Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 giugno 2013

Si svolgano cortesemente i seguenti esercizi.

Esercizio 1 (6 punti)
Si calcoli l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(bx)e^{-\pi x}}{\operatorname{senh}(\pi x)}dx = \operatorname{Im}\left[\int_0^\infty \frac{e^{ibx}\,e^{-\pi x}}{\operatorname{senh}(\pi x)}dx\right],$$

con $b \in \mathbb{R}$.

. . . .

Soluzione
L'integrale può essere riscritto come

$$I = 2\operatorname{Im}\left[\int_0^\infty \frac{e^{ibx}}{e^{2\pi x}-1}dx\right] = \operatorname{Im}\left[\int_0^\infty f(x)dx\right].$$

La funzione integranda ha infiniti poli semplici

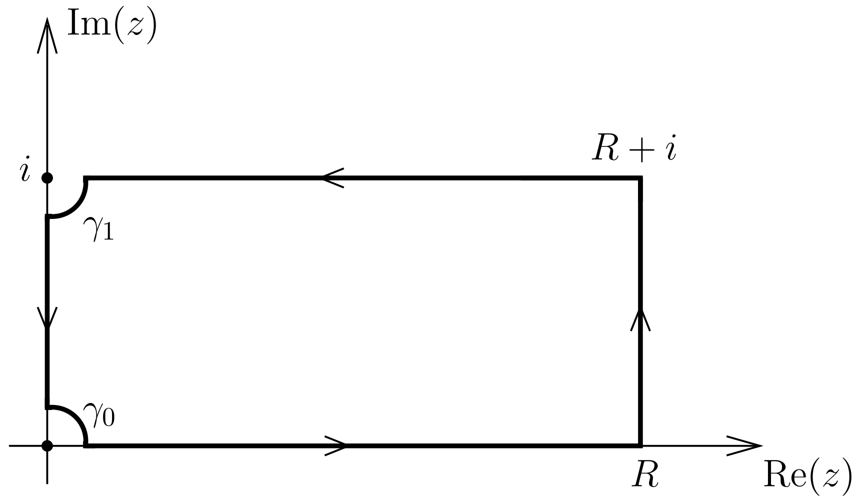
$$z_k = i\,k\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Il polo nell'origine è eliminabile, infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(bx)e^{-\pi x}}{\operatorname{senh}(\pi x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(bx)}{\operatorname{senh}(\pi x)} = \frac{b}{\pi}\,.$$

Consideriamo il cammino d'integrazione chiuso, mostrato in figura, percorso in senso antiorario,

$$C = [\epsilon, R] \cup [R, R+i] \cup (-[\epsilon+i, R+i]) \cup (-\gamma_1) \cup (-[i\epsilon, (1-\epsilon)i]) \cup (-\gamma_0)\,,$$



che non contiene poli. Con γ_0 e γ_1 abbiamo indicato gli archi infinitesimi, percorsi in senso antiorario, di raggio $\epsilon \to 0$, centrati rispettivamente nell'origine e in $z = i$, con angolo sotteso pari a $\pi/2$ e disposti come in figura. I segni meno nella definizione del cammino C indicano il verso i percorrenza opposto a quanto indicato, ad esempio $-[z_a, z_b]$ indica il segmento di estremi z_a e z_b percorso da z_b a z_a. Di conseguenza si ha

$$\oint_C f(z)dz = 0\,.$$

Gli integrali sui due tratti orizzontali, nei limiti: $\epsilon \to 0$ e $R \to \infty$, si riconducono all'integrale iniziale, infatti

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{[\epsilon,R]} f(z)dz = I\,,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{R\to\infty}\int_{-[\epsilon+i,R+i]} f(z)dz = -e^{-b}I\,.$$

Invece, l'integrale sul tratto verticale con parte reale uguale R è infinitesimo al divergere dello stesso valore di R. Posto $z = R + i\,y$, si ha

$$\left|\int_{[R,R+i]} f(z)dz\right| = \left|\int_0^1 f(R+iy)\,dy\right| \le \left|\frac{2e^{ibR}}{e^{2\pi R}}\int_0^1 \frac{e^{-by}\,dy}{e^{2i\pi y} - e^{-2\pi R}}\right| \le 2e^{-2\pi R}\,\frac{\max\{1, e^{-b}\}}{1 - e^{-2\pi R}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Infine, il contributo del tratto verticale con parte reale nulla è

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left[\int_{-[i\epsilon,(1-\epsilon)i]} f(z)dz\right] &= 2\,\mathrm{Im}\left[-i\int_\epsilon^{1-\epsilon}\frac{e^{-by}}{e^{2i\pi y}-1}dy\right] \\
&= 2\,\mathrm{Im}\left[-\int_\epsilon^{1-\epsilon}\frac{e^{-by}e^{-i\pi y}}{2\,\mathrm{sen}\,(\pi y)}dy\right] \\
&= \int_\epsilon^{1-\epsilon} e^{-by}dy \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1-e^{-b}}{b}\,.
\end{aligned}$$

L'integrale sull'arco infinitesimo intorno all'origine, γ_0, vale

$$\mathrm{Im}\left[\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\gamma_0} f(z)dz\right] = \mathrm{Im}\left[-i\,\frac{\pi}{2}\lim_{\epsilon\to 0} z\,f(z)\right] = \mathrm{Im}\left[-\frac{i}{2}\right] = -\frac{1}{2}\,.$$

Per quello intorno a $z = i$ si ha invece

$$\mathrm{Im}\left[\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\gamma_1} f(z)dz\right] = \mathrm{Im}\left[-i\,\frac{\pi}{2}\lim_{\epsilon\to 0}(z-i)\,f(z)\right] = \mathrm{Im}\left[-\frac{i}{2}e^{-b}\right]\,. = -\frac{e^{-b}}{2}$$

Quindi, l'integrale finale I si ottiene come

$$0 = I\,\left(1-e^{-b}\right) + \frac{1-e^{-b}}{b} - \frac{1+e^{-b}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad I = -\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\frac{1+e^{-b}}{1-e^{-b}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{2}\coth\left(\frac{b}{2}\right)\,.$$

. . . .

Esercizio 2 (5 punti)
Si calcoli l'integrale

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3(x-a)}{(x-a)^3} dx \,,$$

con $a \in \mathbb{R}$.

. . . .

Soluzione
Facciamo la sostituzione $z = x - a$, l'integrale diventa

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3(z)}{z^3} dz \,.$$

L'origine è una singolarità eliminabile, consideriamo il percorso

$$\Gamma = (-\infty, -\epsilon) \cup (-\gamma_\epsilon) \cup (\epsilon, \infty) \cup \gamma_R \,,$$

con $\gamma_\epsilon = \{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\}$ e $\gamma_R = \{z : z = Re^{i\theta}, \theta \in [0,\pi]\}$, si ha allora

$$J = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}^3(z)}{z^3} dz = -\frac{1}{8i} \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Gamma \frac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)^3}{z^3} dz \,.$$

Gli unici termini del cubo a numeratore che sopravvivono sono quelli che hanno esponenziali con coefficienti minori o uguali a zero, in quanto, solo chiudendo nel semipiano negativo si include l'unica singolarità, l'origine, quindi

$$\begin{aligned} J = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Gamma \frac{\operatorname{sen}^3(z)}{z^3} dz &= -\frac{1}{8i} \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \int_\Gamma \frac{3e^{-iz} - e^{-3iz}}{z^3} dz \,. \\ &= -\frac{1}{8i} \frac{-2i\pi}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[3e^{-iz} - e^{-3iz}\right]_{z=0} \\ &= \frac{\pi}{8} \left[3(-i)^2 - (-3i)^2\right] = \frac{3\pi}{4} \,. \end{aligned}$$

. . . .

Esercizio 3 (5 punti)
Si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z(1+e^z)^2} \,.$$

. . . .

Soluzione
I poli sono

$$z = 0 \,, \qquad z_k = (2k+1)i\pi \,, \quad k \in \mathbb{Z} \,,$$

l'origine è un polo semplice mentre i punti z_k sono poli doppi. La serie ha, quindi, la forma

$$f(z) = g(z) + \frac{R_0}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{C_{-2}^{(k)}}{(z - z_k)^2} + \frac{C_{-1}^{(k)}}{z - z_k} \right] .$$

Il coefficiente R_0 è semplicemente il residuo nell'origine, ovvero

$$R_0 = \mathrm{Res}[f(z), z = 0] = \frac{1}{4} .$$

I coefficienti $C_{-1}^{(k)}$ e $C_{-2}^{(k)}$ si ottengono dalla definizione dei coefficienti della serie di Laurent, cioè

$$C_{-2}^{(k)} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_k} \frac{f(z)}{(z - z_k)^{-1}} dz = \lim_{z \to z_k} f(z)(z - z_k)^2 = \frac{1}{z_k} = \frac{1}{(2k + 1)i\pi} ,$$

mentre i $C_{-1}^{(k)}$ sono

$$\begin{aligned}
C_{-1}^{(k)} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_k} f(z) dz &= \lim_{z \to z_k} \frac{d}{dz} \, f(z)(z - z_k)^2 \Big|_{z = z_k} \\
&= \lim_{z \to z_k} \frac{2(z - z_k)z(1 + e^z)^2 - (1 + e^z + 2ze^z)(1 + e^z)(z - z_k)^2}{z^2(1 + e^z)^4} \\
&= \lim_{z \to z_k} \frac{2z(1 + e^z) - (1 + e^z + 2ze^z)(z - z_k)}{z^2(1 + e^z)^3}(z - z_k) \\
&= \frac{1}{z_k^2} \lim_{z \to z_k} \frac{2z(1 + e^z) - (1 + e^z + 2ze^z)(z - z_k)}{(1 + e^z)^2} \\
&= \frac{1}{z_k^2} \lim_{z \to z_k} \frac{2(1 + e^z) + 2ze^z - (3e^z + 2ze^z)(z - z_k) - (1 + e^z + 2ze^z)}{2(1 + e^z)} \\
&= \frac{1}{z_k^2} \lim_{z \to z_k} \frac{4e^z + 2ze^z - (5e^z + 2ze^z)(z - z_k) - 3e^z - 2ze^z - 3e^z - 2ze^z}{2e^z} \\
&= \frac{1}{z_k^2} \frac{-4 - 2z_k + 3 + 2z_k + 3 + 2z_k}{-2} \\
&= -\frac{1 + z_k}{z_k^2} .
\end{aligned}$$

Ovviamente, poiché $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, si ha anche $g(z) = 0$ e quindi

$$f(z) = \frac{1}{4z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z_k(z - z_k)^2} - \frac{1 + z_k}{z_k^2(z - z_k)} \right] .$$

Al fine di avere una serie con indici in $\mathbb{N}$, sfruttiamo la seguente relazione tra i poli z_k

$$z_{-k-1} = (-2k - 2 + 1)i\pi = -(2k + 1)i\pi = -z_k ,$$

per riscrivere la serie come

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{4z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z_k(z-z_k)^2} - \frac{1+z_k}{z_k^2(z-z_k)} \right] + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{z_k(z-z_k)^2} - \frac{1+z_k}{z_k^2(z-z_k)} \right] \\
\{k' = -1-k\} &= \frac{1}{4z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{z_k(z-z_k)^2} - \frac{1+z_k}{z_k^2(z-z_k)} \right] + \sum_{k'=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{z_{k'}(z+z_{k'})^2} - \frac{1-z_{k'}}{z_{k'}^2(z+z_{k'})} \right] \\
&= \frac{1}{4z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4zz_k}{z_k(z^2-z_k^2)^2} - \frac{(1+z_k)(z+z_k)+(1-z_k)(z-z_k)}{z_k^2(z^2-z_k^2)} \right] \\
&= \frac{1}{4z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4z}{(z^2-z_k^2)^2} - \frac{2z+2z_k^2}{z_k^2(z^2-z_k^2)} \right] .
\end{aligned}
$$

. . . .

Esercizio 4 (6 punti)
Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(x)\theta(x+1)\theta(1-x)\,,$$

dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside.

. . . .

Soluzione
Applicando la definizione si ha

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \operatorname{sen}^2(x) e^{-ikx} dx \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \left[e^{-ix(k-2)} + e^{-ix(k+2)} - 2e^{-ikx} \right] dx \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-2i \operatorname{sen}(k-2)}{-i(k-2)} + \frac{-2i \operatorname{sen}(k+2)}{-i(k+2)} - 2\frac{-2i \operatorname{sen}(k)}{-ik} \right] \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\operatorname{sen}(k-2)}{(k-2)} + \frac{\operatorname{sen}(k+2)}{(k+2)} - \frac{2 \operatorname{sen}(k)}{k} \right] .
\end{aligned}
$$

. . . .

Esercizio 5 (6 punti)
Dato l'operatore $\hat{A}$, si determini la sua rappresentazione matriciale, A, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, sapendo che

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - iz \\ y \\ ix + z \end{pmatrix} .$$

Inoltre,

- si classifichi la matrice A;
- si calcolino autovalori e autovettori;
- si calcoli la matrice risolvente A_λ.

. . . .

Soluzione
La matrice cercata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

A è una matrice hermitiana, ammette quindi autovettori ortonormali. Gli autovalori si ottengono come radici dell'equazione secolare, ovvero

$$\begin{aligned} \det(A - \alpha I) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & -i \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ i & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-\alpha)^3 + (1-\alpha) &= 0 \\ (1-\alpha)(\alpha^2 - 2\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = 2\,, \qquad \alpha_2 = 1\,, \qquad \alpha_3 = 0\,.$$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

La matrice unitaria che diagonalizza A è

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

La matrice risolvente

$$A_\lambda = (I\lambda - A)^{-1}$$

ha la rappresentazione diagonale

$$A'_\lambda = (I\lambda - A')^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} ,$$

mentre quella rispetto alla base canonica è

$$
\begin{aligned}
A_\lambda &= U A'_\lambda U^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1/\sqrt{2}}{\lambda-2} & 0 & \frac{1/\sqrt{2}}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1} & 0 \\ \frac{i/\sqrt{2}}{\lambda-2} & 0 & -\frac{i/\sqrt{2}}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1/2}{\lambda-2} + \frac{1/2}{\lambda} & 0 & \frac{-i/2}{\lambda-2} + \frac{i/2}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1} & 0 \\ \frac{i/2}{\lambda-2} + \frac{-i/2}{\lambda} & 0 & \frac{1/2}{\lambda-2} + \frac{1/2}{\lambda} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda(\lambda-2)} & 0 & -\frac{i}{\lambda(\lambda-2)} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1} & 0 \\ \frac{i}{\lambda(\lambda-2)} & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda(\lambda-2)} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

. . . .

Esercizio 6 (6 punti)
Per quali valori dei parametri λ, a, b, k e j l'equazione

$$f(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x+y) f(y) dy + a \cos(kx) + b \,\mathrm{sen}\,(jx)$$

ammette soluzione? Si studino le eventuali soluzioni.

. . . .

Soluzione
Il nucleo è separabile e si ha

$$f(x) = \lambda \sum_{k=1}^{2} M_k(x) \int_0^\pi N_k(y) f(y) + \phi(x) ,$$

con

$$
\begin{aligned}
M_1(x) &= \cos(x) , & N_1(x) &= \cos(x) , \\
M_2(x) &= -\,\mathrm{sen}\,(x) , & N_2(x) &= \,\mathrm{sen}\,(x) .
\end{aligned}
$$

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione per $N_l(x)$, con $l = 1, 2$, e, integrando in dx nell'intervallo $(0, \pi)$, si ottengono le due equazioni

$$C_l = \lambda \sum_{k=1}^{2} A_{lk} C_k + B_l , \qquad l = 1, 2 ,$$

con

$$C_l = \int_0^\pi N_l(x) f(x) dx , \qquad A_{lk} = \int_0^\pi N_l(x) M_k(x) dx , \qquad B_l = \int_0^\pi N_l(x) \phi(x) dx .$$

I valori dei coefficienti della matrice A e del vettore B sono:

$$A_{11} = \int_0^\pi M_1(x)N_1(x)dx = \frac{\pi}{2}\,, \qquad A_{12} = \int_0^\pi M_1(x)N_2(x)dx = 0\,,$$

$$A_{21} = \int_0^\pi M_2(x)N_1(x)dx = 0\,, \qquad A_{22} = \int_0^\pi M_2(x)N_2(x)dx = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$B_1 = \int_0^\pi \phi(x)N_1(x)dx = a\frac{k\,\mathrm{sen}\,(k\pi)}{1-k^2} + -bj\frac{1+\cos(j\pi)}{1-j^2}\,,$$
$$B_2 = \int_0^\pi \phi(x)N_2(x)dx = a\frac{1+\cos(k\pi)}{1-k^2} + b\frac{\mathrm{sen}\,(j\pi)}{1-j^2}\,.$$

Le equazioni possono essere poste nella forma matriciale

$$(I - \lambda A)C = B\,,$$

rappresentano, quindi, un sistema lineare. La soluzione è unica se

$$\det(I-\lambda A) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda\pi/2 & 0 \\ 0 & 1+\lambda\pi/2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}\,.$$

Assumendo questa condizione, l'unica soluzione è

$$C_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & 1+\lambda\pi/2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1-\lambda\pi/2 & 0 \\ 0 & 1+\lambda\pi/2 \end{pmatrix}} = B_1\frac{1+\lambda\pi/2}{1-\lambda^2\pi^2/4} = \frac{B_1}{1-\lambda\pi/2}\,,$$

$$C_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1-\lambda\pi/2 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1-\lambda\pi/2 & 0 \\ 0 & 1+\lambda\pi/2 \end{pmatrix}} = B_2\frac{1-\lambda\pi/2}{1-\lambda^2\pi^2/4} = \frac{B_2}{1+\lambda\pi/2}\,.$$

Da cui la funzione soluzione dell'equazione integrale

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda\sum_{k=1}^{2} M_k(x)C_k + \phi(x) \\ &= \frac{\lambda B_1}{1-\lambda\pi/2}\cos(x) + \frac{\lambda B_2}{1+\lambda\pi/2}\sin(x) + a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}\,(jx)\,, \end{aligned}$$

essa rappresenta la forma della soluzione generale nel caso in cui $\lambda \neq \pm\pi/2$. Se, ad esempio, k e j sono interi positivi abbiamo

$$B_1 = a\frac{k\,\mathrm{sen}\,(k\pi)}{1-k^2} + bj\frac{1+\cos(j\pi)}{1-j^2} = bj\frac{1+(-1)^j}{1-j^2}\,,$$
$$B_2 = a\frac{1+\cos(k\pi)}{1-k^2} + b\frac{\mathrm{sen}\,(j\pi)}{1-j^2} = a\frac{1+(-1)^k}{1-k^2}\,.$$

Se, infine $\lambda = 2/\pi$ o $\lambda = -2/\pi$, l'equazione ha infinite soluzioni se e solo se, rispettivamente, $B_1 = 0$ o $B_2 = 0$.