nel limite $n \to \infty$ si ha il limite uniforme richiesto. L'integrale in valore principale può essere ottenuto come

$$\begin{aligned} Q &= \lim_{n\to\infty} \left(\oint_{\Omega_n} \frac{dz}{(z^2+1)\cos(z)} - \sum_{j=-n-1}^{n} \int_{-\gamma_j} \frac{dz}{(z^2+1)\cos(z)} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\oint_{\Omega_n} \frac{dz}{(z^2+1)\cos(z)} + \sum_{j=-n-1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{(z^2+1)\cos(z)} \right) , \end{aligned}$$

ovvero come l'integrale sul percorso completo cui vanno sottratti i contributi degli archi che aggirano i poli reali, il contributo dell'arco centrato nell'origine è nullo per $n \to \infty$.
Gli integrali sugli archi γ_j sono

$$\int_{\gamma_j} \frac{dz}{(z^2+1)\cos(z)} = i\pi \lim_{\epsilon\to 0} \frac{z-(2j+1)\pi/2}{(z^2+1)\cos(z)} = \frac{(-1)^{j+1} i\pi}{(2j+1)^2\pi^2/4+1} ,$$

dove il limite è inteso per valori di $z \in \gamma_j$. L'integrale sul percorso chiuso Ω_n può essere calcolato con il teorema dei residui e, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\oint_{\Omega_n} \frac{dz}{(z^2+1)\cos(z)} = 2i\pi \text{Res}\left[\frac{1}{(z^2+1)\cos(z)}, z = i \right] = \frac{\pi}{\cos(i)} = \frac{\pi}{\cosh(1)} ,$$

da cui si ottiene l'integrale in valore principale

$$
\begin{aligned}
Q &= \lim_{n\to\infty}\left(\oint_{\Omega_n}\frac{dz}{(z^2+1)\cos(z)}+\sum_{j=-n-1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{dz}{(z^2+1)\cos(z)}\right)=\frac{\pi}{\cosh(1)}+\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}i\pi}{(2j+1)^2\pi^2/4+1}\\
&=\frac{\pi}{\cosh(1)}-i\pi\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2\pi^2/4+1}\,.
\end{aligned}
$$

La serie può essere calcolata separando i due contributi con indici non negativi, $j=0,1,\dots$ e negativi, $k=-1,-2,\dots,$ per i quali si fa la sostituzione $j'=-k-1$, ovvero

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2\pi^2/4+1} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2\pi^2/4+1}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2/4+1}\\
\{j'=-k-1\} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2\pi^2/4+1}+\sum_{j'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j'+1}}{(2j'+1)^2\pi^2/4+1}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)^2\pi^2/4+1}-\sum_{j'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j'}}{(2j'+1)^2\pi^2/4+1}\\
&=0\,.
\end{aligned}
$$

Alla luce di questo risultato l'integrale cercato vale

$$
Q=\frac{\pi}{\cosh(1)}\,.
$$

Addendum: Studio della funzione $\left|\cos\left(n\pi e^{i\theta}\right)\right|^2$

Consideriamo la funzione

$$
f(\theta)=\left|\cos\left(n\pi e^{i\theta}\right)\right|^2, \qquad n\in\mathbb{N},
$$

la derivata prima, così come la funzione stessa, è periodica con periodo 2π. In realtà, sviluppando il modulo quadro si ha per $f(\theta)$ l'espressione

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= |\cos(n\pi\cos(\theta)+in\pi\,\mathrm{sen}(\theta))|^2\\
&= |\cos(n\pi\cos(\theta))\cos(in\pi\,\mathrm{sen}(\theta))-\mathrm{sen}(n\pi\cos(\theta))\,\mathrm{sen}(in\pi\,\mathrm{sen}(\theta))|^2\\
&= |\cos(n\pi\cos(\theta))\cosh(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))-i\,\mathrm{sen}(n\pi\cos(\theta))\,\mathrm{senh}(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))|^2\\
&= \cos^2(n\pi\cos(\theta))\cosh^2(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))+\mathrm{sen}^2(n\pi\cos(\theta))\,\mathrm{senh}^2(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))\\
&= \cos^2(n\pi\cos(\theta))\cosh^2(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))+\left[1-\cos^2(n\pi\cos(\theta))\right]\mathrm{senh}^2(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))\\
&= \mathrm{senh}^2(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))+\cos^2(n\pi\cos(\theta))\,,
\end{aligned}
$$

da cui si evince che il periodo è in realtà pari a π, ovvero $f(\theta)=f(\theta+k\pi)$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}$.
Studiamo quindi la funzione nell'intervallo $\theta\in[0,\pi)$, le derivate prima e seconda sono

$$
\begin{aligned}
f'(\theta) &= 2n\pi\cos(\theta)\,\mathrm{senh}(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))\cosh(n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))+2n\pi\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(n\pi\cos(\theta))\,\mathrm{sen}(n\pi\cos(\theta))\\
&= n\pi\left[\cos(\theta)\,\mathrm{senh}(2n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))+\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(2n\pi\cos(\theta))\right];\\
f''(\theta) &= n\pi\big[-\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{senh}(2n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))+2n\pi\cos^2(\theta)\cosh(2n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))\\
&\qquad+\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(2n\pi\cos(\theta))-2n\pi\,\mathrm{sen}^2(\theta)\cos(2n\pi\cos(\theta))\big]\,.
\end{aligned}
$$

La derivata prima è nulla sia per $\mathrm{sen}(\theta)=0$, in quanto si annullano i due termini proporzionali a $\mathrm{senh}(2n\pi\,\mathrm{sen}(\theta))$ e $\mathrm{sen}(\theta)$, che per $\cos(\theta)=0$, infatti il primo termine è proporzionale a $\cos(\theta)$, mentre il secondo lo è a $\mathrm{sen}(2n\pi\cos(\theta))$. Ne consegue che i punti estremali, cioè i punti in cui si annulla la derivata prima, sono i multipli di $\pi/2$. I valori della derivata seconda in questi punti

$$
f''(k\pi/2)=\begin{cases} 2n^2\pi^2 & |k|\ \text{pari} \quad \Rightarrow\ \mathrm{sen}(k\pi/2)=0, \quad \cos(k\pi/2)=(-1)^k\\ n\pi\left[-\mathrm{senh}(2n\pi)-2n\pi\right] & |k|\ \text{dispari} \quad \Rightarrow\ \mathrm{sen}(k\pi/2)=(-1)^k, \quad \cos(k\pi/2)=0\end{cases},
$$

per $n \in \mathbb{N}$, sono strettamente positivi nei multipli pari di $\pi/2$, strettamente negativi nei multipli dispari, ne consegue che i primi sono minimi, i secondo sono invece massimi. Si tratta di minimi e massimi assoluti poiché la funzione è limitata e periodica. I valori minimo e massimo nell'intervallo considerato sono

$$\begin{aligned} f_{\min} &= f(k\pi) = \left|\cos\left(n\pi e^{ik\pi}\right)\right|^2 = \left|\cos\left(n\pi(-1)^k\right)\right|^2 = |\cos(n\pi)|^2 = |(-1)^n|^2 = 1\,, \\ f_{\max} &= f\left((2k+1)\pi/2\right) = \left|\cos\left(n\pi e^{(2k+1)i\pi/2}\right)\right|^2 = \left|\cos\left(n\pi\, i(-1)^k\right)\right|^2 = |\cos(n\pi\, i)|^2 \\ &= \cosh^2(n\pi) = \operatorname{senh}^2(n\pi) + 1 > 1\,. \end{aligned}$$

Ne consegue che in generale si ha

$$f_{\min} = 1 \le f(\theta) = \left|\cos\left(n\pi e^{i\theta}\right)\right|^2 \le \cosh^2(n\pi) = f_{\max}\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

dove, per la parità della funzione coseno abbiamo esteso la relazione a tutti valori relativi di n.

Terzo problema (punteggio 6/30)

Nel dominio D_0 la funzione $f(z)$ è data dalla rappresentazione

$$R_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(3e^{ik\pi} - 1\right)z^k\,,$$

ovvero si ha $f(z) = R_0(z)$, $\forall\, z \in D_0$. Dopo aver determinato il dominio D_0, si calcolino le serie di Laurent $R_+(z)$ e $R_-(z)$ della stessa funzione $f(z)$ centrate in $z_+ = 1$ e $z_- = -1$, convergenti in $z_c = 2$, specificandone i domini D_+ e D_-.

Soluzione del terzo problema

La serie della rappresentazione data può essere calcolata, si tratta, infatti, della somma di due serie geometriche

$$R_0(z) = 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{i\pi}z\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^k\,,$$

entrambe le serie convergono nel cerchio unitario che quindi rappresenta il dominio di convergenza di $R_0(z)$, cioè $D_0 = \{z : |z| < 1\}$. La somma della serie iniziale dà la funzione $f(z)$

$$f(z) = \frac{3}{1 - e^{i\pi}z} - \frac{1}{1-z} = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z-1}\,.$$

La serie di Laurent centrata in $z = z_+ = 1$ si ottiene sviluppando solo il primo termine, il secondo è già nella forma desiderata. Sommando e sottraendo il numero 1 a denominatore del primo termine si ha

$$f(z) = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z-1} = \frac{3}{2+z-1} + \frac{1}{z-1}\,.$$

Possiamo scrivere il primo termine come somma di una serie geometrica di ragione proporzionale a $(z-1)$ o al suo inverso a seconda del dominio di convergenza. Mettendo in evidenza a denominatore del primo termine il numero 2 o $(z-1)$ si hanno per il primo termine le due espressioni

$$\frac{3}{2+z-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{1+\frac{z-1}{2}} = \dfrac{3}{2}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^j & |z-1| < 2 \\[2ex] \dfrac{1}{z-1}\dfrac{3}{1+\frac{2}{z-1}} = \dfrac{1}{z-1}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^j & |z-1| > 2 \end{cases}.$$

La scelta va fatta alla luce della richiesta di convergenza nel punto $z_c = 2$, ovvero dovremmo richiedere che la ragione della serie valutata in $z = z_c$ sia in modulo minore di uno. Quindi se $|z_c - 1|$ risulta maggiore di 2 dovremmo scegliere il primo caso, altrimenti il secondo. Poicè $|z_c - 1| = |2-1| = 1 < 2$, la serie di Laurent $R_+(z)$ è

$$R_+(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^j = \frac{1}{z-1} + \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^j (z-1)^j\,.$$

La serie di Laurent può essere posta nella forma generale

$$R_+(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^+ (z-1)^k ,$$

con i coefficienti dati dalla legge molteplice

$$a_k^+ = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ 1 & k = -1 \\ \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^k & k > -1 \end{cases} .$$

Il dominio di convergenza è la corona circolare

$$D_+ = \{z : 0 < |z-1| < 2\} .$$

Per la serie di Laurent centrata in $z = z_- = -1$ usiamo le stesso argomento, in questo caso è il primo termine ad essere già nella forma corretta, per il secondo si procede sommando e sottraendo il numero 1 a denominatore

$$f(z) = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z+1-2} .$$

Scriviamo il secondo termine come somma della serie geometrica con ragione direttamente o inversamente proporzionale a $(z+1)$ a seconda della convergenza richiesta. I due casi sono distinti dal verificarsi, rispettivamente, di una delle due condizioni esclusive $|z+1| < 2$ e $|z+1| > 2$. Si osserva che in $z = z_c = 2$ è la seconda condizione ad essere verificata, quindi, mettendo in evidenza $(z+1)$ a denominatore del secondo termine si ha

$$\begin{aligned} R_-(z) &= \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}} = \frac{3}{z+1} + \frac{1}{z+1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^j = \frac{3}{z+1} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^j (z+1)^{-j-1} \\ &= \frac{3}{z+1} + \sum_{j'=-\infty}^{-1} 2^{-j'-1} (z+1)^{-j'} , \end{aligned}$$

dove si è fatta la sostituzione $j' = -j-1$.
In forma generale

$$R_-(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^- (z+1)^k ,$$

dove i coefficienti sono dati dalla legge molteplice

$$a_k^- = \begin{cases} 2^{-k-1} & k < -1 \\ 4 & k = -1 \\ 0 & k > -1 \end{cases} .$$

Il dominio di convergenza è la corona circolare

$$D_- = \{z : |z+1| > 2\} .$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si determinino gli autovalori e gli autovettori dell'operatore $\hat{A}$ definito in uno spazio di Hilbert E_{2N+1} a $2N+1$ dimensioni dall'azione sui vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{2N+1} \subset E_{2N+1}$

$$\hat{A}|e_k\rangle = \alpha_k |e_{2N+2-k}\rangle , \qquad k \in \{1, 2, \ldots, 2N+1\} ,$$

con $\alpha_k \neq 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, 2N+1\}$.
Si stabilisca, infine, per quali valori α_k l'operatore $\hat{A}$ è hermitiano.

Soluzione del quarto problema

La matrice che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{2N+1}$ data è

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{A}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_1|\hat{A}|e_{2N-1}\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_{2N}\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_{2N+1}\rangle \\ \langle e_2|\hat{A}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_2|\hat{A}|e_{2N-1}\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_{2N}\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_{2N+1}\rangle \\ \langle e_3|\hat{A}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_3|\hat{A}|e_{2N-1}\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_{2N}\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_{2N+1}\rangle \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle e_{2N+1}|\hat{A}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_{2N+1}|\hat{A}|e_{2N-1}\rangle & \langle e_{2N+1}|\hat{A}|e_{2N}\rangle & \langle e_{2N+1}|\hat{A}|e_{2N+1}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_{2N+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si tratta di una matrice anti-diagonale.
È possibile ottenere lo spettro discreto e gli autovettori direttamente dall'equazione agli autovalori

$$\hat{A}|u\rangle = \lambda|u\rangle\,,$$

usando la decomposizione $|u\rangle = u^k|e_k\rangle$, si hanno

$$\begin{aligned} [\text{membro sinistro}] &= \hat{A}|u\rangle = u^k\hat{A}|e_k\rangle = u^k\alpha_k|e_{2N+2-k}\rangle\,, \\ [\text{membro destro}] &= \lambda|u\rangle = \lambda u^j|e_j\rangle\,, \end{aligned}$$

da cui si ottengono le $2N+1$ equazioni (non c'è somma in k)

$$u^k\alpha_k = \lambda u^{2N+2-k}\,, \qquad k \in \{1,2,\ldots,2N+1\}\,.$$

Si tratta, effettivamente, di N coppie di equazioni indipendenti nelle variabili u^j e u^{2N+2-j}, con $j = 1,2,\ldots,N$, più una singola nella variabile "centrale" u^{N+1}. Più in dettaglio si ha

$$\left\{\begin{aligned} u^1\alpha_1 &= \lambda u^{2N+1} \\ u^2\alpha_2 &= \lambda u^{2N} \\ u^3\alpha_3 &= \lambda u^{2N-1} \\ &\vdots \\ u^N\alpha_N &= \lambda u^{N+2} \\ u^{N+1}\alpha_{N+1} &= \lambda u^{N+1} \\ u^{N+2}\alpha_{N+2} &= \lambda u^N \\ &\vdots \\ u^{2N}\alpha_{2N} &= \lambda u^2 \\ u^{2N+1}\alpha_{2N+1} &= \lambda u^1 \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} \left\{\begin{aligned} u^1\alpha_1 &= \lambda u^{2N+1} \\ u^{2N+1}\alpha_{2N+1} &= \lambda u^1 \end{aligned}\right. \\ \\ \left\{\begin{aligned} u^2\alpha_2 &= \lambda u^{2N} \\ u^{2N}\alpha_{2N} &= \lambda u^2 \end{aligned}\right. \\ \\ \vdots \\ \\ \left\{\begin{aligned} u^N\alpha_N &= \lambda u^{N+2} \\ u^{N+2}\alpha_{N+2} &= \lambda u^N \end{aligned}\right. \\ \\ \quad u^{N+1}\alpha_{N+1} = \lambda u^{N+1} \end{array}\,.$$

Sfruttando il j-esimo sistema 2×2, con $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, possiamo mettere a zero tutte le componenti diverse da u^j e u^{2N+1-j} e porre $u^j = 1$, in questo modo dal sistema si ottengono due autovalori e una coppia di valori della seconda componente u^{2N+2-j} che definiscono gli autovettori corrispondenti. In dettaglio si ha

$$\left\{\begin{aligned} u^j\alpha_j &= \lambda u^{2N+1-j} \\ u^{2N+1-j}\alpha_{2N+1-j} &= \lambda u^j \end{aligned}\right. \,, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

dalle due equazioni, ponendo $u_j = 1$, si ottiene

$$u^{2N+2-j} = \frac{\lambda}{\alpha_{2N+2-j}} = \frac{\alpha_j}{\lambda} \qquad\Rightarrow\qquad \lambda_j^{\pm} = \pm\sqrt{\alpha_j\alpha_{2N+2-j}}\,,$$

in corrispondenza dei quali si hanno le componenti

$$u_{\pm}^{2N+2-j} = \pm\sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_{2N+2-j}}}\,.$$

Gli autovettori normalizzati corrispondenti ai $2N$ autovalori dell'insieme $\{\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_N^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_N^-\}$ hanno le rappresentazioni matriciali

$$u_j^\pm = \frac{1}{\sqrt{1+\left|\alpha_j/\alpha_{2N+2-j}\right|}} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm\sqrt{\alpha_j/\alpha_{2N+2-j}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ j\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ (2N+2-j)\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad , \qquad j \in \{1,2,\dots,N\}\,. \tag{1}$$

Infine, dall'equazione singola, azzerando tutte le componenti ad eccezione delle $(N+1)$-esima $u_{(N+1)}^{N+1}$, che poniamo uguale ad uno, si ottiene l'autovalore λ_{N+1}, cioè

$$u_{(N+1)}^{N+1}\alpha_{N+1} = \lambda_{N+1}u_{(N+1)}^{N+1} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{N+1} = \alpha_{N+1}\,.$$

L'autovettore normalizzato corrispondente ha rappresentazione matriciale

$$u_{N+1} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (N+1)\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ \end{array} . \tag{2}$$

Ricapitolando, lo spettro discreto dell'operatore $\hat{A}$ è rappresento dall'insieme dei $(2N+1)$ autovalori

$$\{\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_N^+, \lambda_{N+1}, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_N^-\}\,, \qquad \lambda_j^\pm = \pm\sqrt{\alpha_j\alpha_{2N+2-j}}\,, \qquad j \in \{1,2,\dots,N\}\,, \qquad \lambda_{N+1} = \alpha_{N+1}\,,$$

cui corrispondono gli autovettori dell'insieme $\{|u_1^+\rangle, |u_2^+\rangle, \dots, |u_N^+\rangle, |u_{N+1}\rangle, |u_1^-\rangle, |u_2^-\rangle, \dots, |u_N^-\rangle\}$, le cui rappresentazioni matriciali rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{2N+1}$ sono date nelle equazioni (1) e (2).
Dalla rappresentazione matriciale dell'operatore $\hat{A}$ è facile evincere che la condizione di hemitianità sui parametri α_k, con $k \in \{1,2,\dots,2N+1\}$, è data dalle $(N+1)$ equazioni

$$\alpha_j = \alpha_{2N+2-j}^*\,, \qquad j \in \{1,2,\dots,N\}\,, \qquad \alpha_{N+1} = \alpha_{N+1}^*,$$

ovvero

$$\alpha_j = \alpha_{2N+2-j}^*\,, \qquad j \in \{1,2,\dots,N,N+1\}\,.$$

Tale condizioni si ottiene dall'identità

$$A = A^\dagger = (A^*)^T$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_{2N+1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{2N+1}^* \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2N}^* & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_{2N-1}^* & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & 0 \\ \alpha_1^* & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso, come è noto, gli autovalori sono reali, infatti sono radici quadrate di moduli quadri, ovvero di numeri reali non negativi,

$$\lambda_j^\pm = \pm\sqrt{\alpha_j\alpha_{2N+2-j}} = \pm\sqrt{\alpha_j\alpha_j^*} = \pm\sqrt{|\alpha_j|^2} = \pm|\alpha_j| \in \mathbb{R} \qquad j \in \{1,2,\dots,N\}\,,$$
$$\lambda_{N+1} = \alpha_{N+1} \in \mathbb{R}\,.$$

Gli autovettori corrispondenti alle coppie di autovalori $\lambda_j^{\pm}$, con $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, diventano ortogonali. Infatti, usando le rappresentazioni matriciali degli autovettori $|u_j^{\pm}\rangle$,

$$u_j^+ = \frac{1}{\sqrt{1+\left|\alpha_j/\alpha_j^*\right|}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\alpha_j/\alpha_j^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_j^- = \frac{1}{\sqrt{1+\left|\alpha_j/\alpha_j^*\right|}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sqrt{\alpha_j/\alpha_j^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

si ha il prodotto scalare

$$\langle v_j^+ | v_j^- \rangle = \left(v_j^+\right)^{\dagger} v_j^- = \left(v_j^{+*}\right)^T v_j^- = \frac{1}{1+\left|\alpha_j/\alpha_j^*\right|}\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_j^*}{\alpha_j}}\sqrt{\frac{\alpha_j}{\alpha_j^*}}\right) = \frac{1}{1+\left|\alpha_j/\alpha_j^*\right|}\left(1 - \sqrt{\frac{|\alpha_j|^2}{|\alpha_j|^2}}\right) = 0,$$

da cui segue l'ortogonalità dei vettori. Ovviamente, come si evince dalle rappresentazioni matriciali, l'autovettore $|u_{N+1}\rangle$, relativo all'autovalore λ_{N+1}, è ortogonale a tutti gli altri $2N$ autovettori, ovvero quelli dell'insieme $\left\{|u_j^+\rangle, |u_j^-\rangle\right\}_{j=1}^N$.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Facendo uso del teorema di Plancherel per le funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{x^2+\pi^2} - e^{-2|x|}\right)\frac{dx}{\cosh(x)} = 0.$$

Soluzione del quinto problema

Il risultato del teorema di Plancherel cui ci si riferisce è

$$(f, g) = (\mathscr{F}_k[f], \mathscr{F}_k[g]),$$

valido $\forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, ovvero il prodotto scalare di due funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ coincide con quello dell trasformate di Fourier, che, per il teorema di Plancherel sono anch'esse funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$. Il prodotto scalare, $\forall f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, è dato dall'integrale

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx.$$

L'identità da dimostrare può essere posta nella forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(x^2+\pi^2)\cosh(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|x|dx}}{\cosh(x)} dx.$$

L'integrale a primo membro rappresenta il prodotto scalare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{(x^2+\pi^2)\cosh(x)} dx = \left(\frac{\pi}{x^2+\pi^2}, \frac{1}{\cosh(x)}\right) \equiv (f, g),$$

dove abbiamo posto

$$f(x) = \frac{\pi}{x^2+\pi^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{\cosh(x)}.$$

Queste funzioni sono a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$, ovvero $f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, possiamo applicare il teorema di Plancherel e avremo

$$(f,g) = \left(\mathscr{F}_k\left[\frac{\pi}{x^2+\pi^2}\right], \mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right]\right).$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{\pi}{x^2+\pi^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi e^{-ikx}}{x^2+\pi^2}dx\,,$$

usando il lemma di Jordan nei due casi $k<0$ e $k>0$ e il teorema dei residui per i due poli semplici che la funzione integranda ha nei punti $z=\pm i\pi$, avremo

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{\pi}{x^2+\pi^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\begin{array}{ll} 2i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z^2+\pi^2}, z=i\pi\right] = 2i\pi\frac{e^{k\pi}}{2i\pi} = e^{k\pi} & k<0 \\ -2i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{z^2+\pi^2}, z=-i\pi\right] = -2i\pi\frac{e^{-k\pi}}{-2i\pi} = e^{-k\pi} & k>0 \end{array}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\pi|k|}.$$

La trasformata di Fourier dell'inversa della funzione coseno iperbolico,

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)}dx\,,$$

si calcola considerando l'integrale della stessa integranda sul percorso chiuso rettangolare

$$\Gamma_R = [-R,R]\cup[R,R+i\pi]\cup[R+i\pi,-R+i\pi]\cup[-R+i\pi,R]\,,$$

dove il simbolo $[z_1,z_2]$ rappresenta il segmento con estremi nei punti z_1 e z_2, orientato nel verso che va dal primo al secondo punto. Nel rettangolo Γ_R, $\forall R>0$, la funzione integranda ha un'unica singolarità, un polo semplice in $z=i\pi/2$, quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz = 2i\pi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}, z=i\pi/2\right] = \sqrt{2\pi}\,e^{k\pi/2}. \tag{3}$$

D'altro canto, l'integrale su Γ_R può essere scritto com somma dei quattro contributi relativi ai quattro tratti rettilinei

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{[R,R+i\pi]\cup[-R+i\pi,-R]}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz + \int_{-R}^{R}\frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)}dx + \int_{R}^{-R}\frac{e^{-ik(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{[R,R+i\pi]\cup[-R+i\pi,-R]}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz + \int_{-R}^{R}\frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)}dx - e^{k\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ikx}}{-\cosh(x)}dx\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{[R,R+i\pi]\cup[-R+i\pi,-R]}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz + \left(1+e^{k\pi}\right)\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)}dx\right).\end{aligned}$$

Nel limite $R\to\infty$ i contributi dei tratti verticali si annullano e quindi si ottiene un integrale proporzionale alla trasformata di Fourier, ovvero

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{-ikz}}{\cosh(z)}dz = \frac{1+e^{k\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{\cosh(x)}dx = \left(1+e^{k\pi}\right)\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right].$$

Confrontando questo risultato con quello dell'equazione (3),

$$\left(1+e^{k\pi}\right)\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right] = \sqrt{2\pi}\,e^{k\pi/2}\,,$$

si ottiene la trasformata di Fourier

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right] = \sqrt{2\pi}\frac{e^{k\pi/2}}{1+e^{k\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{-k\pi/2}+e^{k\pi/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cosh(k\pi/2)}\,.$$

L'identità tra i prodotti scalari delle funzioni e delle trasformate di Fourier diventa

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{(x^2+\pi^2)\cosh(x)}dx=\left(\mathscr{F}_k\left[\frac{\pi}{x^2+\pi^2}\right],\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{\cosh(x)}\right]\right)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\pi|k|},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cosh(k\pi/2)}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\pi|k|}}{\cosh(k\pi/2)}dk\,.$$

Facendo, nell'ultimo integrale, il cambiamento di variabile $x=k\pi/2$, così da avere la funzione coseno iperbolico valutata nella variabile di integrazione x, si ottiene l'identità cercata, ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{(x^2+\pi^2)\cosh(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2|x|}}{\cosh(x)}dx\,.$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

L'operatore

$$F_x[f]=af(x)+bx^2\int_{-T}^{T}y^2f(y)dy\,,$$

con $a,b\in\mathbb{C}/\{0\}$ e $T>0$, è definito $\forall f(x)\in L^2(-T,T)$, ovvero nello spazio vettoriale delle funzioni a quadrato sommabili nell'intervallo $(-T,T)\subset\mathbb{R}$.
Si determinino gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore e si stabilisca per quali valori dei parametri non nulli a e b esso diventa un proiettore.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

L'equazione agli autovalori

$$F_x[f]=af(x)+bx^2\int_{-T}^{T}y^2f(y)dy=\lambda f(x)\,,$$

dove λ è l'autovalore relativo all'autofunzione $f(x)$, può essere riscritta nella forma

$$(\lambda-a)f(x)=bx^2\int_{-T}^{T}y^2f(y)dy\,,$$

da cui si evince che tutte le funzioni $f(x)\in L^2(-T,T)$ tali che

$$\int_{-T}^{T}x^2f(x)dx=(x^2,f)=0\,,$$

ovvero ortogonali alla funzione x^2, sono autofunzioni dell'operatore F_x relative allo stesso autovalore $\lambda=a$. Un'altra classe di autofunzioni è rappresentata da quelle proporzionali ("parallele") alla funzione x^2, che indichiamo con $g(x)=g_2x^2$, $\forall\,g_2\in\mathbb{C}/\{0\}$. Dall'equazione agli autovalori si ha

$$(\lambda-a)g(x)=(\lambda-a)g_2x^2=bx^2\int_{-T}^{T}y^2g(y)dy=g_2bx^2\int_{-T}^{T}y^4dy=\frac{2T^5g_2b}{5}x^2\,,$$

segue che $g(x)$ è un'autofunzione dell'operatore F_x relativa all'autovalore che verifica l'equazione

$$(\lambda-a)g_2x^2=\frac{2T^5g_2b}{5}x^2\,,\qquad\forall\,x\in(-T,T)\,,$$

da cui si ha l'autovalore

$$\lambda=a+\frac{2T^5b}{5}\,.$$

In definitiva lo spettro dell'operatore è $\left\{a, a+2T^5 b/5\right\}$, ci sono solo due autovalori e soltanto il secondo è non degenere. Normalizzando all'unità, le autofunzioni relative all'autovalore degenere $\lambda = a$ sono quelle dell'insieme $\left\{f(x) \in L^2(-T,T) : (f,f) = 1 \text{ et } (x^2, f) = 0\right\}$, mentre per l'autovalore non degenere $\lambda = a + 2T^5 b/5$ si ha la sola autofunzione normalizzata $g(x) = \sqrt{\frac{5}{2T^5}}\, x^2$.
L'operatore diventa un proiettore quando lo spettro contiene solo lo zero e l'unità, nel caso in esame, essendo $a, b \neq 0$, ciò si verifica solo se

$$a = 1\,, \qquad b = -\frac{5}{2T^5}\,,$$

infatti in questo caso lo spettro diventa $\{1, 0\}$ e l'operatore F_x diventa il proiettore nella direzione "ortogonale" a x^2. Lo verifichiamo osservando che la funzione che si ottiene facendo agire l'operatore su una generica $f(x) \in L^2(-T,T)$ rappresenta la componente ortogonale a x^2 della stessa $f(x)$. Infatti, detta $h(x)$ questa componente, cioè

$$h(x) = F_x[f] = f(x) - \frac{5}{2T^5} x^2 \int_{-T}^{T} y^2 f(y) dy\,,$$

è facile vedere che il prodotto scalare (x^2, h) è nullo, ovvero

$$(x^2, h) = \int_{-T}^{T} x^2 \left(f(x) - \frac{5}{2T^5} x^2 \int_{-T}^{T} y^2 f(y) dy \right) dx = \int_{-T}^{T} x^2 f(x) dx - \frac{5}{2T^5} \underbrace{\int_{-T}^{T} x^4 dx}_{2T^5/5} \int_{-T}^{T} y^2 f(y) dy = 0\,,$$

quindi $h(x)$ è la componente della funzione $f(x)$ ortogonale a x^2.