Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 giugno 2014

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)

Sia

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha)}{\left[1+z\cos(\alpha)\right]^2}\, d\alpha$$

la rappresentazione integrale della funzione $F(z)$. Si determinino: l'espressione analitica di $F(z)$, il domini di convergenza della rappresentazione integrale e quello di analiticità di $F(z)$.

Soluzione 1

Il dominio di convergenza dell'integrale si ottiene richiedendo che l'integranda non abbia singolarità nel percorso di integrazione. Procediamo individuando tali singolarità, che si avranno per tutti i valori di z che verificano l'equazione

$$z = -\frac{1}{\cos(\alpha)}\,,$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$. Ovvero, si hanno poli per $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, quindi il dominio di convergenza dell'integrale è rappresentato da tutto il piano complesso con i due tagli $(-\infty, -1]$ e $[1, \infty)$.
Riscriviamo l'integrale facendo la sostituzione $w = e^{i\alpha}$, così da ottenere come integranda una funzione razionale e come percorso d'integrazione la circonferenza unitaria, ovvero

$$F(z) = -2i \oint_{|w|=1} \frac{1+1/w^2}{(2+zw+z/w)^2} dw = -2i \oint_{|w|=1} \frac{w^2+1}{(zw^2+2w+z)^2} dw\,.$$

L'integranda ha i due poli doppi

$$w_{1,2} = -\frac{1}{z} \pm \sqrt{1/z^2-1}$$

e, scegliendo $z \in (0,1)$, si hanno

$$|w_1| < 1\,, \qquad |w_2| > 1\,.$$

In generale i poli verificano l'identità: $w_1 w_2 = 1$ e, se $z \neq \pm 1$, $w_1 \neq w_2$, per cui uno solo dei poli cade nel cerchio unitario. L'integrale si risolve usando il teorema dei residui

$$F(z) = 2i\pi\,\mathrm{Res}[w = w_1] = 4\pi \lim_{w\to w_1} \frac{d}{dw}\frac{w^2+1}{z^2(w-w_2)^2} = -\frac{8\pi}{z^2}\frac{w_1 w_2+1}{(w_1-w_2)^3} = -\frac{2\pi}{z^2}\frac{1}{(1/z^2-1)^{3/2}}$$

$$F(z) = -2\pi \frac{z}{(1-z^2)^{3/2}}\,.$$

Il dominio di analiticità coincide con quello della rappresentazione integrale. In particolare, nei due punti di diramazione, $z = \pm 1$, si hanno poli semplici. È interessante osservare che la funzione può assumere valori finiti (anche se non unici vista la polidromia) anche per $z \in (\infty, -1) \cup (1, \infty)$, ovvero nella regione singolare della rappresentazione.

Esercizio 2 (5 punti)

Usando il teorema dell'indice si dimostri che non esiste alcuna funzione $f(z)$, analitica in $D = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-2,2]\}$, tale che

$$[f(z)]^n = z^2 + z - 1\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Soluzione 2

Si procede verificando che, se la funzione $f(z)$ esistesse, avremmo

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{n}\frac{2z+z}{z^2+z-1}\,.$$

Integrato su una circonferenza, γ_3, centrata nell'origine e di raggio $r = 3$, si ha

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{n}\frac{1}{2i\pi}\oint_{\gamma_3}\frac{2z+z}{z^2+z-1}dz\,,$$
$$m = \frac{2}{n}\,,$$

con $m \in \mathbb{Z}$, pari alla differenza tra il numero di zeri e quello di poli, contati con le loro molteplicità, della funzione $f(z)$ (il risultato si ottiene osservando che l'integranda del membro di destra ha i due poli semplici $z_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$, entrambi interni alla circonferenza γ_3). Nei casi con $n > 2$ l'identità è assurda. L'unica possibilità risulta essere quella con $n = 2$ e $m = 1$, ovvero la funzione $f(z)$, non avendo poli (è analitica in D), ha uno zero semplice in $[-2,2]$. Ma, in questo caso $[f(z)]^2$ avrebbe, nello stesso punto, un zero doppio e lo stesso deve valere anche per il polinomio $z^2 + z - 1$, che coincide con $[f(z)]^2$, ma ciò è assurdo, poiché il polinomio ha due zeri semplici distinti.

Esercizio 3 (5 punti)

Data la funzione

$$f(z) = \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{z}\,,$$

con $a > 0$, si determinino le serie di Laurent di centro $z = 0$ nelle corone $C_1 = \{z : 0 < |z| < a\}$ e $C_2 = \{z : |z| > a\}$.
Suggerimento: si può usare lo sviluppo in serie della funzione $g(x) = \sqrt{1+x}$.

Soluzione 3

Lo sviluppo in serie di $g(x) = \sqrt{1+x}$ nell'origine è

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^k g}{dx^k}(0)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,,$$

con

$$c_0 = \frac{d^0 g}{dx^0}(0) = 1\,, \qquad c_1 = \frac{dg}{dx}(0) = \frac{1}{2}$$

e, per $k \geq 2$,

$$c_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k g}{dx^k}(0) = \frac{1}{k!}\frac{1}{2}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2k-3}{2}\right)(1+x)^{-(2k-1)/2}\bigg|_{x=0} = (-1)^{k-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2\cdot 4\cdots 2k}\,.$$

Il raggio di convergenza è $R = 1$. La funzione $f(z)$, posto $w = z/a$, diventa

$$f(z) = \frac{\sqrt{(z/a)^2 + 1}}{z/a} = \frac{\sqrt{w^2+1}}{w},$$

che, nella corona C_1, verifica la condizione di convergenza della serie precedente. Infatti, per $0 < |z| < a$ si ha $0 < |w| < 1$, quindi

$$f(z) = \frac{\sqrt{w^2+1}}{w} = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{a^{2k-1}} z^{2k-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n,$$

con

$$C_n = \begin{cases} a & n = -1 \\ \dfrac{1}{2a} & n = 1 \\ (-1)^{k-1}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2\cdot 4\cdots 2k}\dfrac{1}{a^{2k-1}} & n = 2k-1,\ k\in\mathbb{N} \text{ et } k\geq 2 \\ 0 & n<-1 \text{ et } n = 2(m-1),\ \forall\, m\in\mathbb{N} \end{cases}.$$

Nel caso in cui $|z| > a$, corona C_2, si ha $|w| > 1$ e

$$f(z) = \sqrt{1+1/w^2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1/w^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^{2k} z^{-2k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n,$$

con

$$B_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \dfrac{a^2}{2} & n = -2 \\ (-1)^{k-1}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2k-3)}{2\cdot 4\cdots 2k} a^{2k} & n = -2k,\ k\in\mathbb{N} \text{ et } k\geq 2 \\ 0 & n>0 \text{ et } n = -2m+1,\ \forall\, m\in\mathbb{N} \end{cases}.$$

Esercizio 4 (5 punti)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x\,\cos(x+a)}{x^2+b^2},$$

con $a, b > 0$.

Soluzione 4

Possiamo sfruttare la proprietà

$$\mathscr{F}_k\left[f(x)e^{iax}\right] = \mathscr{F}_{k-a}\left[f(x)\right] = \tilde{f}(k-a).$$

La trasformata di Fourier della parte razionale è

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\frac{x}{x^2+b^2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+b^2}e^{-ikx}dx \\
&= \theta(k)(-i\sqrt{2\pi})\frac{-ib}{-2ib}e^{-kb} + \theta(-k)(i\sqrt{2\pi})\frac{ib}{2ib}e^{kb} \\
&= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{segno}(k)\,e^{-|k|b}\,.
\end{aligned}$$

Infine si ha

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k[f] &= \frac{1}{2}\mathscr{F}_k\left[\frac{x}{x^2+b^2}e^{i(x+a)}\right] + \frac{1}{2}\mathscr{F}_k\left[\frac{x}{x^2+b^2}e^{-i(x+a)}\right] \\
&= \frac{e^{ia}}{2}\mathscr{F}_{k-1}\left[\frac{x}{x^2+b^2}\right] + \frac{e^{-ia}}{2}\mathscr{F}_{k+1}\left[\frac{x}{x^2+b^2}\right] \\
&= -i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[e^{ia-|k-1|b}\text{segno}(k-1) + e^{-ia-|k+1|b}\text{segno}(k+1)\right].
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (5 punti)

Nello spazio vettoriale metrico della matrici complesse $n\times n$, $M(n\times n)$ $(n\in\mathbb{N})$, con prodotto scalare

$$(A,B) = \frac{1}{n}\text{Tr}\left(A^\dagger B\right),$$

$\forall A,B\in M(n\times n)$, data una matrice C si definisce l'operatore lineare $\hat{C}$ in modo tale che, $\forall A\in M(n\times n)$,

$$\hat{C}A = B = [C,A]\in M(n\times n).$$

Si mostri che l'operatore è hermitiano se la matrice C è hermitiana.
Si trovino, inoltre, autovalori e autovettori matriciali nel caso $n=2$ e

$$C = \sigma_1 + \sigma_2,$$

dove le σ_j, con $j=1,2,3$, sono le matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione 5

Per dimostrare l'hermitianità dell'operatore come conseguenza di quella della matrice C, si procede come segue: sia $C=C^\dagger$, allora, $\forall A,B\in M(n\times n)$

$$\begin{aligned}
(A,\hat{C}B)^* &= \frac{1}{n}\text{Tr}\left(A^\dagger[C,B]\right)^* = \frac{1}{n}\text{Tr}\left(A^\dagger CB - A^\dagger BC\right)^* = \frac{1}{n}\text{Tr}\left((A^\dagger CB)^\dagger - (A^\dagger BC)^\dagger\right) = \frac{1}{n}\text{Tr}\left(B^\dagger C^\dagger A - C^\dagger B^\dagger A\right) \\
&= \frac{1}{n}\text{Tr}\left(B^\dagger C^\dagger A - B^\dagger AC^\dagger\right) = \frac{1}{n}\text{Tr}\left(B^\dagger[C^\dagger,A]\right) = \frac{1}{n}\text{Tr}\left(B^\dagger[C,A]\right) = (B,\hat{C}A),
\end{aligned}$$

quindi $\hat{C}$ è hermitiano.
L'equazione agli autovalori può essere scritta come

$$\hat{C}A = \alpha A,$$

dove α ed A sono l'autovalore e l'autovettore relativo. Poiché l'insieme delle tre matrici di Pauli e l'identità, che chiameremo σ_0, rappresenta una base dello spazio vettoriale delle matrici complesse 2×2, abbiamo che, in generale,

$$A = \sum_{k=0}^{3} a_k \sigma_k \,,$$

dove l'insieme $\{a_k\}_{k=0}^{3} \in \mathbb{C}$ contiene le componenti di A rispetto alla base $\{\sigma_k\}_{k=0}^{3}$. Usando questa decomposizione nell'equazione agli autovalori si ha

$$\begin{aligned}\hat{C}A = \sum_{k=0}^{3} a_k \left[\sigma_1 + \sigma_2, \sigma_k\right] = \sum_{k=0}^{3} a_k \left[\sigma_1, \sigma_k\right] + \sum_{k=0}^{3} a_k \left[\sigma_2, \sigma_k\right] &= \alpha \sum_{k=0}^{3} a_k \sigma_k \\ 2i\left[a_3\sigma_1 - a_3\sigma_2 + (a_2 - a_1)\sigma_3\right] &= \alpha \sum_{k=0}^{3} a_k \sigma_k \,,\end{aligned}$$

da cui, uguagliando i coefficienti delle stesse matrici della base,

$$\left\{\begin{aligned} \alpha a_0 &= 0 \\ \alpha a_1 - 2ia_3 &= 0 \\ \alpha a_2 + 2ia_3 &= 0 \\ 2ia_1 - 2ia_2 + \alpha a_3 &= 0 \end{aligned}\right. .$$

Si ha, cioè, un sistema omogeneo per i coefficienti a_k. Gli autovalori, come al solito, si ottengono dell'equazione secolare

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -2i \\ 0 & 0 & \alpha & 2i \\ 0 & 2i & -2i & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2\left[\alpha^2 - 8\right] = 0 \,,$$

e sono

$$\alpha_{1,2} = \pm 2\sqrt{2} \,, \qquad \alpha_{3,4} = 0 \,.$$

L'autovalore nullo è degenere di ordine due. Calcoliamo i primi due autovettori, quelli con autovalori $\alpha_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$. Poniamo $a_1^{(1,2)} = 1$ (l'apice tra parentesi indica l'autovalore), avremo sempre $a_0^{(1,2)} = 0$ e

$$a_3^{(1,2)} = \frac{\alpha}{2i} = \mp i\sqrt{2} \,, \qquad a_2^{(1,2)} = -2i\frac{a_3}{\alpha} = \mp\frac{2\sqrt{2}}{\pm 2\sqrt{2}} = -1 \,.$$

Per gli ultimi due autovettori, ovvero quelli relativi all'autovalore nullo, si hanno le condizioni

$$a_0^{(3,4)} = \text{arbitrario} \,, \qquad a_1^{(3,4)} = \text{arbitrario} \,, \qquad a_2^{(3,4)} = a_1^{(3,4)} \,, \qquad a_3^{(3,4)} = 0 \,.$$

Potremmo scegliere $a_0^{(3)} = 1$, $a_1^{(3)} = a_2^{(3)} = 0$ e $a_0^{(4)} = 0$, $a_1^{(4)} = a_2^{(4)} = 1$. Quindi, normalizzando, si hanno

$$\begin{aligned} \vec{a}^{(1)} &= (a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}) = \frac{1}{2}(0, 1, -1, -i\sqrt{2}) \,, \\ \vec{a}^{(2)} &= (a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}) = \frac{1}{2}(0, 1, -1, +i\sqrt{2}) \,, \\ \vec{a}^{(3)} &= (a_0^{(3)}, a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}) = (1, 0, 0, 0) \,, \\ \vec{a}^{(4)} &= (a_0^{(4)}, a_1^{(4)}, a_2^{(4)}, a_3^{(4)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0) \,. \end{aligned}$$

In definitiva, in notazione quadri-vettoriale, con $\vec{\sigma} = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, i quattro autovettori possono essere dati nella forma

$$A_k = \vec{a}^{(k)} \cdot \vec{\sigma}\,, \qquad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Esercizio 6 (6 punti)

Si risolva l'equazione integrale

$$f(x) = \lambda \int_0^{2\pi} dy\, f(y) \int_{-\infty}^{\infty} dw\, \delta[w^2 - (x+y)^2]\, w\, e^{iw} + \mathrm{sen}(x)\,.$$

Soluzione 6

La delta di Dirac di argomento $g(w) = w^2 - (x+y)^2$ può essere riscritta come somma di due delta in ciascuno degli zeri della funzione $g(w)$, $w_{1,2} = \pm(x+y)$, ovvero

$$\delta[w^2 - (x+y)^2] = \sum_{k=1}^{2} \frac{\delta(w - w_k)}{|dg/dw|_{w=w_k}} = \frac{\delta(w - x - y) + \delta(w + x + y)}{2|w|}\,.$$

Quindi, considerando $x \geq 0$, da cui anche $x + y \geq 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} dw\, \delta[w^2 - (x+y)^2]\, w\, e^{iw} = \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2} = i\,\mathrm{sen}(x+y)\,.$$

L'equazione integrale diventa

$$f(x) = i\lambda \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(x+y) f(y) dy + \mathrm{sen}(x)$$

ed è un'equazione integrale di Fredholm di secondo tipo con nucleo separabile. Infatti, posto

$$\begin{array}{ll} M_1(x) = \mathrm{sen}(x) \qquad & N_1(x) = \cos(x) \\ M_2(x) = \cos(x) \qquad & N_2(x) = \mathrm{sen}(x) \end{array}\,,$$

si ha

$$f(x) = i\lambda \sum_{j=1}^{2} M_j(x) \int_0^{2\pi} N_j(y) f(y) dy + \mathrm{sen}(x)\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per $N_k(x)$ e integrando, si ottiene il sistema lineare

$$C_k = i\lambda \sum_{j=1}^{2} A_{kj} C_j + B_k\,, \qquad k = 1, 2\,,$$

con

$$C_k = \int_0^{2\pi} N_k(x) f(x) dx\,, \qquad A_{kj} = \int_0^{2\pi} N_k(x) M_j(x) dx\,, \qquad B_k = \int_0^{2\pi} N_k(x) \mathrm{sen}(x) dx\,.$$

In forma matriciale possiamo scrivere

$$(I - i\lambda A) C = B$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -i\lambda\pi \\ -i\lambda\pi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix},$$

da cui, con $\lambda \neq \pm i/\pi$, si ha

$$C_1 = \frac{i\lambda\pi^2}{1+\lambda^2\pi^2}\,, \qquad C_2 = \frac{\pi}{1+\lambda^2\pi^2}\,,$$

Infine, la soluzione $f(x)$, si ottiene come

$$f(x) = i\lambda \sum_{k=1}^{2} M_k(x) C_k + \operatorname{sen}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x) + i\lambda\pi\cos(x)}{1+\lambda^2\pi^2}\,.$$