Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 giugno 2015

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$P = \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(\sqrt{x})}{x^2 + x + 1}\, dx\,.$$

Soluzione 1

Facciamo la sostituzione $w = \sqrt{x}$ e, grazie alla parità dell'integranda, estendiamo l'intervallo di integrazione a tutto l'asse reale, si ha

$$P = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{sen}(w)}{w^4 + w^2 + 1} w\, dw\,.$$

L'integranda ha 4 poli semplici in

$$w_1 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad w_2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

$$w_3 = e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad w_4 = e^{5i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Scrivendo il seno con la Formula di Eulero

$$P = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{w^4 + w^2 + 1} w\, dw\,,$$

applichiamo il lemma di Jordan, nel semipiano superiore dove si trovano i poli w_1 e w_2, per il primo esponenziale; in quello inferiore dove invece sono posizionati, simmetricamente ai primi, i poli w_3 e w_4, per il secondo esponenziale. Si ottiene

$$\begin{aligned}
P &= \pi\left[w_1 \frac{e^{i w_1}}{4w_1^3 + 2w_1} + w_2 \frac{e^{i w_2}}{4w_2^3 + 2w_2} + w_3 \frac{e^{-i w_3}}{4w_3^3 + 2w_3} + w_4 \frac{e^{-i w_4}}{4w_4^3 + 2w_4}\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{i w_1}}{2w_1^2 + 1} + \frac{e^{i w_2}}{2w_2^2 + 1} + \frac{e^{-i w_3}}{2w_3^2 + 1} + \frac{e^{-i w_4}}{2w_4^2 + 1}\right] \\
&= \frac{\pi}{2i\sqrt{3}}\left[e^{i w_1} - e^{i w_2} + e^{-i w_3} - e^{-i w_4}\right]\,,
\end{aligned}$$

dove si sono sfruttate le identità

$$2w_{1,3}^2 + 1 = -(2w_{2,4}^2 + 1) = i\sqrt{3}\,.$$

Usando le espressioni cartesiane dei poli si ha, in forma compatta, il risultato finale

$$P = \frac{\pi\, e^{-\sqrt{3}/2}}{2i\sqrt{3}}\left[e^{i/2} - e^{-i/2} + e^{i/2} - e^{-i/2}\right] = \frac{2\pi\, e^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}}\mathrm{sen}(1/2)\,.$$

Esercizio 2 (punteggio 6/30)

Si verifichino le seguenti somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Soluzione 2

Si usa l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=R} \frac{\tan(z\pi/2)}{z^{2n}} dz = \mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^{2n}}, z=0\right] + \sum_{|2k+1|<R} \mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^{2n}}, z=(2k+1)\right],$$

con $n \in \mathbb{N}$ e con $R > 0$ e tale che: $R \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. I residui nei poli della tangente sono

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^{2n}}, z=(2k+1)\right] = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^{2n}}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Nel limite $R \to \infty$, grazie alle proprietà della funzione z^{-2n}, l'integrale si annulla e la somma diventa una serie su $\mathbb{Z}$, ovvero si ha

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n}} = \frac{\pi}{2}\mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^{2n}}, z=0\right],$$

inoltre dalla simmetria del termine della somma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n}} = \frac{\pi}{4}\mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^{2n}}, z=0\right].$$

Per $n=2$ e $n=3$ si hanno i due casi per i quali dobbiamo calcolare il residuo nell'origine. A tal fine sfruttiamo gli sviluppi noti delle funzioni seno e coseno, ovvero

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(z)}{z^{2n}} &= \frac{1}{z^{2n}}\frac{\mathrm{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{1}{z^{2n}}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{z^{2n}}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)\right)\left[1 + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right) + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + O(z^6)\right)^2 + \dots\right].
\end{aligned}$$

Nel caso di $n=2$, il residuo coincide con il coefficiente di z^3 nella serie che si ottiene dal prodotto delle serie di potenze positive. In particolare

$$\frac{\tan(z\pi/2)}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left[\dots + z^3\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots\right] \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^4}, z=0\right] = \frac{\pi^3}{24}.$$

Mentre per $n=3$, dobbiamo considerare il coefficiente di z^5

$$\frac{\tan(z\pi/2)}{z^6} = \frac{1}{z^6}\left[\dots + z^5\frac{\pi^5}{32}\left(-\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{(2!)^2}\right) + \dots\right] \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^4}, z=0\right] = \frac{\pi^5}{240}.$$

Da cui le somme delle due serie

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} &= \frac{\pi}{4}\mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^4}, z=0\right] = \frac{\pi^4}{96}, \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} &= \frac{\pi}{4}\mathrm{Res}\left[\frac{\tan(z\pi/2)}{z^6}, z=0\right] = \frac{\pi^6}{960}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (punteggio 4/30)

Si trovino i domini di convergenza delle serie di potenze

$$R_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(z+1)^{k+1}}, \qquad R_2(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+3)^k}{6^{k+1}},$$

si dimostri, quindi, che sono l'una la continuazione analitica dell'altra.

Soluzione 3

Entrambe possono essere ricondotte a delle serie geometriche. Per la $R_1(z)$ si ha

$$R_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(z+1)^{k+1}} = \frac{1}{z+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}}{(z+1)^k} = \frac{1}{z+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z+1} \right)^k,$$

quindi il dominio di convergenza è

$$\frac{4}{|z+1|} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad D_1 = \{z : |z+1| > 4\}.$$

Mentre per la seconda

$$R_2(z) = -\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z+3}{6} \right)^k,$$

per cui il dominio di convergenza è

$$\frac{|z+3|}{6} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad D_2 = \{z : |z+3| < 6\}.$$

L'intersezione dei due domini è $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, mentre l'unione $D_1 \cap D_2 = \{z : z \neq 3\}$. La somma delle due coincide e la funzione è

$$f(z) = \frac{1}{z-3}.$$

Esercizio 4 (punteggio 6/30)

Si consideri l'operatore

$$\hat{O} = \oint_{\gamma} f(z) \left(z\hat{I} - \hat{A} \right)^{-1} dz,$$

dove: $f(z)$ è una funzione analitica in un dominio semplicemente connesso D di frontiera $\partial D = \gamma$, $\hat{A}$ è un operatore normale ed $\hat{I}$ è l'operatore identità in uno spazio di Hilbert a N dimensioni E_N. Si dimostri che $\hat{A}$ ed $\hat{O}$ hanno gli stessi autovettori e si trovi la relazione tra gli insiemi di autovalori assumendo che quelli di $\hat{A}$ non appartengano alla curva γ.

Soluzione 4

L'operatore $\hat{O}$ si ottiene come funzione di $\hat{A}$, ovvero $\hat{O} = \hat{F}(\hat{A})$, con

$$F(w) = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Poiché $\hat{A}$ è diagonalizzabile, essendo normale, e la funzione $F(w)$ è analitica nell'intorno di ogni autovalore dello stesso operatore $\hat{A}$ (nessuno di questi appartiene a γ), vale il teorema spettrale e quindi la rappresentazione

$$\hat{O} = \sum_{k=1}^{N} F(\lambda_k)\hat{P}_k\,,$$

dove gli operatori dell'insieme $\{\hat{P}_k\}_{k=1}^{N}$ sono proiettori ortogonali dello spettro di $\hat{A}$, cioè

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \hat{P}_k\,.$$

Segue banalmente che i due operatori hanno gli stessi autovettori. Sfruttando la formula integrale di Cauchy, gli autovalori di $\hat{O}$ sono

$$F(\lambda_k) = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\lambda_k}\,dz = \begin{cases} 2i\pi f(\lambda_k) & \lambda_k \in D \\ 0 & \lambda_k \notin D \end{cases}\,.$$

Esercizio 5 (punteggio 5/30)

Sia $\hat{D}_x$ un operatore differenziale normale, definito in $L^2(a,b)$, con autofunzioni $\{e_k(x)\}_{k=1}^{N}$ e autovalori $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$. Si dimostri che la funzione di Green dell'operatore

$$\hat{L}_x = \alpha\,\hat{D}_x - \hat{I}\,,$$

dove α è una costante arbitraria, tale che $1/\alpha$ non coincida con nessuno degli autovalori, è

$$G(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_k(x)e_k^*(y)}{\alpha\,\lambda_k - 1}\,.$$

Soluzione 5

L'equazione generica è

$$\hat{L}_x f(x) = r(x)\,,$$

con $f(x), r(x) \in L^2(a,b)$, rispettivamente, funzione incognita e di input. Usando la base data, entrambe possono essere decomposte come

$$f(x) = f^k e_k(x)\,, \qquad f^k = (e_k, f) = \int_a^b e_k^*(x) f(x)\,dx\,,$$
$$r(x) = r^k e_k(x)\,, \qquad r^k = (e_k, r) = \int_a^b e_k^*(x) r(x)\,dx\,.$$

Usando queste scomposizioni e scrivendo esplicitamente le somme, l'equazione diventa

$$\hat{L}_x f(x) = \sum_{k=1}^{N} (\alpha\lambda_k - 1)\, f^k e_k(x) = \sum_{k=1}^{N} r^k e_k(x)\,,$$

da cui si ottengono i coefficienti di Fourier della funzione incognita

$$f^k = \frac{r^k}{\alpha\lambda_k - 1}, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, N\}$$

e la soluzione è

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} f^k e_k(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{r^k e_k(x)}{\alpha\lambda_k - 1}.$$

Usando, in questa espressione, la definzione dei coefficienti r_k si ha

$$f(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^{N} \frac{e_k^*(y) e_k(x)}{\alpha\lambda_k - 1} r(y) dy.$$

Ma, dal confronto con la definzione della funzione di Green

$$f(x) = \int_a^b G(x,y) r(y) dy,$$

si ottiene il risultato cercato, ovvero

$$G(x,y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{e_k(x) e_k^*(y)}{\alpha\lambda_k - 1}.$$

Inoltre, data una generica $g(x) \in L^2(a,b)$, con $g(x) = g^k e_k(x)$ e $g^k = (e_k, g)$, avremo

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(y) \hat{L}_x G(x,y) dy &= \int_a^b \sum_{k=1}^{N} \frac{e_k^*(y) g(y)}{\alpha\lambda_k - 1} \hat{L}_x e_k(x) dy \\
&= \int_a^b \sum_{k=1}^{N} \frac{e_k^*(y) g(y)}{\alpha\lambda_k - 1} \hat{(}\alpha\lambda_k - 1) e_k(x) dy \\
&= \sum_{k=1}^{N} e_k(x) \int_a^b e_k^*(y) g(y) dy \\
&= \sum_{k=1}^{N} e_k(x) g^k = g(x),
\end{aligned}$$

da cui l'identità formale

$$\hat{L}_x G(x,y) = \delta(x-y).$$

Esercizio 6 (punteggio 6/30)

Dopo aver discusso le proprietà della matrice 4×4

$$A = \begin{pmatrix} \alpha\,\sigma_3 & 0 \\ 0 & \beta\,\sigma_1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha\beta \neq 0,$$

dove σ_1 e σ_3 sono la prima e la terza matrice di Pauli, si determini la sua rappresentazione spettrale.

SOLUZIONE 6

Le matrici di Pauli sono hermitiane, quindi la matrice A, essendo diagonale a blocchi, è hermitiana se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. In ogni caso è normale, infatti

$$[A, A^\dagger] = \begin{pmatrix} [\alpha\,\sigma_3, \alpha^*\sigma_3] & 0 \\ 0 & [\beta\,\sigma_1, \beta^*\sigma_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2[\sigma_3, \sigma_3] & 0 \\ 0 & |\beta|^2[\sigma_1, \sigma_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le matrici di Pauli hanno tutte la stessa coppia di autovalori $s_{1,2} = \pm 1$, quindi, mantenendo la notazione a blocchi, possiamo scrivere l'equazione agli autovalori come

$$A u_k = \lambda_k u_k\,, \qquad k = 1, 2, 3, 4\,,$$

con autovalori: $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = -\alpha$, $\lambda_3 = \beta$, $\lambda_4 = -\beta$, e autovettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

dove i vettori 2×1, $a_{1,2}$ e $b_{1,2}$ sono autovettori della terza e della prima matrice di Pauli, ovvero $\sigma_3 a_{1,2} = \pm a_{1,2}$ e $\sigma_1 b_{1,2} = \pm b_{1,2}$. In particolare

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

I proiettori P_k hanno elementi

$$(P_k)_{mn} = (u_k^*)_m (u_k)_n\,, \qquad k, m, n \in \{1, 2, 3, 4\}\,.$$

Infine, la rappresentazione spettrale completa è

$$A = \sum_{k=1}^{4} \lambda_k P_k$$

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$