Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 dicembre 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Dopo aver calcolato l'integrale in valore principale

$$S_n = \mathrm{Pr}\int_{|z|=n} e^z \Gamma(z) dz \,,$$

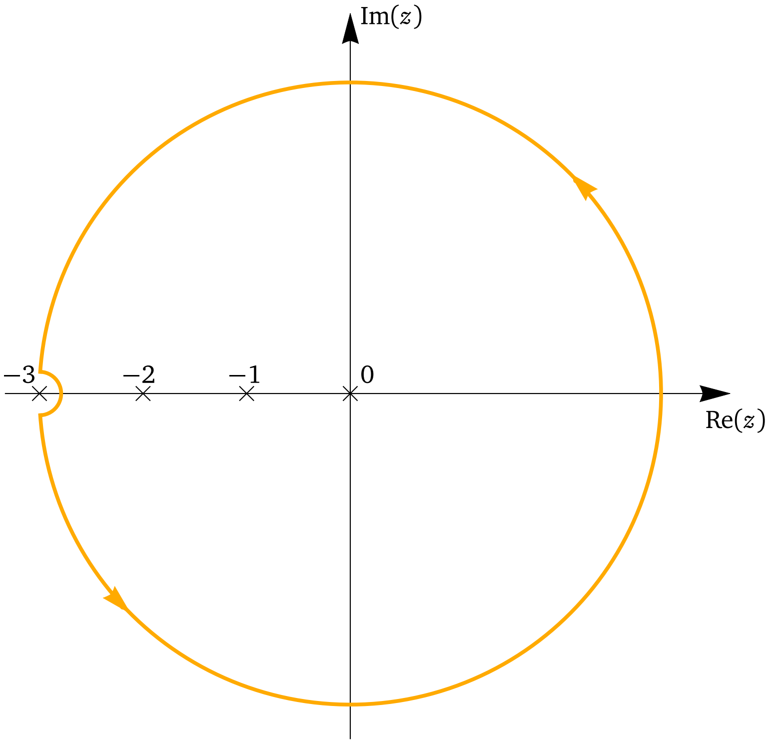
per un generico numero naturale $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, si ottenga, se esiste, il limite della successione $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Soluzione del primo problema

La funzione integranda ha come singolarità solo i poli semplici della funzione Gamma di Eulero, ovvero i punti della successione $\{-k\}_{k=0}^{\infty}$. I primi quattro poli sono mostrati in figura, evidenziati dai simboli "$\times$". Il valore principale nel caso del percorso $\{z : |z| = n\}$ è relativo all'n-esimo polo, quello in $z = -n$. Consideriamo il percorso "dentato" e chiuso $\Gamma_n(\epsilon)$, mostrato in figura nel caso $n = 3$, costituito dall'unione di due archi, ovvero

$$\Gamma_n(\epsilon) = \left\{z : z = ne^{i\theta}, \theta \in (-\pi+\epsilon, \pi-\epsilon)\right\} \cup \left\{z : z = -n + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\right\} \,,$$

dove gli estremi della fase θ sono indicati, in entrambi i casi, a meno di un $O(\epsilon^2)$, nel limite $\epsilon \to 0^+$.



Alla luce di queste considerazioni l'integrale n-esimo può essere scritto nella forma

$$S_n = \lim_{\epsilon \to 0^+} \oint_{\Gamma_n(\epsilon)} e^z \Gamma(z) dz + i\pi A_n \,,$$

dove il secondo termine rappresenta il contributo dell'arco che aggira il polo n-esimo, mentre A_n è il limite uniforme

$$A_n \overset{\text{unif.}}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} e^z \Gamma(z)(z+n) = e^{-n} \operatorname{Res}\left[\Gamma(z), z=-n\right] = e^{-n} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{(-1/e)^n}{n!} \,.$$

Il valore del limite, per $\epsilon \to 0^+$, dell'integrale sul percorso chiuso $\Gamma_n(\epsilon)$ si ottiene con il teorema dei residui. I poli interni al percorso sono gli n punti dell'insieme $\{-k\}_{k=0}^{n-1}$, per cui si ha

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \oint_{\Gamma_n} e^z \Gamma(z) dz = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[e^z \Gamma(z), z=-k\right] = 2i\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1/e)^k}{k!} \,.$$

Ne consegue che

$$S_n = 2i\pi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1/e)^k}{k!} + \frac{1}{2} \frac{(-1/e)^n}{n!} \right) \,.$$

L'n-esimo termine della successione $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ coincide con la somma n-esima di una serie più la metà del termine $(n+1)$-esimo della stessa serie. Poichè il limite per $n \to \infty$ del termine n-esimo è infinitesimo, la successione ammette come limite la serie completa. Si tratta della serie di Taylor di un esponenziale, infatti

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 2i\pi \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/e)^k}{k!} + \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{(-1/e)^n}{n!} \right) = 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/e)^k}{k!} = \frac{2i\pi}{e^{1/e}} \,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$G_{n,m} = \int_0^{2\pi} \cos^n(\theta) \operatorname{sen}^m(\theta) d\theta \,,$$

come funzione dei numeri naturali m e n, ovvero $\forall\, (n,m) \in \mathbb{N}^2$.
Suggerimento. Potrebbe essere utile sfruttare una delle rappresentazioni della funzione Beta di Eulero.

Soluzione del secondo problema

Come suggerito, usiamo la rappresentazione della funzione Beta di Eulero

$$\beta(z,u) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{u-1} dt \,,$$

che converge $\forall\, (z,u) \in \left\{(z,u) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}(z) > 0 \,, \operatorname{Re}(u) > 0\right\}$. In particolare, usiamo la forma che si ottiene dopo aver fatto la sostituzione $t = \cos^2(\theta)$, cioè

$$\beta(z,u) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2z-1}(\theta) \operatorname{sen}^{2u-1}(\theta) d\theta \,.$$

Scriviamo l'integrale dato come la somma dei quattro contributi dovuti a ciascuno dei quadranti, ovvero

$$G_{n,m} = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) \operatorname{sen}^m(\theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^n(\theta) \operatorname{sen}^m(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^n(\theta) \operatorname{sen}^m(\theta) d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos^n(\theta) \operatorname{sen}^m(\theta) d\theta$$

e facciamo le sostituzioni $\theta_2 = \theta - \pi/2$, $\theta_3 = \theta - \pi$ e $\theta_4 = \theta - 3\pi/2$, rispettivamente nel secondo, terzo e quarto integrale, così da ottenere lo stesso intervallo di integrazione $(0, \pi/2)$ per tutti e quattro i contributi,

$$\begin{aligned}
G_{n,m} = & \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\,\mathrm{sen}^m(\theta)d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta_2 + \pi/2)\,\mathrm{sen}^m(\theta_2 + \pi/2)d\theta_2 \\
& + \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta_3 + \pi)\,\mathrm{sen}^m(\theta_3 + \pi)d\theta_3 + \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta_4 + 3\pi/2)\,\mathrm{sen}^m(\theta_4 + 3\pi/2)d\theta_4 \\
= & \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\,\mathrm{sen}^m(\theta)d\theta + (-1)^n \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^n(\theta_2)\cos^m(\theta_2)d\theta_2 \\
& + (-1)^{n+m} \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta_3)\,\mathrm{sen}^m(\theta_3)d\theta_3 + (-1)^m \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^n(\theta_4)\cos^m(\theta_4)d\theta_4 \,.
\end{aligned}$$

Infine, usando la rappresentazione della funzione Beta, si ottiene la legge multipla

$$\begin{aligned}
G_{n,m} &= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)\left[1 + (-1)^n + (-1)^{n+m} + (-1)^m\right] \\
&= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{n+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)\begin{cases} 4 & n \text{ e } m \text{ sono pari } (n+m \text{ è pari}) \\ 0 & n \text{ è pari e } m \text{ è dispari } (n+m \text{ è dispari}) \\ 0 & n \text{ è dipari e } m \text{ è pari } (n+m \text{ è dispari}) \\ 0 & n \text{ e } m \text{ sono dispari } (n+m \text{ è pari}) \end{cases} .
\end{aligned}$$

L'integrale $G_{n,m}$ è quindi diverso da zero solo se entrambi i numeri naturali m e n sono pari. Inoltre, dall'identità

$$\beta(z,u) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)} \,,$$

segue che, posto $n = 2k$ e $m = 2j$, con $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, si ha

$$G_{2k,2j} = 2\frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(j+1/2)}{\Gamma(k+j+1)} \,.$$

Sapendo che la funzione Gamma di Eulero valutata nel semi-intero $h + 1/2$, con $h \in \mathbb{N}$, vale

$$\Gamma(h+1/2) = \frac{(2h-1)!!}{2^h}\sqrt{\pi} \,,$$

si ottiene il risultato finale

$$G_{n,m} = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!(2j-1)!!}{(k+j)!\,2^{k+j-1}}\pi & \text{con: } (n,m) = (2k, 2j) \text{ e } (k,j) \in \mathbb{N}^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si ottengano i coefficienti della serie di Laurent centrata in $z = 2$ della funzione

$$f(z) = \frac{\cos^2(z-1)}{(z-2)^9} \,.$$

Soluzione del terzo problema

Usiamo la formula di duplicazione della funzione coseno, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ e quindi la formula di somma per ottenere un'espressione lineare nelle funzioni coseno e seno con lo stesso argomento $2(z-2)$, ovvero

$$f(z) = \frac{\cos\left[2(z-2)+2\right]+1}{2(z-2)^9} = \frac{\cos\left[2(z-2)\right]\cos(2) - \mathrm{sen}\left[2(z-2)\right]\mathrm{sen}(2)}{2(z-2)^9} + \frac{1}{2(z-2)^9} \,.$$

È ora possibile sfruttare le serie di Taylor delle funzioni seno e coseno, infatti si ha

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\cos\left[2(z-2)\right]\cos(2)-\operatorname{sen}\left[2(z-2)\right]\operatorname{sen}(2)}{2(z-2)^9}+\frac{1}{2(z-2)^9} \\
&= \cos(2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}(z-2)^{2k-9}-\operatorname{sen}(2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!}(z-2)^{2k-8}+\frac{1}{2(z-2)^9} \\
&= \cos(2)\sum_{j=-5}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}2^{2j+9}}{(2j+10)!}(z-2)^{2j+1}-\operatorname{sen}(2)\sum_{l=-4}^{\infty}\frac{(-1)^l 2^{2l+8}}{(2l+9)!}(z-2)^{2l}+\frac{1}{2(z-2)^9}\,,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo fatto le sostituzioni degli indici: $k=j+5$ e $k=l+4$, rispettivamente nella prima e seconda serie. I coefficienti di Laurent con indice pari sono quelli della seconda serie, mentre quelli con indice dispari sono quelli della prima serie e dell'ultimo termine. In definitiva la serie di Laurent può essere scritta come

$$
f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-2)^n\,,
$$

con

$$
C_n=\begin{cases}
0 & n<-9 \\
\cos^2(1) & n=-9 \\
\cos(2)\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}2^{n+8}}{(n+9)!} & \text{per } |n| \text{ dispari e } n>-9 \\
-\operatorname{sen}(2)\dfrac{(-1)^{n/2}2^{n+8}}{(n+9)!} & \text{per } |n| \text{ pari}
\end{cases}\,.
$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Sia A una matrice 3×3 non diagonale ed U la matrice unitaria 3×3 cha la diagonalizza, ovvero tale che

$$
A_d=U^\dagger AU=\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\qquad\Rightarrow\qquad A=UA_dU^\dagger\,.
$$

Si determini una seconda matrice unitaria V, 3×3, tale che la matrice

$$
B_d=V^\dagger A_dV\,,
$$

sia diagonale. È interessante osservare che a partire dalla relazione $A=UA_dU^\dagger$, inserendo due matrici identità nella forma $I=VV^\dagger$, si arrivi alla nuova relazione di diagonalizzazione per la stessa matrice A,

$$
A=UA_dU^\dagger=UVV^\dagger A_dVV^\dagger U^\dagger=\underbrace{UV}_{W}\,\underbrace{V^\dagger A_dV}_{B_d}\,\underbrace{(UV)^\dagger}_{W^\dagger}\equiv WB_dW^\dagger\,,
$$

dove la matrice W è unitaria in quanto prodotto di matrici unitarie. Ne consegue che si possono ottenere due "versioni" diagonali della stessa matrice A usando le due matrici unitarie U e W.
Si ottenga il risultato richiesto anche alla luce di questa considerazione.

Soluzione del quarto problema

La matrice A_d ha sulla diagonale gli autovalori dell'operatore che rappresenta, ovvero gli elementi dello spettro discreto. Poiché lo spettro discreto è invariante, non dipende quindi dalla rappresentazione, tali elementi sono unici per ogni operatore. Ciononostante, alla domanda se sia possibile ottenere rappresentazioni diagonali diverse di uno stesso operatore possiamo rispondere in modo affermativo, perchè, pur essendo unici gli autovalori, l'ordine con cui possono essere disposti lungo la diagonale può variare. Ovvero, a partire da una rappresentazione diagonale potremmo ottenerne un'altra, altrettanto valida, permutando gli elementi diagonali. Questo ordine è lo stesso di quello in cui sono disposti gli autovettori normalizzati a formare le colonne della matrice diagonalizzante.
In particolare, se le equazioni agli autovalori sono

$$
Av_k=\alpha_kv_k\,,\qquad k=1,2,3\,,
$$

dove i numeri α_k sono gli autovalori e

$$v_k = \begin{pmatrix} v^1_{(k)} \\ v^2_{(k)} \\ v^3_{(k)} \end{pmatrix}$$

gli autovettori hanno componenti, possiamo definire sei matrici unitarie diagonalizzanti diverse corrispondenti alle sei permutazioni: 123, 231, 312, 321, 213, 132. Quella corrispondente alla permutazione ijk ha la forma

$$U_{(ijk)} = \begin{pmatrix} v^1_{(i)} & v^1_{(j)} & v^1_{(k)} \\ v^2_{(i)} & v^2_{(j)} & v^2_{(k)} \\ v^3_{(i)} & v^3_{(j)} & v^3_{(k)} \end{pmatrix},$$

dove la prima, la seconda e la terza colonna hanno rispettivamente gli elementi del i-esimo, j-esimo e k-esimo autovettore. Usando questa matrice unitaria otteniamo per la matrice non diagonale iniziale A la "versione" diagonale

$$U^\dagger_{(ijk)} A U_{(ijk)} = A_{(ijk)} = \mathrm{diag}(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k).$$

Possiamo quindi definire la matrice unitaria $V_{(ijk)}$ come la matrice che rappresenta una trasformazione di permutazione ijk delle colonne della matrice diagonalizzante originale $U_{(123)}$, ovvero

$$U_{(123)} V_{(ijk)} = \begin{pmatrix} U^1_1 & U^1_2 & U^1_3 \\ U^2_1 & U^2_2 & U^2_3 \\ U^3_1 & U^3_2 & U^3_3 \end{pmatrix} V_{(ijk)} = \begin{pmatrix} U^1_i & U^1_j & U^1_k \\ U^2_i & U^2_j & U^2_k \\ U^3_i & U^3_j & U^3_k \end{pmatrix},$$

il che significa, scomponendo l'identità precedente colonna per colonna,

$$\begin{aligned}
\left(U_{(123)} V_{(ijk)}\right)^m_1 &= U^m_l \left(V_{(ijk)}\right)^l_1 = U^m_i \qquad &\Rightarrow \qquad \left(V_{(ijk)}\right)^l_1 = \delta^l_i\,; \\
\left(U_{(123)} V_{(ijk)}\right)^m_2 &= U^m_l \left(V_{(ijk)}\right)^l_2 = U^m_j \qquad &\Rightarrow \qquad \left(V_{(ijk)}\right)^l_2 = \delta^l_j\,; \\
\left(U_{(123)} V_{(ijk)}\right)^m_3 &= U^m_l \left(V_{(ijk)}\right)^l_3 = U^m_k \qquad &\Rightarrow \qquad \left(V_{(ijk)}\right)^l_3 = \delta^l_k\,,
\end{aligned}$$

che in generale si ha

$$\left(V_{(ijk)}\right)^l_h = \delta^1_h \delta^l_i + \delta^2_h \delta^l_j + \delta^3_h \delta^l_k\,, \qquad l, h = 1, 2, 3\,.$$

Ogni colonna della matrice $V_{(ijk)}$ ha un solo elemento non nullo ed uguale ad uno, si tratta dell'i-esimo, del j-esimo e del k-esimo rispettivamente per la prima, la seconda e la terza. Le matrici $V_{(ijk)}$ così ottenute isono unitarie, infatti si ha

$$\begin{aligned}
\left(V_{(ijk)} V^\dagger_{(ijk)}\right)^l_h &= \left(V_{(ijk)}\right)^l_t \left(V^\dagger_{(ijk)}\right)^t_h = \sum_{h'=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} \left(V_{(ijk)}\right)^l_t \left(V_{(ijk)}\right)^{h'}_t \delta^{h'}_h \\
&= \sum_{h'=1}^{3} \sum_{t=1}^{3} \left(\delta^1_t \delta^l_i + \delta^2_t \delta^l_j + \delta^3_t \delta^l_k\right) \left(\delta^1_t \delta^{h'}_i + \delta^2_t \delta^{h'}_j + \delta^3_t \delta^{h'}_k\right) \delta^{h'}_h \\
&= \sum_{h'=1}^{3} \Big(\underbrace{\delta^l_i \delta^{h'}_i}_{t=1} + \underbrace{\delta^l_j \delta^{h'}_j}_{t=2} + \underbrace{\delta^l_k \delta^{h'}_k}_{t=3}\Big) \delta^{h'}_h \qquad \text{(i tre indici } i,\ j \text{ e } k \text{ sono diversi)} \\
&= \sum_{h'=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \delta^l_i \delta^{h'}_i \delta^{h'}_h = \delta^l_h\,, \qquad l, h = 1, 2, 3\,,
\end{aligned}$$

ovvero,

$$V_{(ijk)} V^\dagger_{(ijk)} = I\,,$$

lo stesso risultato si ottiene per il prodotto $V^\dagger_{(ijk)} V_{(ijk)}$. Abbiamo quindi ottenuto quanto richiesto dal problema. Consideriamo comunque un caso esplicito, come ad esempio, quello della matrice

$$V_{(312)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice genera la permutazione $123 \to 321$ delle colonne della matrice unitaria originale $U_{(123)}$, infatti

$$U_{(123)}V_{(312)} = \begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 & U_3^1 \\ U_1^2 & U_2^2 & U_3^2 \\ U_1^3 & U_2^3 & U_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_3^1 & U_1^1 & U_2^1 \\ U_3^2 & U_1^2 & U_2^2 \\ U_3^3 & U_1^3 & U_2^3 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $V_{(312)}$ è unitaria, come si evince dalle relazioni

$$V_{(312)}V_{(312)}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_{(312)}^{\dagger}V_{(312)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si determino i valori dei parametri reali f_0 e f_1 per i quali la funzione

$$f(z) = f_0 + f_1 e^z$$

ha l'espansione di Weierstrass

$$f(z) = e^{z(1/\ln(2)-1)} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(z-\ln(2))^2 + 4k^2\pi^2}{\ln^2(2) + 4k^2\pi^2} e^{z\frac{2\ln(2)}{\ln^2(2)+4k^2\pi^2}}.$$

Soluzione del quinto problema

L'espansione di Weierstrass di una funzione intera $f(z)$, che non si annulli nell'origine, ha la forma del prodotto infinito

$$f(z) = f(0) e^{zf'(0)/f(0)} \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)^{\beta_j} e^{z\beta_j/z_j},$$

dove $\{z_j\}$ e $\{\beta_j\} \subset \mathbb{N}$ sono rispettivamente l'insieme degli zeri e quello delle relative molteplicità. Alla luce di questa definizione, riscriviamo il fattore generico del prodotto dato nella forma di quello dell'espansione di Weierstrass. Cerchiamo, quindi, di isolare nel fattore generico l'unità e la variabile z, per si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{z(1/\ln(2)-1)} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(z-\ln(2))^2 + 4k^2\pi^2}{\ln^2(2) + 4k^2\pi^2} e^{z\frac{2\ln(2)}{\ln^2(2)+4k^2\pi^2}} \\ &= e^{z(1/\ln(2)-1)} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z-\ln(2)+2ik\pi}{\ln(2)-2ik\pi}\right) \left(\frac{z-\ln(2)-2ik\pi}{\ln(2)+2ik\pi}\right) e^{z\frac{2\ln(2)}{\ln^2(2)+4k^2\pi^2}} \\ &= e^{z(1/\ln(2)-1)} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln(2)-2ik\pi} - 1\right) \left(\frac{z}{\ln(2)+2ik\pi} - 1\right) e^{z\frac{2\ln(2)}{\ln^2(2)+4k^2\pi^2}}, \end{aligned}$$

anche l'esponente dell'ultimo esponenziale può essere scritto come somma di due termini aventi gli stessi denominatori dei fattori, cioè

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{z(1/\ln(2)-1)} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln(2)-2ik\pi} - 1\right) \left(\frac{z}{\ln(2)+2ik\pi} - 1\right) e^{z\left(\frac{1}{\ln(2)+2ik\pi} + \frac{1}{\ln(2)-2ik\pi}\right)} \\ &= e^{z(1/\ln(2)-1)} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)-2ik\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{\ln(2)+2ik\pi}\right) e^{z\left(\frac{1}{\ln(2)+2ik\pi} + \frac{1}{\ln(2)-2ik\pi}\right)}. \end{aligned}$$

I fattori con $-k$ possono essere considerati estendendo l'insieme in cui varia l'indice da $\mathbb{N}$ ad $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, ovvero

$$f(z) = e^{z(1/\ln(2)-1)} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)}\right) \prod_{k\neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\ln(2)+2ik\pi}\right) e^{\frac{z}{\ln(2)+2ik\pi}}.$$

Includiamo il fattore con $k=0$ moltiplicando e dividendo per esso,

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{z(1/\ln(2)-1)}\left(1-\frac{z}{\ln(2)}\right)\prod_{k\in\mathbb{Z}}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\ln(2)+2ik\pi}\right)e^{\frac{z}{\ln(2)+2ik\pi}}\left(1-\frac{z}{\ln(2)}\right)^{-1}e^{-\frac{z}{\ln(2)}} \\ &= e^{-z}\prod_{k\in\mathbb{Z}}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\ln(2)+2ik\pi}\right)e^{\frac{z}{\ln(2)+2ik\pi}}\,. \end{aligned}$$

Quella ottenuta rappresenta la forma tipica dell'espansione di Weierstrass, per cui l'insieme degli zeri, tutti semplici in quanto il fattore non esponenziale ha potenza uno, è

$$\{z_k=\ln(2)+2ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}\,.$$

Infine, avendo identificato il prodotto infinito, il fattore moltiplicativo coincide con $f(0)e^{zf'(0)/f(0)}$, per cui si ha l'identità

$$f(0)e^{zf'(0)/f(0)}=e^{-z}\,.$$

Partendo dalla forma data $f(z)=f_0+f_1e^z$, è sufficiente sfruttare la relazione precedente per definire i valori dei parametri, infatti si hanno

$$f(0)=f_0+f_1\,,\qquad f'(0)=f_1\,,$$

quindi

$$f(0)e^{zf'(0)/f(0)}=(f_0+f_1)\,e^{zf_1/(f_0+f_1)}\,,$$

da cui

$$f_0+f_1=1\,,\qquad \frac{f_1}{f_0+f_1}=f_1=1\qquad\Rightarrow\qquad f_0=-f_1+1=2\,.$$

La funzione cercata è quindi

$$f(z)=2-e^z\,.$$

Infatti gli zeri, che si ricavano come soluzioni dell'equazione

$$e^z=2=e^{\ln(2)+2ik\pi}\qquad\Rightarrow\qquad z=z_k=\ln(2)+2ik\pi\,,\qquad\forall\,k\in\mathbb{Z}\,,$$

sono quelli ottenuti dall'espansione data e anche le molteplicità coincidono, poiché si tratta di zeri semplici. Ciò si evince dai valori finiti dei limiti

$$\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{f(z)}=\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{2-e^z}=\lim_{z\to z_k}\frac{1}{-e^z}=\frac{1}{-e^{z_k}}=\frac{1}{2}\,.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si determinino lo spettro discreto e gli autovettori della matrice

$$F=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}.$$

Questa matrice definisce un operatore $\mathscr{F}:M_{\mathbb{C}}(3\times3)\to M_{\mathbb{C}}(3\times3)$, dove $M_{\mathbb{C}}(3\times3)$ è lo spazio vettoriale delle matrici 3×3 ad elementi complessi, la cui azione è data dall'usuale prodotto matriciale righe per colonne ovvero, $\forall A\in M_{\mathbb{C}}(3\times3)$, si ha

$$\mathscr{F}A=B\in M_{\mathbb{C}}(3\times3)\,,$$

dove $B=FA$, ovvero B è la matrice che si ottiene dal prodotto delle matrici F, fissata, ed A generica.
Si determinino lo spettro discreto e, almeno formalmente, l'insieme degli autovettori dell'operatore $\mathscr{F}$.

Soluzione del sesto Problema

La matrice rappresenta un operatore hermitiano essendo reale e simmetrica, si tratta quindi di un operatore normale che ammette un insieme di autovettori ortonormale.
L'equazione secolare della matrice F è

$$\begin{aligned} \det(F - Ix) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} 2-x & 2 & 0 \\ 2 & -x & 2 \\ 0 & 2 & 2-x \end{pmatrix} &= 0 \\ (2-x)\big[-x(2-x)-4\big] - 4(2-x) &= 0 \\ (2-x)\big[-x(2-x)-8\big] &= 0 \\ (2-x)\big(x^2-2x-8\big) &= 0\,, \end{aligned}$$

le cui soluzioni

$$x_1 = -2\,, \qquad x_2 = 2\,, \qquad x_3 = 4\,,$$

sono gli autovalori. Gli autovettori corrispondenti si ottengono risolvendo i tre sistemi omogenei $(F - Ix_j)v_j = 0$, con $j = 1, 2, 3$, ovvero

$$\begin{aligned} Fv_j &= x_j v_j \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} &= x_j \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix}\,, \end{aligned}$$

dove a_j, b_j e c_j sono le tre componenti del j-esimo autovettore. Posto $a_j = 1$ per tutti e tre gli autovettori, dalla prima e seconda equazione

$$\begin{aligned} 2 + 2b_j &= x_j\,, \\ 2 + 2c_j &= x_j b_j\,, \end{aligned}$$

si ottengono rispettivamente i valori di b_j e c_j

$$b_j = \frac{x_j}{2} - 1 = \begin{cases} -2 & (j=1) \\ 0 & (j=2) \\ 1 & (j=3) \end{cases}\,, \qquad c_j = \frac{x_j}{2}\left(\frac{x_j}{2} - 1\right) - 1 = \begin{cases} 1 & (j=1) \\ -1 & (j=2) \\ 1 & (j=3) \end{cases}\,.$$

Infine, inserendo il fattore di normalizzazione, si hanno i tre autovettori

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,, \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

La matrice unitaria che diagonalizza F è

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\,,$$

ovvero

$$F_d = \mathrm{diag}\,(-2, 2, 4) = U^\dagger F U\,.$$

Consideriamo l'equazione agli autovalori dell'operatore $\mathscr{F} : M_{\mathbb{C}}(3\times 3) \to M_{\mathbb{C}}(3\times 3)$

$$\mathscr{F}A = FA = \alpha A\,,$$

dove la matrice $A \in M_{\mathbb{C}}(3 \times 3)$ rappresenta l'autovettore che ha $\alpha \in \mathbb{C}$ come autovalore. Per determinare autovettori e autovalori potremmo "diagonalizzare l'equazione", moltiplicando ambo i membri per $U^\dagger$ da sinistra e sfruttando la relazione $UU^\dagger = I$, si ha

$$\begin{gathered}\underbrace{U^\dagger F U}_{F_d}\underbrace{U^\dagger A}_{A'} = \alpha \underbrace{U^\dagger A}_{A'} \\ F_d A' = \alpha A',\end{gathered}$$

dove, come indicato, abbiamo definito la matrice $A' = U^\dagger A \in M_{\mathbb{C}}(3 \times 3)$. Poiché F_d è una matrice diagonale, il prodotto $F_d A'$ è una matrice che come j-esima riga la j-esima riga della matrice A' moltiplicata per il j-esimo autovettore x_j, con $j = 1, 2, 3$. Esplicitamente si ha

$$F_d A' = \alpha A'$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^1_1 & A'^1_2 & A'^1_3 \\ A'^2_1 & A'^2_2 & A'^2_3 \\ A'^3_1 & A'^3_2 & A'^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 A'^1_1 & x_1 A'^1_2 & x_1 A'^1_3 \\ x_2 A'^2_1 & x_2 A'^2_2 & x_2 A'^2_3 \\ x_3 A'^3_1 & x_3 A'^3_2 & x_3 A'^3_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} A'^1_1 & A'^1_2 & A'^1_3 \\ A'^2_1 & A'^2_2 & A'^2_3 \\ A'^3_1 & A'^3_2 & A'^3_3 \end{pmatrix}.$$

Poichè gli autovalori sono distinti, si hanno tre classi di autovettori corrispondenti alle matrici che hanno due righe nulle. In particolare, indichiamo con $A'_{(t)}$, con $t \in \{1, 2, 3\}$, la matrice che ha solo la t-esima riga non nulla, ne consegue che

$$\left(F_d A'_{(t)}\right)^j_k = (F_d)^j_l \left(A'_{(t)}\right)^l_k = x_l \delta^j_l \delta^l_t A'^l_k = x_t \delta^j_t A'^j_k = x_t \left(A'_{(t)}\right)^j_k,$$

ovvero la matrice $A'_{(t)}$ è un autovettore di F_d con autovalore x_t,

$$F_d A'_{(t)} = x_t A'_{(t)}.$$

Moltiplicando ambo i membri per U si ha

$$\begin{gathered} U F_d U^\dagger U A'_{(t)} = x_t U A'_{(t)} \\ F A_{(t)} = x_t A_{(t)}, \end{gathered}$$

dove le matrici $A_{(t)} = U A'_{(t)}$. In definitiva, queste matrici rappresentano gli autovettori dell'operatore $\mathscr{F}$, relativi agli autovalori dell'insieme $\{x_t\}^3_{t=1}$, quindi la matrice F e l'operatore $\mathscr{F}$ hanno lo stesso spettro discreto.