

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA SCRITTA DEL 19 FEBBRAIO 2021

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

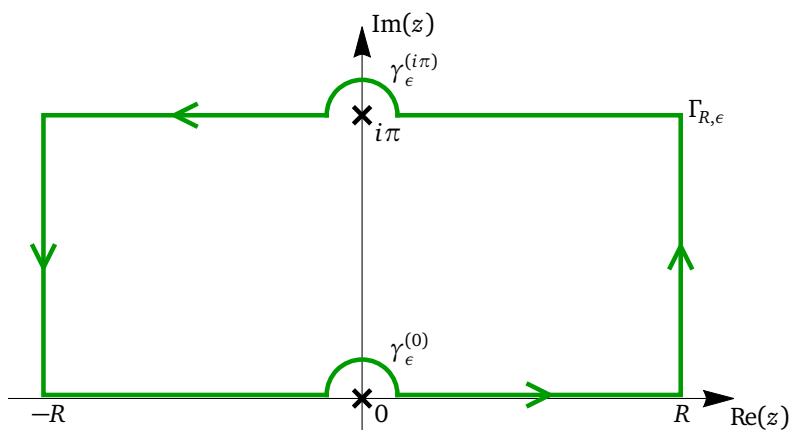
PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx.$$

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

L'origine è una singolarità eliminabile per la funzione integranda, è quindi possibile deformare con continuità il percorso d'integrazione in modo tale che si aggiri l'origine senza cambiare il valore dell'integrale. Consideriamo la deformazione continua: $(-\infty, \infty) \rightarrow L_\infty \equiv (-\infty, -\epsilon] \cup (-\gamma_\epsilon^{(0)}) \cup [\epsilon, \infty)$, nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, dove $\gamma_\epsilon^{(0)}$ è l'arco di circonferenza centrato nell'origine, che sottende un angolo di π radianti ed è immerso nel semipiano delle parti immaginarie non negative, si faccia riferimento alla figura in cui è rappresentato in verde il percorso $L_{R,\epsilon}$, tale che: $L_{R,\epsilon} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} L_\infty$.



Avremo:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{L_\infty} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \underbrace{\int_{-\gamma_\epsilon^{(0)}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz}_{\rightarrow 0} \right)$$

$$A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx \right),$$

L'annullamento dell'integrale sull'arco $\gamma_\epsilon^{(0)}$ nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ segue dal risultato

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{z^3}{\sinh(z)} z \stackrel{U.}{=} 0,$$

per valori di z appartenenti all'arco. Quest'ultimo si dimostra verificando che il modulo della funzione di cui si sta calcolando il limite, sempre per valori z appartenenti all'arco, cioè tali che $z = |\epsilon|e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, \pi]$, sia un infinitesimo nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, indipendentemente dal valore della fase θ . A tal fine consideriamo la maggiorazione del modulo della funzione $z^4/\sinh(z)$ nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, ovvero $z \rightarrow 0$ e sfruttando gli sviluppi in serie di Taylor dell'esponenziale, si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^4}{\sinh(z)} \right| &= \left| \frac{z^4}{z + z^3/3! + z^5/5! + O(z^7)} \right| = \left| \frac{z^3}{1 + z^2/3! + z^4/5! + O(z^6)} \right| \\ &= \epsilon^3 \left| 1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6) \right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + O(z^6) \right)^2 + \dots \right| = O(\epsilon^3), \quad \epsilon \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Consideriamo il percorso chiuso $\Gamma_{R,\epsilon}$ mostrato in verde nella figura a pagina 1. Esso è composto dall'unione di 6 tratti rettilinei e 2 archi. Due dei tratti rettilinei, $[-R+i\pi, -R]$ e $[R, R+i\pi]$, sono paralleli all'asse immaginario, mentre gli altri, $[-R, -\epsilon]$, $[\epsilon, R]$, $[R+i\pi, \epsilon+i\pi]$ e $[-\epsilon+i\pi, -R+i\pi]$, sono paralleli all'asse reale, dove è stato usato il simbolo $[z_1, z_2]$ per indicare il segmento rettilineo con estremi z_1 e z_2 , orientato da z_1 a z_2 . I due archi $\gamma_\epsilon^{(0)}$ e $\gamma_\epsilon^{(i\pi)}$ sono centrati rispettivamente nell'origine e in $z = i\pi$, e sottintendono lo stesso angolo, che da 0 a π radianti.

L'integrale su $\Gamma_{R,\epsilon}$ della funzione integranda data può essere calcolato usando il teorema dei residui, poiché il percorso avvolge la sola singolarità in $z = i\pi$, evidenziata dal simbolo "x" nella figura a pagina 1, avremo

$$\oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz = 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{z^3}{\sinh(z)}, i\pi \right] = 2i\pi (i\pi)^3 \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{z-i\pi}{\sinh(z)} = 2\pi^4 \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{1}{\cosh(z)} = -2\pi^4,$$

ovviamente, questo risultato è indipendente da R e da ϵ , purché si abbiano le limitazioni $R > \epsilon$ e $\epsilon < \pi$, che sono del tutto naturali, anche alla luce dei valori limite che si vogliono studiare.

In termini dei contributi dei tratti rettilinei e degli archi che costituiscono il percorso chiuso $\Gamma_{R,\epsilon}$, si ha

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz &= \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{-\gamma_\epsilon^{(0)}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz \\ &\quad + \int_R^{\epsilon} \frac{(x+i\pi)^3}{-\sinh(x)} dx + \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{(x+i\pi)^3}{-\sinh(x)} dx + \int_{\gamma_\epsilon^{(i\pi)}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz \\ &\quad + i \int_0^\pi \frac{(R+iy)^3}{\sinh(R+iy)} dy + i \int_\pi^0 \frac{(-R+iy)^3}{\sinh(-R+iy)} dy \\ &= \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{-\gamma_\epsilon^{(0)}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz \\ &\quad + \int_{\epsilon}^R \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{3(i\pi)^2 x}{\sinh(x)} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{3(i\pi)^2 x}{\sinh(x)} dx + \int_{\gamma_\epsilon^{(i\pi)}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz \\ &\quad + i \int_0^\pi \frac{(R+iy)^3}{\sinh(R+iy)} dy + i \int_\pi^0 \frac{(-R+iy)^3}{\sinh(-R+iy)} dy, \end{aligned}$$

dove gli integrali a secondo membro della prima riga contengono i contributi dei percorsi sull'asse reale e dell'arco centrato nell'origine; quelli della seconda riga, i contributi dei rimanenti tratti orizzontali e dell'arco centrato in $z = i\pi$; quelli della terza riga, i contributi dei tratti verticali. Non abbiamo considerato i termini con le potenze pari di x del cubo del binomio $(x+i\pi)$, poiché danno contributo nullo, infatti, in questi casi, la funzione integranda è

dispari. Facciamo i limiti $R \rightarrow \infty$ e $\epsilon \rightarrow 0^+$, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx}_{=A} \right) \\
&+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{x^3}{\sinh(x)} dx}_{=A} \right) \\
&- 3\pi^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{x}{\sinh(x)} dx}_{=A_1} \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{\gamma_{\epsilon}^{(i\pi)}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz}_{=i\pi(i\pi^3)=-\pi^4} \\
&+ i \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{(R+iy)^3}{\sinh(R+iy)} dy + \int_{\pi}^0 \frac{(-R+iy)^3}{\sinh(-R+iy)} dy}_{=0} \right) \\
&= 2A - 3\pi^2 A_1 - \pi^4,
\end{aligned}$$

dove abbiamo definito l'integrale

$$A_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{x}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{x}{\sinh(x)} dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh(x)} dx,$$

e dobbiamo verificare i tre limiti

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\epsilon}^{(i\pi)}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz = -\pi^4, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{(R+iy)^3}{\sinh(R+iy)} dy = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^0 \frac{(-R+iy)^3}{\sinh(-R+iy)} dy = 0. \quad (1)$$

Il primo è conseguenza del limite uniforme

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{z^3}{\sinh(z)} (z - i\pi) \stackrel{U}{=} i\pi^3$$

per valori di z appartenenti all'arco $\gamma_{\epsilon}^{(i\pi)}$, cioè per $z = i\pi + \epsilon e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, \pi]$. Infatti, nel limite considerato, $\epsilon \rightarrow 0$, si ha $z \rightarrow i\pi$, quindi

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{z^3}{\sinh(z)} (z - i\pi) = (i\pi)^3 \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{1}{\cosh(z)} = i\pi^3,$$

che dimostra la prima identità riportata nell'Eq. (1).

Per le due rimanenti usiamo la disuguaglianza di Darboux, ovvero

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\pi} \frac{(R+iy)^3}{\sinh(\pm R+iy)} dy \right| &\leq \int_0^{\pi} \frac{2|R+iy|^3}{|e^{\pm R+iy} - e^{\mp R-iy}|} dy \leq \int_0^{\pi} \frac{2(R+y)^3}{|e^{\pm R} - e^{\mp R}|} dy = \int_0^{\pi} \frac{2(R+y)^3}{e^R - e^{-R}} dy \\
&\leq \int_0^{\pi} \frac{2(R+\pi)^3}{e^R/2} dy = 4\pi e^{-R} (R+\pi)^3 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

dove si è usata la disuguaglianza $1/(e^R - e^{-R}) \leq 1/(e^R - e^R/2)$, che implica $-e^R/2 \leq -e^{-R}$, ovvero $2R \geq \ln(2)$, che, ovviamente, nel limite $R \rightarrow \infty$, è verificata senza perdita di generalità. Usando l'espressione dell'integrale in termini del residuo, unitamente a quella appena ottenuta, si ha

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z^3}{\sinh(z)} dz = -2\pi^4 = 2A - 3\pi^2 A_1 - \pi^4,$$

da cui

$$A = \frac{(3A_1 - \pi^2)\pi^2}{2}.$$

Per calcolare l'integrale A_1 , usiamo la stessa procedura, ovvero calcoliamo l'integrale sul percorso chiuso $\Gamma_{R,\epsilon}$ della stessa integranda, ne consideriamo il valore come somma dei residui e l'espressione come somma dei contributi dovuti ai tratti rettilinei e agli archi e, infine, facciamo i limiti $\epsilon \rightarrow 0^+$ e $R \rightarrow \infty$. In particolare, osservando che, come nel caso precedente l'origine rappresenta una singolarità eliminabile e $z = i\pi$ un polo semplice, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z}{\sinh(z)} dz &= 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{z}{\sinh(z)}, i\pi \right] = -2i\pi(i\pi) = 2\pi^2, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} \frac{z}{\sinh(z)} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{x}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{x}{\sinh(x)} dx + \int_{-\gamma_\epsilon^{(0)}} \frac{z}{\sinh(z)} dz \right. \\ &\quad + \int_R^\epsilon \frac{x+i\pi}{-\sinh(x)} dx + \int_{-\epsilon}^{-R} \frac{x+i\pi}{-\sinh(x)} dx + \int_{\gamma_\epsilon^{(i\pi)}} \frac{z}{\sinh(z)} dz \\ &\quad \left. + i \int_0^\pi \frac{R+iy}{\sinh(R+iy)} dy + i \int_\pi^0 \frac{-R+iy}{\sinh(-R+iy)} dy \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{x}{\sinh(x)} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{x}{\sinh(x)} dx \right)}_{=A_1} \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(\int_{\epsilon}^R \frac{x}{\sinh(x)} dx + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{x}{\sinh(x)} dx \right)}_{=A_1} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\int_{\gamma_\epsilon^{(i\pi)}} \frac{z}{\sinh(z)} dz}_{=i\pi(-i\pi)=\pi^2} \\ &\quad + i \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\int_0^\pi \frac{R+iy}{\sinh(R+iy)} dy + \int_\pi^0 \frac{-R+iy}{\sinh(-R+iy)} dy \right)}_{=0} \\ &= 2A_1 + \pi^2, \end{aligned}$$

dove gli annullamenti di vari termini sono ottenuti usando gli stessi argomenti del caso precedente. In particolare, gli integrali con la funzione integranda dispari $1/\sinh(x)$ sono nulli, così come si annullano i limiti sui tratti verticali al divergere di R e quello sull'arco centrato nell'origine al tendere a zero di ϵ .

Uguagliando i due risultati si ottiene il valore di A_1 , ovvero

$$2\pi^2 = 2A_1 + \pi^2 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Sostituendo questo valore nell'espressione dell'integrale A ottenuta precedentemente in funzione del valore A_1 , si ha il risultato finale

$$A = \frac{(3A_1 - \pi^2)\pi^2}{2} = \frac{(3\pi^2/2 - \pi^2)\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Dopo aver identificato e classificato le singolarità delle funzioni

$$f(z) = \frac{1}{e^{2z} - \sqrt{2}e^z + 1}, \quad g(z) = f^2(z) = \frac{1}{(e^{2z} - \sqrt{2}e^z + 1)^2},$$

si ottengano i primi tre coefficienti non nulli delle serie di Laurent centrate in ciascuna singolarità e convergenti in un suo intorno.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Le funzioni sono meromorfe, hanno poli in corrispondenza degli zeri del polinomio di secondo grado in e^z che costituisce il denominatore della $f(z)$, si tratta di poli semplici per la stessa funzione $f(z)$ e di poli doppi per la

funzione $g(z)$. Gli zeri di tale polinomio, ovvero di $1/f(z)$ sono

$$e^{z^\pm} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i) = e^{\pm i\pi/4},$$

ovviamente, alla luce della periodicità della funzione esponenziale, i poli sono gli elementi dell'insieme

$$\{z_k^+\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{z_k^-\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad z_k^\pm = i\pi \left(\pm \frac{1}{4} + 2k \right).$$

Le parti principali degli sviluppi di Laurent delle funzioni $f(z)$ e $g(z)$ conterranno, rispettivamente, un solo termine e due termini.

Nel caso della funzione $f(z)$ procediamo come segue

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(e^z - e^{z_k^+})(e^z - e^{z_k^-})} = \frac{1}{e^{z_k^+} - e^{z_k^-}} \left(\frac{1}{e^z - e^{z_k^+}} - \frac{1}{e^z - e^{z_k^-}} \right) = \frac{1}{2i \operatorname{sen}(\pi/4)} \left(\frac{1}{e^z - e^{z_k^+}} - \frac{1}{e^z - e^{z_k^-}} \right) \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e^z - e^{z_k^+}} - \frac{1}{e^z - e^{z_k^-}} \right), \end{aligned}$$

consideriamo come centro dello sviluppo $z = z_k^+$, mettendo in evidenza $e^{z_k^+}$ a denominatore, si ha

$$f(z) = \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e^{z-z_k^+} - 1} - \frac{1}{e^{z-z_k^+} - e^{-i\pi/2}} \right) = \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e^{z-z_k^+} - 1} - \frac{1}{e^{z-z_k^+} - e^{-i\pi/2}} \right) = \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e^{z-z_k^+} - 1} - \frac{1}{e^{z-z_k^+} + i} \right),$$

usando lo sviluppo in serie dell'esponenziale

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left(\frac{1}{e^{z-z_k^+} - 1} - \frac{1}{e^{z-z_k^+} + i} \right) \\ &= \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left[\frac{1}{z-z_k^+} \left(1 + \frac{z-z_k^+}{2!} + \frac{(z-z_k^+)^2}{3!} + O((z-z_k^+)^3) \right)^{-1} - \frac{1}{1+i} \left(1 + \frac{z-z_k^+}{1+i} + \frac{(z-z_k^+)^2}{(1+i)2!} + O((z-z_k^+)^3) \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Poiché la serie di Laurent da considerare è quella che converge in un intorno della singolarità, in questo caso si tratta di quella che converge nella corona $C_k^+ = \{z : 0 < |z - z_k^+| < |z_k^+ - z_k^-| = \pi/2\}$ centrata in z_k^+ di raggio minore nullo e maggior $\pi/2$, dove $\pi/2$ è la distanza tra le due singolarità. Usiamo la somma della serie geometrica per le serie in $(z - z_k^+)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left[\frac{1}{z-z_k^+} \left(1 + \frac{z-z_k^+}{2!} + \frac{(z-z_k^+)^2}{3!} + O((z-z_k^+)^3) \right)^{-1} - \frac{1}{1+i} \left(1 + \frac{z-z_k^+}{1+i} + \frac{(z-z_k^+)^2}{(1+i)2!} + O((z-z_k^+)^3) \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{z-z_k^+} \left[1 - \left(\frac{z-z_k^+}{2!} + \frac{(z-z_k^+)^2}{3!} + \dots \right) + \left(\frac{z-z_k^+}{2!} + \frac{(z-z_k^+)^2}{3!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1+i} \left[1 - \left(\frac{z-z_k^+}{1+i} + \frac{(z-z_k^+)^2}{(1+i)2!} + \dots \right) + \left(\frac{z-z_k^+}{1+i} + \frac{(z-z_k^+)^2}{(1+i)2!} + \dots \right)^2 + \dots \right] \right\} \\ &= \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \frac{1}{z-z_k^+} + \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2!} - \frac{1}{1+i} \right) + \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{(2!)^2} + \frac{1}{(1+i)^2} \right) (z-z_k^+) + O((z-z_k^+)^2), \end{aligned}$$

da cui si evince che i primi tre coefficienti di Laurent non nulli sono

$$\begin{aligned} C_{-1}^{(+,k)} &= \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} = \frac{-ie^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} = -\frac{1+i}{2}; \\ C_0^{(+,k)} &= \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2!} - \frac{1}{1+i} \right) = \frac{1+i}{2} \frac{2-i}{2} = \frac{3+i}{4}; \\ C_1^{(+,k)} &= \frac{e^{-z_k^+}}{i\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{(2!)^2} + \frac{1}{(1+i)^2} \right) = -\frac{1+i}{2} \frac{1-6i}{12} = \frac{-7+5i}{24}, \end{aligned}$$

inoltre, sono indipendenti dal valore di $k \in \mathbb{Z}$. Usando la stessa procedura per la serie di Laurent centrata in z_k^- , sfruttando la relazione $z_k^- = (z_k^+)^*$, si ha che i coefficienti di Laurent sono i complessi coniugati dei precedenti,

ovvero

$$C_{-1}^{(-,k)} = \frac{e^{-z_k^-}}{-i\sqrt{2}} = \frac{ie^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} = -\frac{1-i}{2};$$

$$C_0^{(-,k)} = \frac{e^{-z_k^-}}{-i\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2!} - \frac{1}{1-i} \right) = \frac{1-i}{2} \frac{2+i}{2} = \frac{3-i}{4};$$

$$C_1^{(-,k)} = \frac{e^{-z_k^-}}{-i\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{(2!)^2} + \frac{1}{(1-i)^2} \right) = -\frac{1-i}{2} \frac{1+6i}{12} = \frac{-7-5i}{24}.$$

Per ciò che concerne le serie di Laurent della funzione $g(z) = f^2(z)$ è immediato osservare come viga una relazione tra i coefficienti di Laurent delle funzione $f(z)$ e quelli della stessa $g(z)$ relativi alle serie con centro in comune. In fatti avremo

$$g(z) = f^2(z) = \left(\sum_{j=-1}^{\infty} C_j^{(\pm,k)} (z - z_k^\pm)^j \right)^2 = \sum_{j=-2}^{\infty} D_j^{(\pm,k)} (z - z_k^\pm)^j,$$

dove l'insieme $\{D_j^{(\pm,k)}\}_{j=-2}^{\infty}$ è quello dei coefficienti della serie di Laurent della funzione $g(z)$ con centro nel polo doppio z_k^\pm , con $k \in \mathbb{Z}$. Sviluppando il quadrato della serie della relazione precedente e considerandone solo i termini con potenze non positive del binomio $(z - z_k^\pm)$, si ha

$$g(z) = \left(C_{-1}^{(\pm,k)} (z - z_k^\pm)^{-1} + C_0^{(\pm,k)} + C_1^{(\pm,k)} (z - z_k^\pm) + O((z - z_k^\pm)^2) \right)^2$$

$$= \left(C_{-1}^{(\pm,k)} \right)^2 (z - z_k^\pm)^{-2} + 2C_{-1}^{(\pm,k)} C_0^{(\pm,k)} (z - z_k^\pm)^{-1} + \left(C_0^{(\pm,k)} \right)^2 + 2C_{-1}^{(\pm,k)} C_1^{(\pm,k)} + O((z - z_k^\pm)),$$

che, per l'unicità delle serie di Laurent dà

$$D_{-2}^{(\pm,k)} = \left(C_{-1}^{(\pm,k)} \right)^2 = \left(\frac{1 \pm i}{2} \right)^2 = \pm \frac{i}{2};$$

$$D_{-1}^{(\pm,k)} = 2C_{-1}^{(\pm,k)} C_0^{(\pm,k)} = -2 \frac{1 \pm i}{2} \frac{3 \pm i}{4} = -\frac{1 \pm 2i}{2};$$

$$D_0^{(\pm,k)} = \left(C_0^{(\pm,k)} \right)^2 + 2C_{-1}^{(\pm,k)} C_1^{(\pm,k)} = \left(\frac{3 \pm i}{4} \right)^2 - 2 \frac{1 \pm i}{2} \frac{-7 \pm i5}{24} = \frac{24 \pm 11i}{24}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$E = \oint_{|z|=2} \exp \left[\exp \left(\frac{1}{z-1} \right) \right] dz.$$

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione integranda ha una singolarità essenziale in $z = 1$, come si evince facilmente usando lo sviluppo in serie del primo esponenziale, si ha

$$E = \oint_{|z|=2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{z-1}} \right)^k}{k!} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \oint_{|z|=2} \left(e^{\frac{1}{z-1}} \right)^k dz = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \oint_{|z|=2} \left(e^{\frac{1}{z-1}} \right)^k dz = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \oint_{|z|=2} e^{\frac{k}{z-1}} dz,$$

la seconda identità segue dalla convergenza uniforme della serie; la terza è invece conseguenza del teorema di Cauchy, infatti per $k = 0$ l'integranda è una funzione costante, l'unità, e come tale è analitica nella sfera di Riemann e ha integrale nullo su ogni percorso chiuso.

L'integrale che compare nel k -esimo termine della serie può essere calcolato usando il teorema dei residui. Infatti, la funzione integranda possiede, come anticipato, una sola singolarità, si tratta di una singolarità essenziale nel punto

$z = 1$, che è avvolto dal percorso d'integrazione chiuso, rappresentato dalla circonferenza centrata nell'origine, di raggio 2, per cui si ha

$$\oint_{|z|=2} e^{\frac{k}{z-1}} dz = 2i\pi \operatorname{Res}\left[e^{\frac{k}{z-1}}, z = 1\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Otteniamo il residuo come coefficiente "-1" della serie di Laurent centrata in $z = 1$ e convergente in un intorno della stessa singolarità, della funzione integranda. La serie di Laurent si ricava dalla serie di Taylor dell'esponenziale, ovvero

$$e^{\frac{k}{z-1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^j}{j!} (z-1)^{-j} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-1)^n = 1 + \frac{k}{z-1} + \frac{k^2}{2!} \frac{1}{(z-1)^2} + O((z-1)^{-3}), \quad \forall z \neq 0, k \in \mathbb{N},$$

da cui si evince $C_{-1} = k$ e quindi

$$\oint_{|z|=2} e^{\frac{k}{z-1}} dz = 2i\pi k.$$

Sostituendo questo risultato nella serie che definisce l'integrale E cercato, si ha

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \oint_{|z|=2} e^{\frac{k}{z-1}} dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = 2i\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = 2i\pi \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!} = 2i\pi e.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sfruttando l'identità di Parseval tra le norme di funzioni a quadrato sommabili in \mathbb{R} , ovvero appartenenti allo spazio vettoriale $L^2(\mathbb{R})$ e delle loro trasformate di Fourier, si calcoli l'integrale

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4(xb)}{x^4} dx,$$

con $b > 0$.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

L'identità di Parseval per le funzioni a quadrato sommabili in \mathbb{R} (con funzione peso unitaria) e le loro trasformate di Fourier, anch'esse a quadrato sommabili, implica l'uguaglianza tra le rispettive norme, ovvero

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk \right)^{1/2} = \|\tilde{f}\|, \quad \forall f(x) \in L^2(\mathbb{R}),$$

dove $\tilde{f}(k) \in L^2(\mathbb{R})$, a quadrato sommabile per il teorema di Plancherel, rappresenta la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$. L'integrale P può essere interpretato come il quadrato della norma della funzione

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(xb)}{x^2},$$

la cui appartenenza allo spazio vettoriale $L^2(\mathbb{R})$ è garantita dalla stessa esistenza e finitezza dell'integrale P . La trasformata di Fourier della funzione $f(x)$ è

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(xb)}{x^2} e^{-ikx} dx.$$

Osserviamo che la funzione $f(x)$ possiede nell'origine una singolarità eliminabile, per cui possiamo deformare con continuità il percorso d'integrazione nel piano complesso z , senza alterare il valore dello stesso integrale. In particolare, deformiamo con continuità l'asse reale fino a farlo coincidere con il percorso

$$\Gamma = (-\infty, -\epsilon] \cup (-\{z : z = \epsilon e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}) \cup [\epsilon, \infty),$$

che rappresenta l'asse reale "dentato" intorno all'origine con una semi-circonferenza di raggio infinitesimale ϵ , immersa nel semipiano delle parti immaginarie positive. Ne consegue che l'integrale della trasformata di Fourier ha anche la forma

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{\text{sen}^2(zb)}{z^2} e^{-ikz} dz.$$

Usando la formula di Eulero per la funzione seno e il lemma di Jordan per calcolare l'integrale, chiudendo opportunamente il percorso d'integrazione, la trasformata di Fourier vale

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{-4\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma} \frac{e^{-iz(k+2b)} + e^{-iz(k-2b)} - 2e^{-ikz}}{z^2} dz \\ &= \frac{2i\pi}{-4\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 0 + 0 + 0 = 0 & k < -2b < 0 \Rightarrow k < 2b \\ -\frac{d}{dz} e^{-iz(k+2b)} \Big|_{z=0} + 0 + 0 = i(k+2b) & -2b < k < 0 \Rightarrow k < 2b \\ -\frac{d}{dz} e^{-iz(k+2b)} \Big|_{z=0} + 0 - \frac{d}{dz} e^{-ikz} \Big|_{z=0} = i(k+2b) - 2ik = i(-k+2b) & 0 < k < 2b \Rightarrow k > -2b \\ -\frac{d}{dz} (e^{-iz(k+2b)} + e^{-iz(k-2b)} - 2e^{-ikz}) \Big|_{z=0} = i(k+2b) + i(k-2b) - 2ik = 0 & k > 2b > 0 \Rightarrow k > -2b \end{cases} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \begin{cases} 0 & k < -2b \\ k+2b & -2b < k < 0 \\ -k+2b & 0 < k < 2b \\ 0 & k > 2b \end{cases} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \begin{cases} 0 & |k| > 2b \\ -|k|+2b & |k| < 2b \end{cases}. \end{aligned}$$

Inserendo questo risultato nell'identità di Parseval si ha

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \|\tilde{f}\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^4(xb)}{x^4} dx = \frac{\pi}{8} \int_{-2b}^{2b} (-|k|+2b)^2 dk = \frac{\pi}{4} \int_0^{2b} (-k+2b)^2 dk = \frac{\pi}{4} \int_0^{2b} (k-2b)^2 dk \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{(k-2b)^3}{3} \Big|_0^{2b} = \frac{2\pi}{3} b^3, \end{aligned}$$

ma questo non è altro che il valore dell'integrale cercato, cioè

$$P = \frac{2\pi}{3} b^3.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri la seguente proposizione. Siano \hat{H} e \hat{J} due generici operatori hermitiani, definiti nello spazio di Hilbert E_N , di dimensione finita N , tali che:

$$\sigma_d(\hat{H}) \subset [h_1, h_2] \subset \mathbb{R}, \quad \sigma_d(\hat{J}) \subset [j_1, j_2] \subset \mathbb{R},$$

allora

$$\sigma_d(\hat{H} + \hat{J}) \subset [h_1 + j_1, h_2 + j_2] \subset \mathbb{R},$$

dove con $\sigma_d(\hat{O})$ si indica lo spettro discreto dell'operatore \hat{O} .

Infine, nello spazio di Hilbert a due dimensioni E_2 , si verifichi la proposizione con

$$\hat{H} = \hat{\sigma}_1, \quad \hat{J} = \hat{\sigma}_2 + \hat{I},$$

dove $\hat{\sigma}_j$ è il j -esimo operatore di Pauli, $j = 1, 2, 3$ e \hat{I} è l'operatore identità.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

I tre operatori \hat{H} , \hat{J} e $\hat{H} + \hat{J}$ sono hermitiani e quindi normali, ovvero i tre insiemi dei loro autovettori rappresentano altrettante basi ortonormali dello spazio di Hilbert E_N . Si hanno le equazioni agli autovalori

$$\hat{H}|r_j\rangle = \rho_j|r_j\rangle, \quad \hat{J}|q_j\rangle = \chi_j|q_j\rangle, \quad (\hat{H} + \hat{J})|t_j\rangle = \tau_j|t_j\rangle, \quad j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove $\{|r_j\rangle\}_{j=1}^N$, $\{|q_j\rangle\}_{j=1}^N$, $\{|t_j\rangle\}_{j=1}^N$ sono gli insiemi ortonormali degli autovettori; $\sigma_p(\hat{H}) = \{\rho_j\}_{j=1}^N$, $\sigma_p(\hat{J}) = \{\chi_j\}_{j=1}^N$, $\sigma_p(\hat{H} + \hat{J}) = \{\tau_j\}_{j=1}^N$ gli insiemi degli autovalori, ovvero gli spettri discreti, rispettivamente, degli operatori \hat{H} , \hat{J} e $\hat{H} + \hat{J}$.

Il valore di aspettazione dell'operatore somma $\hat{H} + \hat{J}$ rispetto al suo j -esimo autovettore, $(\hat{H} + \hat{J})_{t_j}$, coincide con l'autovalore corrispondente, cioè in virtù dell'ortonormalità dell'insieme degli autovettori, conseguenza, a sua volta, della normalità dell'operatore, si ha

$$\langle \hat{H} + \hat{J} \rangle_{t_j} = \langle t_j | (\hat{H} + \hat{J}) | t_j \rangle = \langle t_j | \hat{H} | t_j \rangle + \langle t_j | \hat{J} | t_j \rangle = \langle \hat{H} \rangle_{t_j} + \langle \hat{J} \rangle_{t_j} = \tau_j \langle t_j | t_j \rangle = \tau_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Consideriamo le rappresentazioni del j -esimo autovettore dell'operatore somma $|t_j\rangle$ rispetto alle basi $\{|r_j\rangle\}_{j=1}^N$ e $\{|q_j\rangle\}_{j=1}^N$ degli autovettori degli operatori \hat{H} e \hat{J}

$$|t_j\rangle = t_{(j)}^k |r_k\rangle, \quad |t_j\rangle = t'_{(j)}^k |q_k\rangle, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

dove $t_{(j)}^k$ e $t'_{(j)}^k$ indicano, rispettivamente, la k -esima componente contro-variante del j -esimo autovettore dell'operatore somma $\hat{H} + \hat{J}$ rispetto alle basi $\{|r_j\rangle\}_{j=1}^N$ e $\{|q_j\rangle\}_{j=1}^N$. Ne consegue che i valori di aspettazione $\langle \hat{H} \rangle_{t_j}$ e $\langle \hat{J} \rangle_{t_j}$ possono essere espressi come

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle_{t_j} &= \langle t_j | \hat{H} | t_j \rangle = \langle r_l | t_{(j)}^{l*} \hat{H} t_{(j)}^k | r_k \rangle = \langle r_l | t_{(j)}^{l*} t_{(j)}^k \hat{H} | r_k \rangle = \langle r_l | t_{(j)}^{l*} t_{(j)}^k \rho_k | r_k \rangle = t_{(j)}^{l*} t_{(j)}^k \rho_k \langle r_k | r_l \rangle = \sum_{k=1}^N |t_{(j)}^k|^2 \rho_k, \\ \langle \hat{J} \rangle_{t_j} &= \langle t_j | \hat{J} | t_j \rangle = \langle q_l | t'_{(j)}^{l*} \hat{J} t'_{(j)}^k | q_k \rangle = \langle q_l | t'_{(j)}^{l*} t'_{(j)}^k \hat{J} | q_k \rangle = \langle q_l | t'_{(j)}^{l*} t'_{(j)}^k \chi_k | q_k \rangle = t'_{(j)}^{l*} t'_{(j)}^k \chi_k \langle q_k | q_l \rangle = \sum_{k=1}^N |t'_{(j)}^k|^2 \chi_k. \end{aligned}$$

Per ipotesi gli spettri discreti degli operatori \hat{H} e \hat{J} sono rispettivamente sottoinsiemi degli intervalli reali $[h_1, h_2]$ e $[j_1, j_2]$, per cui

$$\begin{aligned} \min_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\rho_l\} &\geq h_1, & \max_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\rho_l\} &\leq h_2, \\ \min_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\chi_l\} &\geq j_1, & \max_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\chi_l\} &\leq j_2, \end{aligned}$$

il che implica, per i valori di aspettazione $\langle \hat{H} \rangle_{t_j}$ e $\langle \hat{J} \rangle_{t_j}$, definiti dalle espressioni precedenti, le seguenti limitazioni

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle_{t_j} &= \sum_{k=1}^N |t_{(j)}^k|^2 \rho_k \geq \min_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\rho_l\} \sum_{k=1}^N |t_{(j)}^k|^2 = \min_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\rho_l\} \underbrace{\langle t_j | t_j \rangle}_{=1} = \min_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\rho_l\} \geq h_1, \\ \langle \hat{H} \rangle_{t_j} &= \sum_{k=1}^N |t_{(j)}^k|^2 \rho_k \leq \max_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\rho_l\} \sum_{k=1}^N |t_{(j)}^k|^2 = \max_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\rho_l\} \leq h_2, \\ \langle \hat{J} \rangle_{t_j} &= \sum_{k=1}^N |t'_{(j)}^k|^2 \chi_k \geq \min_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\chi_l\} \sum_{k=1}^N |t'_{(j)}^k|^2 = \min_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\chi_l\} \underbrace{\langle t_j | t_j \rangle}_{=1} = \min_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\chi_l\} \geq j_1, \\ \langle \hat{J} \rangle_{t_j} &= \sum_{k=1}^N |t'_{(j)}^k|^2 \chi_k \leq \max_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\chi_l\} \sum_{k=1}^N |t'_{(j)}^k|^2 = \max_{l \in \{1, 2, \dots, N\}} \{\chi_l\} \leq j_2, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}, \end{aligned}$$

ovvero, i due valori di aspettazione appartengono agli stessi intervalli reali che contengono gli spettri,

$$\begin{cases} h_1 \leq \langle \hat{H} \rangle_j \leq h_2 & \Rightarrow & \langle \hat{H} \rangle_j \in [h_1, h_2], \\ j_1 \leq \langle \hat{J} \rangle_j \leq j_2 & \Rightarrow & \langle \hat{J} \rangle_j \in [j_1, j_2], \end{cases} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Infine, per il j -esimo valore di aspettazione dell'operatore somma, con $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, che, come visto, coincide con l'autovalore τ_j , nonché con la somma dei valori di aspettazione dei due operatori, cioè $\tau_j = \langle \hat{H} + \hat{J} \rangle_j = \langle \hat{H} \rangle_j + \langle \hat{J} \rangle_j$, si ha

$$h_1 + j_1 \leq \tau_j = \langle \hat{H} + \hat{J} \rangle_j = \langle \hat{H} \rangle_j + \langle \hat{J} \rangle_j \leq h_2 + j_2, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Ne consegue che lo spettro discreto di $\hat{H} + \hat{J}$ è sottoinsieme dell'intervallo reale avente per estremi $h_1 + j_1$ e $h_2 + j_2$, cioè si ha la relazione cercata

$$\sigma_d(\hat{H} + \hat{J}) \subset [h_1 + j_1, h_2 + j_2] \subset \mathbb{R}.$$

Consideriamo il caso particolare $\hat{H} = \hat{\sigma}_1$ e $\hat{J} = \hat{\sigma}_2 + \hat{I}$, usando la rappresentazione matriciale rispetto alla base dello spazio di Hilbert bidimensionale E_2 , in cui gli operatori sono definiti, rappresentata dagli autovettori del terzo operatore di Pauli $\hat{\sigma}_3$, ovvero

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$H = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \sigma_2 + I = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

dove σ_j , H , J e I sono le matrici 2×2 che rappresentano rispettivamente gli operatori $\hat{\sigma}_j$, \hat{H} , \hat{J} , e \hat{I} con $j = 1, 2, 3$. Lo spettro discreto dell'operatore \hat{H} coincide con quello del primo operatore di Pauli ed è $\sigma_d(\hat{H}) = \{-1, 1\}$, gli autovalori sono $\rho_1 = -1$ e $\rho_2 = 1$. Possiamo definire l'intervallo $[h_1, h_2] = [-1, 1]$, cioè $h_1 = -1$ e $h_2 = 1$. Gli autovalori dell'operatore \hat{J} si ottengono risolvendo l'equazione secolare e sono

$$\begin{aligned} \det(J - \chi I) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1 - \chi & -i \\ i & 1 - \chi \end{pmatrix} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \chi_1 = 0 \\ \chi_2 = 2 \end{cases} \\ (1 - \chi)^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ne consegue che $\sigma_d(\hat{J}) = \{0, 2\} \subset [j_1, j_2] = [0, 2]$, da cui $j_1 = 0$ e $j_2 = 2$. La rappresentazione dell'operatore somma $\hat{H} + \hat{J}$ è

$$H + J = \begin{pmatrix} 1 & 1 - i \\ 1 + i & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono, come al solito, le soluzioni dell'equazione secolare, cioè

$$\begin{aligned} \det(H + J - \tau I) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1 - \tau & 1 - i \\ 1 + i & 1 - \tau \end{pmatrix} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tau_1 = 1 - \sqrt{2} \\ \tau_2 = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \\ (1 - \tau)^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

È immediato verificare che, come abbiamo dimostrato in generale, lo spettro discreto dell'operatore somma $\sigma_d(\hat{H} + \hat{J}) = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ è sottoinsieme dell'intervallo reale $[h_1 + j_1, h_2 + j_2] = [-1 + 0, 1 + 2] = [-1, 3]$.

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

L'operatore \hat{A} è definito nello spazio di Hilbert S_N , a N dimensioni ed è diagonalizzabile. Si dimostri che:

- se esistesse un polinomio $Q_n(x)$ di grado $n < N$, tale che l'operatore $\hat{Q}_n(\hat{A})$ sia l'operatore nullo, allora ci sarebbe degenerazione, ovvero, almeno uno degli autovalori di \hat{A} sarebbe degenero;
- in assenza di degenerazione, il polinomio $P_N(x)$ di grado N , pari alla dimensione dello spazio vettoriale, tale che l'operatore $\hat{P}_N(\hat{A})$ sia l'operatore nullo, definisce l'equazione secolare dell'operatore \hat{A} , che ha la forma $P_N(\lambda) = 0$.

Si consideri il caso particolare in cui lo spazio di Hilbert abbia dimensione tre e l'operatore \hat{A} sia definito dalle azioni sui vettori della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$

$$\begin{cases} \hat{A}|e_1\rangle = |e_1\rangle + 3|e_2\rangle + 2|e_3\rangle \\ \hat{A}|e_2\rangle = -|e_1\rangle + 2|e_2\rangle + |e_3\rangle \\ \hat{A}|e_3\rangle = 4|e_1\rangle - |e_2\rangle - |e_3\rangle \end{cases} .$$

Dopo aver determinato gli autovalori e le rappresentazioni rispetto alla base data degli autovettori dell'operatore \hat{A} , si verifichi che l'operatore $\hat{P}_3(\hat{A})$, dove $P_3(\lambda) = 0$ è l'equazione secolare dello stesso operatore \hat{A} , coincide con l'operatore nullo, ovvero che la sua rappresentazione matriciale è data dalla matrice nulla.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

L'operatore è diagonalizzabile e quindi verifica il teorema spettrale, ciò implica che, indicando con $\sigma_d(\hat{A}) = \{\lambda_k\}_{k=1}^N$ lo spettro discreto e con $\{|a_k\rangle\}_{k=1}^N$ l'insieme degli autovettori, che sono linearmente indipendenti, per cui si hanno le N equazioni agli autovalori

$$\hat{A}|a_k\rangle = \lambda_k|a_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

allora, dato un generico polinomio di grado $m \in \mathbb{N}$ $R_m(x)$, l'operatore che si ottiene valutando il polinomio sull'operatore \hat{A} , che indichiamo con $\hat{R}_m(\hat{A})$, ha lo spettro discreto $\sigma_p(\hat{R}_m(\hat{A})) = \{R_m(\lambda_k)\}_{k=1}^N$ e lo stesso insieme di autovettori dell'operatore \hat{A} , verifica quindi le N equazioni agli autovalori

$$\hat{R}_m(\hat{A})|a_k\rangle = R_m(\lambda_k)|a_k\rangle, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\} .$$

Consideriamo il polinomio $Q_n(x)$ di grado strettamente minore della dimensione dello spazio vettoriale, cioè $n < N$, tale che l'operatore $\hat{Q}_n(\hat{A})$ sia l'operatore nullo, ciò implica che

$$\hat{Q}_n(\hat{A})|a_k\rangle = |0\rangle, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

ovvero l'azione su tutti i vettori di una generica base e quindi anche sugli autovettori, in quanto, essendo linearmente indipendenti, rappresentano una base dello spazio vettoriale, deve dare il vettore nullo. Ma, per il teorema spettrale, abbiamo anche

$$|0\rangle = \hat{Q}_n(\hat{A})|a_k\rangle = Q_n(\lambda_k)|a_k\rangle \Rightarrow Q_n(\lambda_k) = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

ovvero, gli N autovalori λ_k , con $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, sono zeri del polinomio $P_n(x)$, che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha soltanto $n < N$ zeri. Ne consegue che gli autovalori non possono essere tutti distinti, in particolare, lo spettro discreto dell'operatore \hat{A} conterrà al più $n < N$ autovalori distinti e quindi ci sarà degenerazione.

Consideriamo il caso in cui non ci sia degenerazione, ovvero lo spettro discreto dell'operatore \hat{A} , $\sigma_p(\hat{A}) = \{\lambda_k\}_{k=1}^N$, contiene N autovalori distinti,

$$\lambda_k \neq \lambda_j, \quad \forall k, j \in \{1, 2, \dots, N\}, \text{ con: } k \neq j .$$

Il polinomio $P_N(x)$ di grado N , tale che l'operatore $\hat{P}_N(\hat{A})$ sia nullo definisce l'equazione secolare dello stesso operatore \hat{A} . Infatti, seguendo quanto fatto nel caso precedente, avremo

$$|0\rangle = \hat{P}_N(\hat{A})|a_k\rangle = P_N(\lambda_k)|a_k\rangle \Rightarrow P_N(\lambda_k) = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

l'ultima identità implica che

$$P_N(x) = P_N \prod_{k=1}^N (x - \lambda_k),$$

dove $p_N \neq 0$ rappresenta il coefficiente della potenza massima, da cui si evince che l'equazione $P_N(\lambda) = 0$ coincide con l'equazione secolare dell'operatore \hat{A} .

Nel caso particolare descritto dal problema, gli elementi della matrice A , che rappresenta l'operatore rispetto alla base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$, si ottengono a partire dalle azioni date. In generale si ha

$$A_j^k = \langle e_k | \hat{A} | e_j \rangle, \quad k, j \in \{1, 2, 3\},$$

dove A_j^k è l'elemento della k -esima riga e j -esima colonna della matrice A , per cui, alla luce delle azioni date, si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni dell'equazione secolare $\det(A - I\lambda) = 0$ rappresentano gli autovalori, in particolare si ha

$$\left. \begin{aligned} \det(A - I\lambda) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases},$$

quindi lo spettro discreto dell'operatore \hat{A} è $\sigma_d(\hat{A}) = \{-2, 1, 3\}$.

Indicando con a'_j , $j = 1, 2, 3$, il vettore che rappresenta il j -esimo autovettore $|a_j\rangle$ rispetto alla base $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$, dalle equazioni agli autovalori

$$Aa'_j = \lambda_j a'_j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j^1 \\ a_j^2 \\ a_j^3 \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} a_j^1 \\ a_j^2 \\ a_j^3 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3,$$

dove a_j^m , $m = 1, 2, 3$, rappresenta la m -esima componente contro-variante del j -esimo autovettore. Ponendo la prima componente di ciascun autovettore uguale all'unità, cioè $a_1^1 = a_2^1 = a_3^1 = 1$, si hanno i sistemi

$$\begin{cases} -a_j^2 + 4a_j^3 = \lambda_j - 1 \\ a_j^2(2 - \lambda_j) - a_j^3 = -3 \end{cases},$$

da cui

$$a_j^2 = \frac{\lambda_j - 13}{7 - 4\lambda_j} = \begin{cases} \frac{-15}{15} = -1 & j = 1 \\ \frac{-12}{3} = -4 & j = 2 \\ \frac{-10}{-5} = 2 & j = 3 \end{cases}, \quad a_j^3 = \frac{-\lambda_j^2 + 3\lambda_j - 5}{7 - 4\lambda_j} = \begin{cases} \frac{-15}{15} = -1 & j = 1 \\ \frac{-3}{3} = -1 & j = 2 \\ \frac{-5}{-5} = 1 & j = 3 \end{cases}.$$

Le rappresentazioni dei tre autovettori normalizzati sono

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infine, definendo il polinomio secolare come

$$P_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) = (1 - \lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 3),$$

cosicché l'equazione secolare sia: $P_3(\lambda) = 0$, è necessario provare l'identità matriciale

$$P_3(A) = (I - A)(A + 2I)(A - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo direttamente la matrice $P_3(A)$, si ha

$$P_3(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
$$P_3(A) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 \\ -10 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$
$$P_3(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

l'identità precedente è quindi dimostrata.