Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 19 aprile 2017

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$M = \mathrm{Pr}\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)}\,,$$

considerando il cammino di integrazione orientato in senso antiorario.

Soluzione del primo problema

Il percorso di integrazione è la circonferenza centrata in $z=1$ e con raggio unitario. Le singolarità dell'integranda coincidono con gli zeri delle funzioni (e^z-1) e $\cos\left(z^2\right)$, sono quindi i poli semplici

$$z_k = 2ik\pi\,, \qquad p_j^\pm = \pm\sqrt{(2j+1)\frac{\pi}{2}}\,, \qquad k,j\in\mathbb{Z}\,.$$

Soltanto il polo $z_0=0$, ovvero l'origine, appartiene al percorso di integrazione, è quindi rispetto ad esso che va calcolato il valore principale. Consideriamo la circonferenza Γ, dentata verso l'interno, con una arco infinitesimo γ_ϵ, di centro origine e raggio ϵ, mostrata in figura. L'integrale lungo Γ è

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)} = M + \int_{-\gamma_\epsilon}\frac{dz}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)}\,.$$

All'interno di Γ cade il solo polo $p_0^+=\sqrt{\pi/2}$, quindi l'integrale può essere calcolato sfruttando il teorema dei residui, ovvero si ha

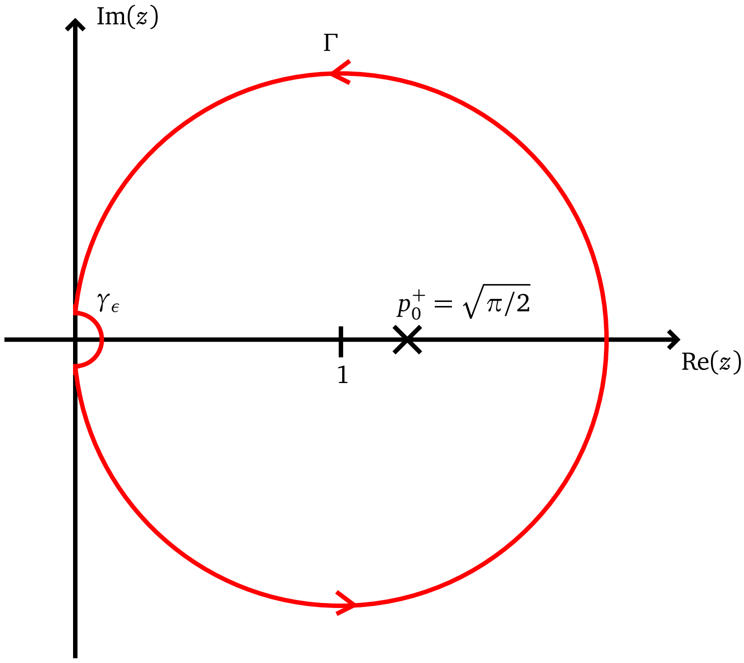
$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to0}\oint_\Gamma \frac{dz}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)} &= M + \lim_{\epsilon\to0}\int_{-\gamma_\epsilon}\frac{dz}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)} = 2i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)}, z=\sqrt{\pi/2}\right]\\ &= \frac{2i\pi}{e^{\sqrt{\pi/2}}-1}\lim_{z\to\sqrt{\pi/2}}\frac{z-\sqrt{\pi/2}}{\cos\left(z^2\right)} = -\frac{2i\pi}{e^{\sqrt{\pi/2}}-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = -\frac{i\sqrt{2\pi}}{e^{\sqrt{\pi/2}}-1}\,.\end{aligned}$$

Calcolando il limite dell'integrale sull'arco γ_ϵ come

$$\lim_{\epsilon\to0}\int_{-\gamma_\epsilon}\frac{dz}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)} = -i\pi\lim_{z\to0}\frac{z}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)} = -i\pi\,,$$

si arriva al risultato finale

$$M = -\frac{i\sqrt{2\pi}}{e^{\sqrt{\pi/2}}-1} - \lim_{\epsilon\to0}\int_{-\gamma_\epsilon}\frac{dz}{(e^z-1)\cos\left(z^2\right)} = -\frac{i\sqrt{2\pi}}{e^{\sqrt{\pi/2}}-1} + i\pi = i\pi\left(1-\frac{\sqrt{2/\pi}}{e^{\sqrt{\pi/2}}-1}\right)\,.$$



Secondo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale della funzione polidroma

$$J = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{2/3}}{x^2+x+1} dx\,.$$

Soluzione del secondo problema

Si può sfruttare la formula nota

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) dx = -\frac{\pi e^{-i\pi\alpha}}{\text{sen}(\alpha\pi)} \sum_{\text{totale},j} \text{Res}\left[z^\alpha R(z), z_j\right]\,,$$

dove $R(x)$ è una funzione razionale, che verifica le condizioni di convergenza, i cui poli non appartengono al semiasse reale positivo. Per portare l'integrale nella forma desiderata facciamo la sostituzione $r = x - 1$,

$$J = \int_0^\infty \frac{r^{2/3}}{r^2+3r+3} dr\,.$$

I poli semplici, zeri semplici del polinomio a denominatore, sono

$$z_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = |z_{1,2}|\, e^{i\theta_{1,2}}\,,$$

ed hanno residui

$$\text{Res}\left[z_{1,2}\right] = \pm\frac{z_{1,2}^{2/3}}{i\sqrt{3}}\,.$$

Quindi, con $\alpha = 2/3$, si ha

$$J = -\frac{\pi e^{-2i\pi/3}}{\sqrt{3}/2}\left(\frac{z_1^{2/3}}{i\sqrt{3}} - \frac{z_2^{2/3}}{i\sqrt{3}}\right) = \frac{2i\pi e^{-2i\pi/3}}{3}\left(z_1^{2/3} - z_2^{2/3}\right) = \frac{2i\pi e^{-2i\pi/3}}{3}|z_1|^{2/3}\left(e^{2i\theta_1/3} - e^{2i\theta_2/3}\right)\,.$$

I poli hanno lo stesso modulo, mentre le fasi verificano la relazione $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, infatti θ_1 appartiene al secondo quadrante, mentre θ_2 al terzo. La determinazione è $(0, 2\pi)$, infatti la formula risolutiva è stata ottenuta in questa condizione. In particolare si hanno

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}\,, \qquad \theta_1 = \arctan(-1/\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}\,, \qquad \theta_2 = \frac{7\pi}{6}\,.$$

Ne consegue che il risultato finale è

$$J = \frac{2i\pi e^{-2i\pi/3}}{3} 3^{1/3} \left(e^{5i\pi/9} - e^{7i\pi/9} \right) = \frac{2i\pi e^{-2i\pi/3}}{3^{2/3}} e^{6i\pi/9} \left(e^{-i\pi/9} - e^{i\pi/9} \right) = \frac{2i\pi}{3^{2/3}} \left[-2i \operatorname{sen}(\pi/9) \right]\,,$$

ovvero, con le opportune esemplificazioni,

$$J = \frac{4\pi}{3^{2/3}} \operatorname{sen}(\pi/9)\,.$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Dopo aver dimostrato l'identità

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{2\pi}{x\left(e^{\pi x} - e^{-\pi x}\right)}\,,$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione gamma di Eulero, valida $\forall\, x \in \mathbb{R}$, si verifichi anche l'identità più generale

$$|\Gamma(n + ix)|^2 = \frac{2\pi}{x\left(e^{\pi x} - e^{-\pi x}\right)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k^2 + x^2\right)\,,$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Suggerimento. Si usi la formula di riflessione

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\,.$$

Soluzione del terzo problema

Come suggerito, si parte dalla formula di riflessione

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\,,$$

usando l'equazione fondamentale della funzione $\Gamma(z)$, ovvero $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, si ottiene

$$\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}\,.$$

Posto $z = ix$ e scrivendo la funzione seno in forma esponenziale, l'espressione precedente può essere riscritta come

$$\Gamma(ix)\Gamma(-ix) = \frac{-\pi}{ix \operatorname{sen}(i\pi x)} = \frac{-\pi}{ix \frac{e^{-\pi x} - e^{\pi x}}{2i}} = \frac{\pi}{x\left(e^{\pi x} - e^{-\pi x}\right)}\,.$$

Questa è l'identità cercata, infatti, grazie al principio di riflessione di Schwarz $\Gamma(z^*) = \Gamma^*(z)$, il primo membro rappresenta il modulo quadro della funzione gamma valutata in $z = ix$, con $x \in \mathbb{R}$, infatti

$$\Gamma(ix)\Gamma(-ix) = \Gamma(ix)\Gamma\left((ix)^*\right) = \Gamma(ix)\Gamma^*(ix) = |\Gamma(ix)|^2\,,$$

in definitiva

$$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x\left(e^{\pi x} - e^{-\pi x}\right)}\,.$$

Sfruttando ancora l'equazione fondamentale della funzione gamma avremo che, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$|\Gamma(n+ix)|^2 = |(n-1+ix)\Gamma(n-1+ix)|^2 = |(n-1+ix)\cdots(1+ix)\,ix\,\Gamma(ix)|^2 = |\Gamma(ix)|^2 \prod_{k=0}^{n-1} |k+ix|^2\,.$$

Scrivendo il modulo quadro della funzione gamma per mezzo dell'espressione ottenuta ed esprimendo i moduli quadri dei fattori del prodotto come somma dei quadrati della parte reale e di quella immaginaria, si ottiene la seconda identità cercata, cioè

$$|\Gamma(n+ix)|^2 = \frac{2\pi}{x\left(e^{\pi x} - e^{-\pi x}\right)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k^2 + x^2\right)\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO 6/30)

Dati gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, definiti nello spazio di Hilbert E_3, di dimensione $\dim(E_3) = 3$, si determini, rispetto alla base canonica, la matrice che rappresenta l'operatore $\hat{A}^{\hat{B}}$, sapendo che, rispetto alla stessa base, gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono rappresentati rispettivamente dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e che l'operatore che agisce per primo è quello ad esponente.
Suggerimento. Si usi lo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale e si diagonalizzi A per calcolarne il logaritmo.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

La matrice da determinare può essere sviluppata in serie di potenze come

$$C = A^B = e^{\ln(A)B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\ln(A)B]^k}{k!}\,.$$

Si noti che la disposizione delle matrici ad esponente e nei termini della serie, rispetta l'ordine d'azione, ovvero, agisce prima B, che è ad esponente nell'espressione originale, e poi A, per cui scriviamo la matrice come $e^{\ln(A)B}$, questa matrice è diversa da $e^{B\ln(A)}$. L'ordine è importante in quanto gli operatori e di conseguenza le matrici A e B non commutano. Si ha infatti

$$\begin{aligned}[A,B] &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0\,.\end{aligned}$$

Ovviamente le due matrici non possono essere diagonalizzate simultaneamente. Al fine di ottenere la matrice che rappresenta il logaritmo di A è necessario diagonalizzare la stessa matrice A. Gli autovalori si ottengono come soluzione dell'equazione caratteristica

$$0 = \det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^3 - (2-x)\,,$$

e sono

$$x_1 = 1\,, \qquad x_2 = 2\,, \qquad x_3 = 3\,.$$

Con gli autovettori corrispondenti

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

si definisce la matrice unitaria diagonalizzante

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

grazie alla quale si ha

$$A_d = \mathrm{diag}(1, 2, 3) = U^\dagger A U\,.$$

Usando il teorema spettrale, il logaritmo di A può essere diagonalizzato dalla stessa matrice U e ha come autovalori i logaritmi degli autovalori di A, ovvero

$$L_d = U^\dagger \ln(A) U = \mathrm{diag}(\ln(1), \ln(2), \ln(3)) = \mathrm{diag}(0, \ln(2), \ln(3))\,.$$

Con la stessa matrice U trasformiamo la matrice B

$$\begin{aligned} B_d = U^\dagger B U &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ovviamente B_d non è diagonale poiché, come già ribadito, le due matrici A e B non sono diagonalizzabili simultaneamente. Usiamo la trasformazione U anche per la matrice cercata C e si ha

$$C_d = U^\dagger C U = U^\dagger \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\ln(A)B]^k}{k!} U = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[U^\dagger \ln(A) B U\right]^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[U^\dagger \ln(A) U U^\dagger B U\right]^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(L_d B_d\right)^k}{k!}\,.$$

Anche C_d, come B_d, non è diagonale. Al fine di sommare la serie è necessario ottenere un'espressione ricorsiva per le potenze della matrice $L_d B_d$, la cui forma esplicita è

$$L_d B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln(2) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln(2) & 0 \\ \ln(3) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il quadrato è una matrice ad un solo elemento diagonale

$$L_d B_d L_d B_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln(2) & 0 \\ \ln(3) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln(2) & 0 \\ \ln(3) & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln^2(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ne consegue che, con $k \geq 2$,

$$\left(L_d B_d\right)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln^k(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alla luce di questa espressione si ha

$$C_d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(L_d B_d\right)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \ln(3) & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \ln^k(2)/k! & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \ln(3) & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La prima matrice del terzo membro ha il logaritmo $\ln(3)$ che compare nella potenza uno (il termine della serie con $k = 1$) e i termini diagonali che tengono conto del fatto che la potenza zero è la matrice identità. L'espressione finale si ottiene trasformando C_d come

$$C = UC_dU^\dagger = \begin{pmatrix} 1+\ln(3)/2 & 0 & \ln(3)/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\ln(3)/2 & 0 & 1-\ln(3)/2 \end{pmatrix} .$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \cos(x)\, e^{-x^2} ,$$

esprimendola in termini del coseno iperbolico.

Soluzione del quinto problema

La funzione $f(x)$ è il prodotto di due funzioni che hanno trasformate di Fourier note

$$f(x) = \cos(x)e^{-x^2} = c(x)g(x) ,$$

la funzione coseno e la funzione gaussiana

$$c(x) = \cos(x) , \qquad g(x) = e^{-x^2} .$$

Per il teorema della convoluzione si ha

$$\mathscr{F}_k\left[f(x)\right] = \mathscr{F}_k\left[c(x)g(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[c(x)\right] * \mathscr{F}_k\left[g(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_{k-k'}\left[c(x)\right]\mathscr{F}_{k'}\left[g(x)\right] dk' .$$

La trasformata di Fourier della funzione coseno è

$$\mathscr{F}_k\left[c(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ix(1-k)}+e^{-ix(1+k)}\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(k-1)+\delta(k+1)\right] .$$

Mentre per la trasformata di Fourier della funzione gaussiana si ha

$$\mathscr{F}_k\left[g(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-ikx}dx = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x+ik/2)^2}dx = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}} .$$

In definitiva la trasformata di Fourier completa è

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k\left[f(x)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(k-k')^2/4}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(k'-1)+\delta(k'+1)\right]dk' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(k-k')^2/4}\left[\delta(k'-1)+\delta(k'+1)\right]dk' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(e^{-(k-1)^2/4}+e^{-(k+1)^2/4}\right) .\end{aligned}$$

Infine, riscrivendo la somma di esponenziali in termini del coseno iperbolico, si ottiene la forma cercata

$$\mathscr{F}_k\left[f(x)\right] = \frac{e^{-(k^2+1)/4}\cosh(k/2)}{\sqrt{2}} .$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

- Si dimostri che se $\hat{P}$ è un proiettore nello spazio di Hilbert E_3, di dimensione tre, anche $\hat{P}' = \hat{I} - \hat{P}$, dove $\hat{I}$ è l'operatore identità, è un proiettore.
- Si dimostri che, per ogni operatore $\hat{T} : E_3 \to E_3$, diverso dall'operatore nullo, l'operatore $\hat{O} = e^{\hat{T}}$ non è un proiettore.
- Dato il vettore

$$|q\rangle = q^k |e_k\rangle\,, \qquad (q^1, q^2, q^3) = (1, 0, i)\,,$$

dove $\{|e\rangle_k\}_{k=1}^3$ è una base ortonormale di E_3, si determinino le matrici Q e Q' che rappresentano il proiettore $\hat{Q}$ nella "direzione" di $|q\rangle$ e il proiettore complementare $\hat{Q}' = \hat{I} - \hat{Q}$. Si calcolino, infine, gli autovalori delle matrici trovate.

Soluzione del sesto Problema

- Dobbiamo dimostrare che l'operatore $\hat{P}' = \hat{I} - \hat{P}$ è idempotente ed hermitiano, sapendo che $\hat{P}$ è un proiettore, ovvero che è esso stesso idempotente ed hermitiano. Calcoliamo l'aggiunto di $\hat{P}'$ per dimostrare che coincide con lo stesso $\hat{P}'$, si ha infatti

$$\hat{P}'^{\dagger} = \left(\hat{I} - \hat{P}\right)^{\dagger} = \hat{I}^{\dagger} - \hat{P}^{\dagger} = \hat{I} - \hat{P} = \hat{P}'\,.$$

La penultima identità segue dal fatto che sia l'operatore identità che il proiettore $\hat{Q}$ sono hermitiani. Calcoliamo $\hat{P}'^2$ e verifichiamo l'idempotenza

$$\hat{P}'^2 = \left(\hat{I} - \hat{P}\right)\left(\hat{I} - \hat{P}\right) = \hat{I}^2 - 2\hat{I}\hat{P} - \hat{P}^2 = \hat{I} - 2\hat{P} + \hat{P} = \hat{I} - \hat{P} = \hat{P}'\,,$$

dove si sono usati l'idempotenza di $\hat{P}$ e $\hat{I}$, e il fatto che l'operatore identità commuti con ogni operatore.

- Per dimostrare che l'operatore $\hat{O} = e^{\hat{T}}$ non è un proiettore è sufficiente verificare che non è idempotente. A tal fine basta osservare che

$$\hat{O}^2 = e^{\hat{T}} e^{\hat{T}} = e^{\hat{2T}} \neq e^{\hat{T}} = \hat{O}\,.$$

L'ultima disuguaglianza deriva dalla $2\hat{T} \neq \hat{T}$, valida per ogni $\hat{T}$ diverso dall'operatore nullo, come richiesto. Inoltre, sotto questa condizione, l'operatore $\hat{O} = e^{\hat{T}}$ è sempre invertibile, $\hat{O}^{-1} = e^{-\hat{T}}$, quindi, essendo diverso dall'identità (si avrebbe $\hat{O} = \hat{I}$ solo se $\hat{T}$ fosse l'operatore nullo), non è un proiettore.

- Il vettore $|q\rangle$ non è normalizzato, infatti,

$$||q|| = \sqrt{\langle q|q\rangle} = \sqrt{2}\,.$$

Per costruire il proiettore come un operatore *ket-bra* è necessario normalizzarlo, ovvero usiamo il vettore unitario $|q'\rangle = |q\rangle/\sqrt{\langle q|q\rangle}$. Si ha, quindi, il proiettore

$$\hat{Q} = |q'\rangle\langle q'| = \frac{|q\rangle\langle q|}{\langle q|q\rangle}\,.$$

La matrice Q, che rappresenta l'operatore $\hat{Q}$ rispetto alla base ortonormale data $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$, ha elementi

$$Q^k_{\ m} = \langle e_k|\hat{Q}|e_m\rangle = \langle e_k|q'\rangle\langle q'|e_m\rangle\,, \qquad k, m = 1, 2, 3\,.$$

In termini delle componenti $q'^j = \langle e_j|q'\rangle = \langle e_j|q\rangle/\sqrt{2} = q^j/\sqrt{2}$, con $j = 1, 2, 3$, avremo

$$Q^k_{\ m} = \langle e_k|q'\rangle\langle q'|e_m\rangle = (q'^k)^* q'^m = \frac{(q^k)^* q^m}{2}\,, \qquad k, m = 1, 2, 3\,.$$

Usando i valori numerici delle componenti, $(q^1, q^2, q^3) = (1, 0, i)$, si ottiene la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & i/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\,.$$

La matrice Q' è data dalla differenza $Q' = I - Q$, dove I è la matrice indentità 3×3, ovvero

$$Q' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di Q si ottengono come soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det(Q - xI) = \begin{pmatrix} 1/2 - x & 0 & i/2 \\ 0 & -x & 0 \\ -i/2 & 0 & 1/2 - x \end{pmatrix} ,$$

e sono:

$$x_1 = 0 , \qquad x_2 = 0 , \qquad x_3 = 1 .$$

Allo stesso modo, gli autovalori di Q' si ottengono come soluzioni dell'equazione caratteristica

$$0 = \det\left(Q' - yI\right) = \begin{pmatrix} 1/2 - y & 0 & -i/2 \\ 0 & 1 - y & 0 \\ i/2 & 0 & 1/2 - y \end{pmatrix} ,$$

e sono:

$$y_1 = 1 , \qquad y_2 = 1 , \qquad y_3 = 0 .$$