Metodi Matematici per la Fisica

Secondo esonero - 19 giugno 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 3/30)

Si determinino gli autovalori e gli autovettori dell'operatore $\hat{B}$ definito in uno spazio di Hilbert E_{4N} a $4N$ dimensioni dall'azione sui vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{4N} \subset E_{4N}$

$$\hat{B}|e_k\rangle = \theta(2N+1-k)\beta_k|e_{2N+1-k}\rangle + \theta(k-2N)\beta_k|e_{6N+1-k}\rangle \,, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, 4N\} \,,$$

con $\beta_k \neq 0$, $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, 4N\}$ e dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino di Heaviside

$$\theta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{array} \right. .$$

Si stabilisca, infine, per quali valori β_k l'operatore $\hat{B}$ è hermitiano.

Soluzione del primo problema

Le funzioni $\theta(x)$ fanno sì che quando $k < 2N+1$, ovvero $k \leq 2N$ contribuisca solo il primo termine a secondo membro dell'equazione che definisce l'operatore $\hat{B}$, mentre per $k > 2N$, cioè $k \geq 2N+1$ contribuisca solo il secondo. Potremmo quindi separare l'intervallo in cui varia l'indice k e considerare le due equazioni

$$\begin{array}{ll} \hat{B}|e_k\rangle = \beta_k|e_{2N+1-k}\rangle \,, & \qquad k \in \{1, 2, \ldots, 2N\} \,, \\ \hat{B}|e_k\rangle = \beta_k|e_{6N+1-k}\rangle \,, & \qquad k \in \{2N+1, 2N+2, \ldots, 4N\} \,. \end{array}$$

Alla luce di questi risultati, la matrice B che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{4N}$ è

$$B = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{B}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_1|\hat{B}|e_{2N}\rangle & \langle e_1|\hat{B}|e_{2N+1}\rangle & \cdots & \langle e_1|\hat{B}|e_{4N}\rangle \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \langle e_{2N}|\hat{B}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_{2N}|\hat{B}|e_{2N}\rangle & \langle e_{2N}|\hat{B}|e_{2N+1}\rangle & \cdots & \langle e_{2N}|\hat{B}|e_{4N}\rangle \\ \langle e_{2N+1}|\hat{B}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_{2N+1}|\hat{B}|e_{2N}\rangle & \langle e_{2N+1}|\hat{B}|e_{2N+1}\rangle & \cdots & \langle e_{2N+1}|\hat{B}|e_{4N}\rangle \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \langle e_{4N}|\hat{B}|e_1\rangle & \cdots & \langle e_{4N}|\hat{B}|e_{4N}\rangle & \langle e_{4N}|\hat{B}|e_{4N}\rangle & \cdots & \langle e_{2N+1}|\hat{B}|e_{4N}\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \beta_{2N} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \beta_{2N+1} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{4N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & 0_{2N} \\ 0_{2N} & B_2 \end{pmatrix} .$$

L'ultima matrice è espressa in notazione a blocchi in termini di quattro sotto-matrici $2N \times 2N$. In particolare 0_{2N} è la matrice nulla $2N \times 2N$, B_1 e B_2 sono invece le matrici anti-diagonali (non nulle)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_{2N-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_{2N} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{2N+1} \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_{2N+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta_{4N-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_{4N} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

È possibile ottenere lo spettro discreto e gli autovettori direttamente dall'equazione agli autovalori

$$\hat{B}|\nu\rangle = \eta|\nu\rangle\,,$$

usando la decomposizione del vettore $|\nu\rangle$ rispetto alla base data, $|\nu\rangle = \nu^k|e_k\rangle$, si hanno

$$\begin{aligned} [\text{membro sinistro}] &= \hat{B}|\nu\rangle = \nu^k\hat{B}|e_k\rangle = \nu^k\beta_k\Big(\theta(2N+1-k)|e_{2N+1-k}\rangle + \theta(k-2N)|e_{6N+1-k}\rangle\Big)\,, \\ [\text{membro destro}] &= \eta|\nu\rangle = \eta\nu^j|e_j\rangle\,. \end{aligned}$$

Si ottengono due sistemi omogenei indipendenti di $2N$ equazioni

$$\begin{aligned} \nu^k\beta_k &= \eta\nu^{2N+1-k}\,, & k &\in \{1,2,\ldots,2N\}\,. \\ \nu^k\beta_k &= \eta\nu^{6N+1-k}\,, & k &\in \{2N+1,2N+2,\ldots,4N\}\,, \end{aligned}$$

il primo ha come incognite le prima metà delle $4N$ componenti controvarianti $\nu^1,\nu^2,\ldots,\nu^{2N}$, mentre la seconda metà $\nu^{2N+1},\nu^{2N+2},\ldots,\nu^{4N}$ rappresenta le incognite del secondo sistema, ovvero

$$\begin{cases} \nu^1\beta_1 = \eta\nu^{2N} \\ \nu^2\beta_2 = \eta\nu^{2N-1} \\ \vdots \\ \nu^{2N-1}\beta_{2N-1} = \eta\nu^2 \\ \nu^{2N}\beta_{2N} = \eta\nu^1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \nu^{2N+1}\beta_{2N+1} = \eta\nu^{4N} \\ \nu^{2N+2}\beta_{2N+2} = \eta\nu^{4N-1} \\ \vdots \\ \nu^{4N-1}\beta_{4N-1} = \eta\nu^{2N+2} \\ \nu^{4N}\beta_{4N} = \eta\nu^{2N+1} \end{cases}.$$

Ciascun sistema è a sua volta composto da N sotto-sistemi omogenei indipendenti di due equazioni in due variabili. In particolare le due equazioni di ciascun sotto-sistema 2×2 sono le coppie: prima e $2N$-esima equazione, seconda e $(2N-1)$-esima equazione, fino alle N-esima e $(N+1)$-esima equazione.
Più in dettaglio i due insiemi di N sistemi omogenei 2×2 ciascuno sono

$$\left\{\begin{cases} \nu^1\beta_1 = \eta\nu^{2N} \\ \nu^{2N}\beta_{2N} = \eta\nu^1 \end{cases}, \begin{cases} \nu^2\beta_2 = \eta\nu^{2N-1} \\ \nu^{2N-1}\beta_{2N-1} = \eta\nu^2 \end{cases}, \ldots, \begin{cases} \nu^N\beta_N = \eta\nu^{N+1} \\ \nu^{N+1}\beta_{N+1} = \eta\nu^N \end{cases}\right\} = \left\{\begin{cases} \nu^j\beta_j = \eta\nu^{2N+1-j} \\ \nu^{2N+1-j}\beta_{2N+1-j} = \eta\nu^j \end{cases}\right\}_{j=1}^{N},$$

$$\left\{\begin{cases} \nu^{2N+1}\beta_{2N+1} = \eta\nu^{4N} \\ \nu^{4N}\beta_{4N} = \eta\nu^{2N+1} \end{cases}, \begin{cases} \nu^{2N+2}\beta_{2N+2} = \eta\nu^{4N-1} \\ \nu^{4N-1}\beta_{4N-1} = \eta\nu^{2N+2} \end{cases}, \ldots, \begin{cases} \nu^{3N}\beta_{3N} = \eta\nu^{3N+\nu 1} \\ \nu^{3N+1}\beta_{3N+1} = \eta\nu^{3N} \end{cases}\right\} = \left\{\begin{cases} \nu^{2N+j}\beta_{2N+j} = \eta\nu^{4N+1-j} \\ \nu^{4N+1-j}\beta_{4N+1-j} = \eta\nu^{2N+j} \end{cases}\right\}_{j=1}^{N}.$$

Procediamo risolvendo un sistema 2×2 alla volta e ponendo a zero tutte le componenti che sono le incognite degli altri sistemi, si ottengono così $4N$ autovettori che hanno solo due componenti non nulle. Risolviamo il j-esimo sistema omogeneo del primo insieme

$$\begin{cases} \nu^j\beta_j = \eta\nu^{2N+1-j} \\ \nu^{2N+1-j}\beta_{2N+1-j} = \eta\nu^j \end{cases}, \qquad j \in \{1,2,\ldots,N\}\,,$$

posto $\nu^j = 1$, dalle due equazioni si ottengono i due autovalori

$$\nu^{2N+1-j} = \frac{\eta}{\beta_{2N+1-j}} = \frac{\beta_j}{\eta} \qquad \Rightarrow \qquad \eta_j^{\pm} = \pm\sqrt{\beta_j\beta_{2N+1-j}}\,,$$

in corrispondenza dei quali si hanno le due componenti

$$\nu_{\pm}^{2N+1-j} = \pm\sqrt{\frac{\beta_j}{\beta_{2N+1-j}}}\,.$$

Si ottengono così $2N$ autovalori: $\eta_1^+, \eta_2^+, \ldots, \eta_N^+, \eta_1^-, \eta_2^-, \ldots, \eta_N^-$. L'autovettore corrispondente all'autovalore $\eta_j^\pm$ ha solo due componenti non nulle, la j-esima, che abbiamo posto uguale ad 1 e la $(2N+1-j)$-esima pari, invece a $\pm\sqrt{\beta_j/\beta_{2N+1-j}}$, con $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. La rappresentazione matriciale $4N \times 1$ dell'autovettore $|v_j^\pm\rangle$ normalizzato è

$$v_j^\pm = \frac{1}{\sqrt{1+\left|\beta_j/\beta_{2N+1-j}\right|}} \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm\sqrt{\beta_j/\beta_{2N+1-j}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ j\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ (2N+1-j)\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ \end{array} , \qquad j \in \{1, 2, \ldots, N\} .$$

In questo modo si ottengono i primi $2N$ autovettori $v_1^+, v_2^+, \ldots, v_N^+, v_1^-, v_2^-, \ldots, v_N^-$.
Dal j-esimo sistema omogeneo del secondo insieme

$$\left\{ \begin{array}{r} v^{2N+j}\beta_j = \eta v^{4N+1-j} \\ v^{4N+1-j}\beta_{4N+1-j} = \eta v^{2N+j} \end{array} \right. , \qquad j \in \{1, 2, \ldots, N\} ,$$

si ottengono i due autovalori

$$\eta_{2N+j}^\pm = \pm\sqrt{\beta_{2N+j}\beta_{4N+1-j}} ,$$

corrispondenti agli autovettori $|v_{2N+j}^\pm\rangle$, che hanno le rappresentazioni matriciali $4N \times 1$

$$v_{2N+j}^\pm = \frac{1}{\sqrt{1+\left|\beta_{2N+j}/\beta_{4N+1-j}\right|}} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \pm\sqrt{\beta_{2N+j}/\beta_{4N+1-j}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ (2N+j)\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ (4N+1-j)\text{-esima riga} \\ \\ \\ \\ \end{array} , \qquad j \in \{1, 2, \ldots, N\} ,$$

questi sono gli elementi del secondo insieme di $2N$ autovettori $v_{2N+1}^+, v_{2N+2}^+, \ldots, v_{3N}^+, v_{2N+1}^-, v_{2N+2}^-, \ldots, v_{3N}^-$.
Lo stesso risultato può essere ottenuto usando la notazione a blocchi della matrice B

$$B = \left(\begin{array}{cc} B_1 & 0_{2N} \\ 0_{2N} & B_2 \end{array} \right) .$$

Poiché si tratta di una matrice diagonale, l'equazione agli autovalori ha due componenti indipendenti, ovvero

$$Bv = \eta v \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} B_1 v_1 = \eta v_1 \\ B_2 v_2 = \eta v_2 \end{array} \right. .$$

Lo spettro del primo blocco è l'insieme di $2N$ elementi $\left\{\eta_1^+, \eta_2^+, \ldots, \eta_N^+, \eta_1^-, \eta_2^-, \ldots, \eta_N^-\right\}$, quello del secondo è $\left\{\eta_{2N+1}^+, \eta_{2N+2}^+, \ldots, \eta_{3N}^+, \eta_{2N+1}^-, \eta_{2N+2}^-, \ldots, \eta_{3N}^-\right\}$. Gli autovettori corrispondenti al primo blocco sono vettori $2N \times 1$, che coincidono al primo blocco $2N \times 1$ dei vettori, $4N \times 1$: $v_1^+, v_2^+, \ldots, v_N^+, v_1^-, v_2^-, \ldots, v_N^-$. Gli autovettori corrispondenti al secondo blocco sono vettori $2N \times 1$, che coincidono invece al secondo blocco $2N \times 1$ dei vettori, $4N \times 1$:

$v_{2N+1}^+, v_{2N+2}^+, \ldots, v_{3N}^+, v_{2N+1}^-, v_{2N+2}^-, \ldots, v_{3N}^-$.
Dalla rappresentazione matriciale a blocchi dell'operatore $\hat{B}$ è facile evincere che la condizione di hemitianità sui parametri β_k, con $k \in \{1, 2, \ldots, 4N\}$, che si ottiene dalle identità $B_1 = B_1^\dagger$ e $B_2 = B_2^\dagger$, è data dai due insiemi di $2N$ equazioni

$$\begin{aligned} \beta_j &= \beta_{2N+1-j}^* \\ \beta_{2N+j} &= \beta_{4N+1-j}^* \end{aligned} \quad , \qquad j \in \{1, 2, \ldots, 2N\} \, .$$

In questo caso, come è noto, gli autovalori sono reali, infatti sono radici quadrate di moduli quadri, ovvero di numeri reali non negativi,

$$\begin{aligned} \eta_j^\pm &= \pm\sqrt{\beta_j \beta_{2N+1-j}} = \pm\sqrt{\beta_j \beta_j^*} = \pm\sqrt{|\beta_j|^2} = \pm|\beta_j| \in \mathbb{R} \\ \eta_{2N+j}^\pm &= \pm\sqrt{\beta_{2N+j} \beta_{4N+1-j}} = \pm\sqrt{\beta_{2N+j} \beta_{2N+j}^*} = \pm\sqrt{|\beta_{2N+j}|^2} = \pm|\beta_{2N+j}| \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad j \in \{1, 2, \ldots, 2N\} \, .$$

Gli autovettori corrispondenti diventano ortogonali. Ad esempio, nel caso del primo blocco, gli autovettori relativi agli autovalori η_j^+ e η_j^-, con $j \in \{1, 2, \ldots, 2N\}$, hanno le rappresentazioni matriciali

$$v_j^+ = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\beta_j / \beta_j^*\right|}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\beta_j / \beta_j^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad v_j^- = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\beta_j / \beta_j^*\right|}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sqrt{\beta_j / \beta_j^*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

da queste rappresentazioni si ottiene il prodotto scalare nullo e quindi l'ortogonalità, ovvero

$$\langle v_j^+ | v_j^- \rangle = \left(v_j^+\right)^\dagger v_j^- = \left(v_j^{+*}\right)^T v_j^- = \frac{1}{1 + \left|\beta_j / \beta_j^*\right|} \left(1 - \sqrt{\frac{\beta_j^*}{\beta_j}} \sqrt{\frac{\beta_j}{\beta_j^*}}\right) = \frac{1}{1 + \left|\beta_j / \beta_j^*\right|} \left(1 - \sqrt{\frac{|\beta_j|^2}{|\beta_j|^2}}\right) = 0 \, .$$

Secondo problema (punteggio 3/30)

Facendo uso del teorema di Plancherel per le funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ si dimostri l'identità

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\theta\left(1/2 + x\right) \theta\left(1/2 - x\right) - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{\pi}} \right) dx = 0 \, ,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione a gradino di Heaviside definita nel primo problema.

Soluzione del secondo problema

Il risultato del teorema di Plancherel cui ci si riferisce è

$$(f, g) = \left(\mathscr{F}_k\left[f\right], \mathscr{F}_k\left[g\right]\right) \, ,$$

valido per $\forall\, f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, ovvero il prodotto scalare di due funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$ coincide con quello dell trasformate di Fourier, che, per il teorema di Plancherel sono anch'esse funzioni a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$. Il prodotto scalare, $\forall\, f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, è dato dall'integrale

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx \, .$$

L'identità da dimostrare può essere posta nella forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\,e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}e^{-x^2}dx\,.$$

L'integrale a primo membro rappresenta il prodotto scalare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\,e^{-x^2}dx = \left(\theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x),e^{-x^2}\right) \equiv (f,g)\,,$$

dove abbiamo posto

$$f(x) = \theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x) = \begin{cases} 1 & |x|<1/2 \\ \\ 0 & |x|>1/2 \end{cases}\,, \qquad g(x) = e^{-x^2}\,.$$

Queste funzioni sono a quadrato sommabili in $\mathbb{R}$, ovvero $f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R})$, possiamo quindi applicare il teorema di Plancherel e avremo

$$(f,g) = \left(\mathscr{F}_k\left[\theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\right], \mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right]\right)\,.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[\theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\,e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1/2}^{1/2}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ik/2}-e^{ik/2}}{-ik} \\ \mathscr{F}_k\left[\theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{sen}(k/2)}{k}\,,\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier della funzione $g(x)$, ovvero della gaussiana, è nota e vale

$$\mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right] = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}\,.$$

L'dentità tra i prodotti scalari delle funzioni e delle trasformate di Fourier diventa

$$\begin{aligned}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty}\theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\,e^{-x^2}dx &= \left(\mathscr{F}_k\left[\theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\right], \mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right]\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{sen}(k/2)}{k}, \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(k/2)}{k}e^{-k^2/4}dk\,.\end{aligned}$$

Per ottenere l'identità cercata, nell'ultimo integrale facciamo il cambiamento di variabile $x = k/2$, così da avere la funzione seno valutata nella variabile di integrazione x, infatti si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(1/2+x)\,\theta(1/2-x)\,e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}e^{-x^2}dx\,.$$

Terzo problema (punteggio 3/30)

L'operatore

$$G_x\left[f\right] = af(x) + bx\int_{-T}^{T} yf(y)dy\,,$$

con $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$ e $T > 0$, è definito $\forall\, f(x) \in L^2(-T, T)$, ovvero nello spazio vettoriale delle funzioni a quadrato sommabili nell'intervallo $(-T, T) \subset \mathbb{R}$.
Si determinino gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore e si stabilisca per quali valori dei parametri non nulli a e b esso diventa un proiettore.

Soluzione del terzo problema

L'equazione agli autovalori

$$G_x[f] = af(x) + bx\int_{-T}^{T} yf(y)dy = \eta f(x)\,,$$

dove η è l'autovalore relativo all'autofunzione $f(x)$, può essere riscritta nella forma

$$(\eta - a)f(x) = bx\int_{-T}^{T} yf(y)dy\,,$$

da cui si evince che tutte le funzioni $f(x) \in L^2(-T, T)$ tali che

$$\int_{-T}^{T} xf(x)dx = (x, f) = 0\,,$$

ovvero ortogonali alla funzione x, sono autofunzioni dell'operatore G_x relative allo stesso autovalore $\eta = a$. Un'altra classe di autofunzioni è rappresentata da quelle proporzionali ("parallele") alla funzione x, che indichiamo con $g(x) = g_1 x$, $\forall\, g_1 \in \mathbb{C}/\{0\}$. Dall'equazione agli autovalori si ha

$$(\eta - a)g(x) = (\eta - a)g_1 x = bx\int_{-T}^{T} yg(y)dy = g_1 bx\int_{-T}^{T} y^2 dy = \frac{2T^3 g_1 b}{3}x\,,$$

segue che $g(x)$ è un'autofunzione dell'operatore G_x relativa all'autovalore che verifica l'equazione

$$(\eta - a)g_1 x = \frac{2T^3 g_1 b}{3}x\,, \qquad \forall\, x \in (-T, T)\,,$$

ovvero

$$\eta = a + \frac{2T^3 b}{3}\,.$$

In definitiva lo spettro dell'operatore è $\left\{a, a + 2T^3 b/3\right\}$, ci sono solo due autovalori e soltanto il secondo è non degenere. Normalizzando all'unità, le autofunzioni relative all'autovalore degenere $\eta = a$ sono quelle dell'insieme $\left\{f(x) \in L^2(-T, T) : (f, f) = 1 \text{ et } (x, f) = 0\right\}$, mentre per l'autovalore non degenere $\lambda = a + 2T^3 b/3$ si ha la sola autofunzione normalizzata $g(x) = \sqrt{\frac{3}{2T^3}}\,x$.
L'operatore diventa un proiettore quando lo spettro contiene solo lo zero e l'unità, nel caso in esame, essendo $a, b \neq 0$, ciò si verifica solo se

$$a = 1\,, \qquad b = -\frac{3}{2T^3}\,,$$

infatti in questo caso lo spettro diventa $\{1, 0\}$ e l'operatore G_x diventa il proiettore nella direzione "ortogonale" a x. Lo verifichiamo osservando che la funzione che si ottiene facendo agire l'operatore su una generica $f(x) \in L^2(-T, T)$ rappresenta la componente ortogonale a x della stessa $f(x)$. Infatti, detta $h(x)$ questa componente, cioè

$$h(x) = G_x[f] = f(x) - \frac{3}{2T^3}x\int_{-T}^{T} yf(y)dy\,,$$

è facile vedere che il prodotto scalare (x,h) è nullo, ovvero

$$(x,h)=\int_{-T}^{T} x\left(f(x)-\frac{3}{2T^3}x\int_{-T}^{T} yf(y)dy\right)dx=\int_{-T}^{T} xf(x)dx-\frac{3}{2T^3}\underbrace{\int_{-T}^{T} x^2dx}_{2T^3/3}\int_{-T}^{T} yf(y)dy=0\,,$$

quindi $h(x)$ è la componente della funzione $f(x)$ ortogonale a x.

Quarto problema (punteggio 3/30)

Si ottengano autovalori e autovettori dell'operatore

$$\hat{H}=\exp\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right),$$

definito nello spazio di Hilbert E_N a N dimensioni in termini dei vettori $|a\rangle, |b\rangle \in E_N$, tali che:

$$\langle a|b\rangle=0\,,\qquad |a\rangle\neq|0\rangle\neq|b\rangle\,.$$

Soluzione del quarto problema

Usiamo lo sviluppo in serie per riscrivere l'operatore come

$$\hat{H}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)^k=\hat{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)^k,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità. Grazie all'ortogonalità dei vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$, il quadrato dell'operatore vale

$$\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)^2=\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)=|a\rangle\langle a|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|b\rangle\langle b|=\alpha|a\rangle\langle a|+\beta|b\rangle\langle b|,$$

dove i numeri α e β non sono altro che le norme al quadrato di $|a\rangle$ e $|b\rangle$, cioè

$$\alpha=\langle a|a\rangle=\|a\|^2\,,\qquad \beta=\langle b|b\rangle=\|b\|^2\,.$$

Dalla precedente relazione si evince che per la potenza k-esima, $k\in\mathbb{N}$, si ha

$$\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)^k=\alpha^{k-1}|a\rangle\langle a|+\beta^{k-1}|b\rangle\langle b|\,.$$

Questa relazione può essere dimostrata per induzione. La validità al passo $k=2$ è ovvia ed è stata già dimostrata, procediamo assumendo la relazione valida al passo $k-1$, cioè

$$\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)^{k-1}=\alpha^{k-2}|a\rangle\langle a|+\beta^{k-2}|b\rangle\langle b|\,,$$

quindi al passo successivo, il k-esimo, si ha

$$\begin{aligned}\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)^k&=\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)^{k-1}\\&=\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)\left(\alpha^{k-2}|a\rangle\langle a|+\beta^{k-2}|b\rangle\langle b|\right)\\&=\underbrace{\alpha^{k-2}|a\rangle\langle a|a\rangle\langle a|}_{=\alpha^{k-1}|a\rangle\langle a|}+\underbrace{\alpha^{k-2}|b\rangle\langle b|a\rangle\langle a|}_{=0}+\underbrace{\beta^{k-2}|a\rangle\langle a|b\rangle\langle b|}_{=0}+\underbrace{\beta^{k-2}|b\rangle\langle b|b\rangle\langle b|}_{=\beta^{k-1}|b\rangle\langle b|}\\&=\alpha^{k-1}|a\rangle\langle a|+\beta^{k-1}|b\rangle\langle b|\,.\end{aligned}$$

Alla luce di questo risultato l'operatore $\hat{H}$ può essere posto nella forma

$$\begin{aligned}\hat{H}&=\hat{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(|a\rangle\langle a|+|b\rangle\langle b|\right)^k=\hat{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\alpha^{k-1}|a\rangle\langle a|+\beta^{k-1}|b\rangle\langle b|\right)\\&=\hat{I}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-1}}{k!}|a\rangle\langle a|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^{k-1}}{k!}|b\rangle\langle b|=\hat{I}+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}|a\rangle\langle a|+\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}|b\rangle\langle b|\\&=\hat{I}+\frac{e^\alpha-1}{\alpha}|a\rangle\langle a|+\frac{e^\beta-1}{\beta}|b\rangle\langle b|\,.\end{aligned}$$

Da cui si evince che l'operatore $\hat{H}$ è hermitiano in quanto somma di operatori hermitiani: $\hat{I}$, $\frac{e^\alpha-1}{\alpha}|a\rangle\langle a|$, $\frac{e^\beta-1}{\beta}|b\rangle\langle b|$. Gli ultimi due sono operatori hermitiana poichè α e β sono numeri reali, essendo norme al quadrato di vettori diversi dal vettore nullo, sono inoltre strettamente maggiori di zero.
È facile vedere che facendo agire l'operatore $\hat{H}$ sui vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$ si hanno

$$\hat{H}|a\rangle = \left(\hat{I} + \frac{e^\alpha-1}{\alpha}|a\rangle\langle a| + \frac{e^\beta-1}{\beta}|b\rangle\langle b|\right)|a\rangle = |a\rangle + \underbrace{\frac{e^\alpha-1}{\alpha}|a\rangle\langle a|a\rangle}_{=(e^\alpha-1)|a\rangle} + \underbrace{\frac{e^\beta-1}{\beta}|b\rangle\langle b|a\rangle}_{=0} = e^\alpha\,|a\rangle\,;$$

$$\hat{H}|b\rangle = \left(\hat{I} + \frac{e^\alpha-1}{\alpha}|a\rangle\langle a| + \frac{e^\beta-1}{\beta}|b\rangle\langle b|\right)|b\rangle = |b\rangle + \underbrace{\frac{e^\alpha-1}{\alpha}|a\rangle\langle a|b\rangle}_{=0} + \underbrace{\frac{e^\beta-1}{\beta}|b\rangle\langle b|b\rangle}_{=\left(e^\beta-1\right)|b\rangle} = e^\beta\,|b\rangle\,,$$

si tratta di equazioni agli autovalori, per cui $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono autovettori dell'operatore $\hat{H}$ con autovalori $\lambda_a = e^\alpha$ e $\lambda_b = e^\beta$. Facendo agire lo stesso operatore su un vettore $|c\rangle$ ortogonale sia ad $|a\rangle$ che a $|b\rangle$ avremo

$$\hat{H}|c\rangle = \left(\hat{I} + \frac{e^\alpha-1}{\alpha}|a\rangle\langle a| + \frac{e^\beta-1}{\beta}|b\rangle\langle b|\right)|a\rangle = |c\rangle + \underbrace{\frac{e^\alpha-1}{\alpha}|a\rangle\langle a|c\rangle}_{=0} + \underbrace{\frac{e^\beta-1}{\beta}|b\rangle\langle b|c\rangle}_{=0} = |c\rangle\,,$$

da cui si evince che ogni vettore $|c\rangle$, tale che $\langle a|c\rangle = \langle b|c\rangle = 0$, è autovettore relativo all'autovalore $\lambda_\perp = 1$. In definitiva lo spettro discreto dell'operatore $\hat{H}$ ha tre autovalori $\left\{\lambda_a = e^\alpha, \lambda_b = e^\beta, \lambda_\perp = 1\right\}$, i primi due sono non degeneri mentre il terzo, l'unità, ha grado di degenerazione pari a $N-2$, ovvero i suoi autovettori generano un sotto-spazio di E_N di dimensione $N-2$.
Possiamo definire una base ortonormale dello spazio di Hilbert E_N in modo tale che due suoi vettori, i primi due ad esempio, siano paralleli ai vettori $|a\rangle$ e $|b\rangle$. Sia $\left\{|e_k\rangle\right\}_{k=1}^N$ tale base, allora

$$|e_1\rangle = \frac{|a\rangle}{\||a\|}\,, \qquad |e_2\rangle = \frac{|b\rangle}{\|b\|}\,.$$

La matrice H, $N\times N$, che rappresenta l'operatore rispetto alla base $\left\{|e_k\rangle\right\}_{k=1}^N$ è

$$H = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2 & 0_{2,N-2} \\ 0_{N-2,2} & I_{N-2} \end{pmatrix}\,,$$

dove H_2 è la matrice 2×2 degli autovalori non-degeneri

$$H_2 = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}\,,$$

I_{N-2} è la matrice identità $(N-2)\times(N-2)$ e $0_{m,n}$ è la matrice nulla $m\times n$, con: $m,n\in\mathbb{N}$.

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 3/30)

Si risolva l'equazione integrale

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+e^y)\cos(y)f(y)dy + \mathrm{sen}(x)\,.$$

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

Si tratta di un'equazione di Fredholm con nucleo separabile, infatti possiamo riscrivere

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(x\cos(y) + e^y\cos(y)\right) f(y)dy + \mathrm{sen}(x) \equiv \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2} M_j(x)\int_0^\pi N_j(y)f(y)dy + \mathrm{sen}(x)\,,$$

dove si sono introdotte le quattro funzioni

$$\begin{aligned} M_1(x) &= x\,, & N_1(x) &= \cos(x)\,, \\ M_2(x) &= 1\,, & N_2(x) &= e^x\cos(x)\,. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo ambo i membri per la funzione $N_k(x)$, $k = 1,2$, e integriamo sull'intervallo $(0,\pi)$

$$\underbrace{\int_0^\pi N_k(x)f(x)dx}_{=C_k} = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2}\underbrace{\int_0^\pi N_k(x)M_j(x)dx}_{=A_{kj}}\underbrace{\int_0^\pi N_j(y)f(y)dy}_{=C_j} + \underbrace{\int_0^\pi N_k(x)\mathrm{sen}(x)dx}_{=B_k}\,,$$

dove i numeri C_k, B_k, e A_{kj}, con $k,j = 1,2$, possono essere interpretati come elementi di due vettori colonna 2×1, C e B, e di una matrice quadrata 2×2, A. In questo modo si ha il sistema lineare 2×2

$$\left(I - \frac{1}{\pi}A\right)C = B\,,$$

che ha matrice dei coefficienti $(I - A/\pi)$, vettore incognito C e vettore termine noto B.
Gli elementi della matrice A sono

$$A_{11} = \int_0^\pi N_1(x)M_1(x)dx = \int_0^\pi x\cos(x)dx = -2\,, \qquad A_{12} = \int_0^\pi N_1(x)M_2(x)dx = \int_0^\pi \cos(x)dx = 0\,,$$

$$A_{21} = \int_0^\pi N_2(x)M_1(x)dx = \int_0^\pi e^x\cos(x)x\,dx = -\frac{\pi e^\pi}{2}\,, \qquad A_{22} = \int_0^\pi N_2(x)M_2(x)dx = \int_0^\pi e^x\cos(x)dx = -\frac{e^\pi+1}{2}\,.$$

Gli elementi del vettore colonna B sono

$$B_1 = \int_0^\pi N_1(x)\mathrm{sen}(x)dx = \int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = 0\,,$$
$$B_2 = \int_0^\pi N_2(x)\mathrm{sen}(x)dx = \int_0^\pi e^x\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)dx = \frac{1-e^\pi}{5}\,.$$

Il sistema lineare è

$$\left(I - \frac{1}{\pi}A\right)C = B$$
$$\begin{pmatrix} 1+2/\pi & 0 \\ e^\pi/2 & 1+(e^\pi+1)/(2\pi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (1-e^\pi)/5 \end{pmatrix}.$$

La soluzione del sistema è

$$C_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-e^\pi)/5 & 1+(e^\pi+1)/(2\pi) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1+2/\pi & 0 \\ e^\pi/2 & 1+(e^\pi+1)/(2\pi) \end{pmatrix}} = 0\,,$$

$$C_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1+2/\pi & 0 \\ e^\pi/2 & (1-e^\pi)/5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1+2/\pi & 0 \\ e^\pi/2 & 1+(e^\pi+1)/(2\pi) \end{pmatrix}} = \frac{2\pi}{5}\,\frac{1-e^\pi}{1+2\pi+e^\pi}\,.$$

Infine dalla relazione

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2} M_j(x)\int_0^\pi N_j(y)f(y)dy + \mathrm{sen}(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2} C_jM_j(x) + \mathrm{sen}(x)\,,$$

si ottiene la soluzione

$$f(x) = \frac{1}{\pi}C_2M_2(x) + \mathrm{sen}(x) = \frac{2}{5}\,\frac{1-e^\pi}{1+2\pi+e^\pi} + \mathrm{sen}(x)\,.$$

Sesto problema (punteggio 3/30)

Si ottenga la matrice che rappresenta, rispetto alla base canonica, l'operatore $\hat{A}$, definito in uno spazio di Hilbert a quattro dimensioni E_4, sapendo che lo spettro discreto dell'operatore è $\sigma_A = \{-1, 1, 1, 1\}$ e che gli autovettori, elementi dell'insieme $\left\{|u_j\rangle\right\}_{j=1}^4$, sono rappresentati rispetto alla stessa base canonica dai vettori colonna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

Soluzione del sesto Problema

Si verifica che i quattro autovettori sono linearmente indipendenti osservando che il determinate della matrice che si ottiene allineando le componenti lungo le colonne o le righe è diverso da zero, infatti si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & i & i \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ i & i & i \end{pmatrix} = i + i - i = i\,.$$

Ne consegue che l'operatore è diagonalizzabile e verifica il teorema spettrale, ovvero vale la relazione

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \hat{P}_j\,,$$

dove $\left\{\hat{P}_j\right\}_{j=1}^4$ è un insieme di proiettori ortogonali, cioè: $\hat{P}_j \hat{P}_k = \delta_{jk} P_j$, con $j, k = 1, 2, 3, 4$. Se l'operatore ammettesse un insieme ortonormale di autovettori $\left\{|v_j\rangle\right\}_{j=1}^4$, ovvero se fosse un operatore normale, i proiettori sarebbero

$$\hat{P}_j = |v_j\rangle\langle v_j|\,, \qquad j = 1, 2, 3, 4\,.$$

Anche se gli autovettori dati non sono tutti ortogonali si osserva che il vettore u_1 è ortogonale agli altri tre, che invece non sono ortogonali tra loro. D'altro canto i tre autovettori non ortogonali $|u_2\rangle$, $|u_3\rangle$ e $|u_4\rangle$ sono relativi allo stesso autovalore $\lambda = 1$, che è quindi degenere con un ordine di degenerazione pari alla dimensione del sotto-spazio generato dai tre autovettori, che essendo linearmente indipendenti è pari a tre. Ogni combinazione lineare dei tre vettori $|u_2\rangle$, $|u_3\rangle$ e $|u_4\rangle$ rappresenta ancora un autovettore dell'operatore $\hat{A}$ relativo allo stesso autovalore $\lambda = 1$. Ne consegue che possiamo usare il metodo di Gram-Schmidt per "ortogonalizzare" l'insieme $\left\{|u_j\rangle\right\}_{j=2}^4$. Poniamo il primo vettore dell'insieme ortogonale da ottenere uguale al primo vettore dell'insieme di partenza e i successivi si ottengono sottraendo le componenti parallele ai precedenti,

$$|v_2\rangle = |u_2\rangle\,, \qquad |v_3\rangle = |u_3\rangle - \frac{\langle v_2|u_3\rangle}{\langle v_2|v_2\rangle}|v_2\rangle\,, \qquad |v_4\rangle = |u_4\rangle - \frac{\langle v_2|u_4\rangle}{\langle v_2|v_2\rangle}|v_2\rangle - \frac{\langle v_3|u_4\rangle}{\langle v_3|v_3\rangle}|v_3\rangle\,.$$

Usando le rappresentazioni matriciali date si hanno

$$|v_2\rangle \quad \hookleftarrow \quad v_2 = u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},$$

$$|v_3\rangle \quad \hookleftarrow \quad v_3 = u_3 - \frac{v_2^\dagger u_3}{v_2^\dagger v_2} v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ i/3 \end{pmatrix},$$

$$|v_4\rangle \quad \hookleftarrow \quad v_4 = u_4 - \frac{v_2^\dagger u_4}{v_2^\dagger v_2} v_2 - \frac{v_3^\dagger u_4}{v_3^\dagger v_3} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ i/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3i \end{pmatrix}.$$

Poiché u_1 è ortogonale ai tre vettori v_2, v_3, v_4, poniamo $v_1 = u_1$ cosicché l'insieme $\left\{v_j\right\}_{j=1}^4$ è ortogonale. Normalizzando si ottiene l'insieme ortonormale $\left\{a_j = v_j / \left\|v_j\right\|\right\}_{j=1}^4$ di autovettori di A, che è la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base canonica. I vettori dell'insieme $\left\{a_j = v_j / \left\|v_j\right\|\right\}_{j=1}^4$ sono

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

La matrice P_j che rappresenta il j-esimo proiettore ha elementi

$$\left(P_j\right)^k_m = a^k_{(j)} a^{m*}_{(j)}, \qquad j, k, m = 1, 2, 3, 4,$$

dove $a^k_{(j)}$ rappresenta la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore a_j. In definitiva si hanno le matrici dei proiettori

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & -i/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & -i/3 \\ 0 & i/3 & i/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & i/3 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & -i/6 \\ 0 & -i/3 & i/6 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & i/2 \\ 0 & 0 & -i/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

si tratta di matrici hermitiane e idempotenti.
Dalla rappresentazione spettrale si ottiene la matrice A come

$$A = -P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seconda procedura risolutiva del sesto problema

Sapendo, come già ribadito, che ogni combinazione lineare di autovettori relativi ad uno stesso autovalore degenere rappresenta ancora un autovettore relativo allo stesso autovalore, è possibile combinare a "vista" i tre vettori linearmente indipendenti u_2, u_3 ed u_4 per ottenere tre vettori ortogonali w_2, w_3 ed w_4. In particolare si hanno

$$
\begin{aligned}
w_2 &= u_2 - u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \\
w_3 &= u_2 - u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \\
w_4 &= i\left(u_2 - u_3 - u_4\right) = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

che formano assieme al vettore $w_1 = u_1$ un insieme ortonormale di autovettori della matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}$. Rispetto alla base in cui gli autovettori sono quelli dell'insieme $\{w_k\}_{k=1}^4$ tale matrice sarà ovviamente diagonale, cioè

$$
A = \mathrm{diag}\left(-1, 1, 1, 1\right) .
$$