

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

PROVA SCRITTA DEL 18 SETTEMBRE 2020

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\Psi = \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(x)}{(x^4 - 1)(x^2 + 1)} dx.$$

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Esprimendo la funzione seno come parte immaginaria della fase corrispondente, cioè $\operatorname{Im}(e^{ix}) = \operatorname{sen}(x)$, riscriviamo l'integrale come

$$\Psi = \operatorname{Im} \left(\text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(x^4 - 1)(x^2 + 1)} dx \right),$$

fattorizzando in modo opportuno i polinomi a denominatore della funzione integranda otteniamo

$$\Psi = \operatorname{Im} \left(\text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)^2} dx \right).$$

È immediato realizzare che essa possiede due poli semplici nei punti $z_{1,2} = \pm 1$ e due poli doppi in $z_{3,4} = \pm i$. Il valore principale è calcolato sui primi due poli in quanto appartenenti al percorso d'integrazione, ovvero l'asse reale. Possiamo ulteriormente semplificare la funzione integranda, esprimendola come somma di due funzioni e separando così i poli su cui considerare il valore principale, cioè

$$\Psi = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x - 1)(x^2 + 1)^2} dx + \text{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x + 1)(x^2 + 1)^2} dx \right),$$

infatti, ciascuna delle due funzioni integrande ha un solo polo reale, cioè una sola singolarità appartenente al percorso di integrazione.

Usiamo la formula di Sokhotski-Plemelj per entrambi gli integrali "spostando" le singolarità dall'asse reale al semipiano delle parti immaginarie negative, ovvero aggiungiamo $-i\epsilon$ ai poli, di conseguenza si ha

$$\Psi = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x - 1 + i\epsilon)(x^2 + 1)^2} dx + i\pi \frac{e^i}{4} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x + 1 + i\epsilon)(x^2 + 1)^2} dx + i\pi \frac{e^{-i}}{4} \right),$$

dove gli integrali non sono più in valore principale e vengono sommati i valori delle funzioni integrande, private dei poli semplici e in essi valutate, si tratta dei due termini $i\pi e^i/4$ e $i\pi e^{-i}/4$.

Calcoliamo gli integrali usando il lemma di Jordan, che, conseguentemente al segno positivo delle fasi, implica la somma dei residui dei poli appartenenti al semipiano delle parti immaginarie positive, si ha

$$\Psi = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{(z - 1 + i\epsilon)(z^2 + 1)^2}, z = i \right] + 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{e^{iz}}{(z + 1 + i\epsilon)(z^2 + 1)^2}, z = i \right] + i\pi \frac{\cos(1)}{2} \right),$$

la funzione coseno valutata in 1 è data dalla somma dei due termini $i\pi e^i/4$ e $i\pi e^{-i}/4$. Per la linearità della definizione di residuo, che segue da quella di integrale, possiamo esprimere la somma dei residui delle due funzioni nello stesso punto, come il residuo della somma delle funzioni, estraendo, inoltre, la parte immaginaria, si ottiene

$$\Psi = \pi \operatorname{Re} \left(\operatorname{Res} \left[\frac{2ze^{iz}}{(z^2-1)(z^2+1)^2}, z=i \right] \right) + \pi \frac{\cos(1)}{4}.$$

Poiché $z=i$ rappresenta un polo doppio, il residuo è dato dalla derivata prima della funzione privata del polo e in esso valutata, cioè

$$\begin{aligned} \Psi &= 2\pi \operatorname{Re} \left(\left. \frac{d}{dz} \frac{ze^{iz}}{(z^2-1)(z+i)^2} \right|_{z=i} \right) + \pi \frac{\cos(1)}{4} \\ &= 2\pi \left(\underbrace{\frac{(iz+1)e^{iz}}{(z^2-1)(z+i)^2}}_{=0} - \underbrace{\frac{2z^2e^{iz}}{(z^2-1)^2(z+i)^2}}_{=-e^{-1}/8} - \underbrace{\frac{2ze^{iz}}{(z^2-1)(z+i)^3}}_{=-e^{-1}/8} \right) \Big|_{z=i} + \pi \frac{\cos(1)}{4}, \end{aligned}$$

si arriva così al risultato finale

$$\Psi = -\frac{\pi e^{-1}}{2} + \pi \frac{\cos(1)}{4} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\cos(1)}{2} - \frac{1}{e} \right).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\chi = \operatorname{Pr} \int_0^{2\pi} \frac{(\operatorname{sen}(\beta) + 1)^3}{2 \cos(\beta) - 1} d\beta.$$

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

Con la sostituzione $z = e^{i\beta}$, si ottiene l'integrale sulla circonferenza unitaria del piano complesso z ,

$$\chi = \operatorname{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{(z-1/z+2i)^3 / (2i)^3}{z+1/z-1} \left(-i \frac{dz}{z} \right) = \frac{1}{8} \operatorname{Pr} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2+2iz-1)^3 dz}{z^2-z+1} \frac{dz}{z^3}.$$

Il valore principale si riferisce ai due poli semplici che la funzione integranda ha lungo il percorso d'integrazione. Questi coincidono con gli zeri del polinomio di secondo grado a denominatore, sono $z_1 = e^{i\pi/3}$ e $z_2 = e^{5i\pi/3}$, o equivalentemente $z_{1,2} = e^{\pm i\pi/3}$, per cui si ha $z_1 = z_2^*$. Infatti, non essendoci funzioni polidrome per le quali determinazioni diverse darebbero valori e quindi risultati diversi, è lecito considerare alla bisogna o l'una o l'altra determinazione. Consideriamo il percorso Γ_ϵ mostrato in figura, ovvero la circonferenza unitaria "dentata" internamente in corrispondenza dei poli semplici z_1 e z_2 , indicati con il simbolo "x". Il percorso chiuso Γ_ϵ è l'unione di quattro archi, due aventi centro nell'origine di raggio unitario e angoli sottomultipli di $2\pi/3$ e $4\pi/3$, ovvero

$$\{z : z = e^{i\theta}, \theta \in (-\pi/3, \pi/3)\}, \quad \{z : z = e^{i\theta}, \theta \in (\pi/3, 5\pi/3)\},$$

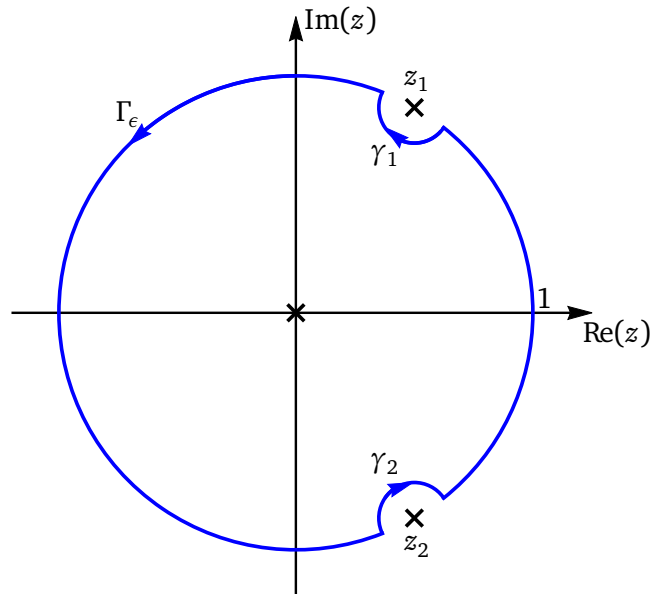
e gli archi infinitesimi di centri nei poli z_1 e z_2 , raggio ϵ e angolo sotteso π ,

$$\gamma_1 = \{z : z = z_1 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (2\pi/3, 5\pi/3)\}, \quad \gamma_2 = \{z : z = z_2 + \epsilon e^{i\theta}, \theta \in (\pi/6, 7\pi/6)\},$$

tutti gli angoli sono indicati a meno di infinitesimi di ordine ϵ per $\epsilon \rightarrow 0^+$.

La funzione integranda ha, in aggiunta ai poli semplici z_1 e z_2 , un polo triplo nell'origine, anch'esso indicato in figura con il simbolo "x". L'integrale sul percorso chiuso Γ_ϵ , nel limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, può essere espresso sia come somma dei contributi sui quattro archi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{(z^2+2iz-1)^3 dz}{z^2-z+1} \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{8} \operatorname{Pr} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{(z^2+2iz-1)^3 dz}{z^2-z+1} \frac{dz}{z^3} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{(z^2+2iz-1)^3 dz}{z^2-z+1} \frac{dz}{z^3},$$



che, usando il teorema dei residui, come

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8} \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^2 - z + 1} \frac{dz}{z^3} = \frac{i\pi}{4} \operatorname{Res} \left[\frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^3(z^2 - z + 1)}, z = 0 \right].$$

Dall'identità delle due espressioni dei secondi membri si ha infine l'integrale in valore principale cercato

$$\chi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^2 - z + 1} \frac{dz}{z^3} + \frac{i\pi}{4} \operatorname{Res} \left[\frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^3(z^2 - z + 1)}, z = 0 \right] = \chi_1 + \chi_2,$$

con

$$\chi_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8} \int_{\gamma_1} \frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^2 - z + 1} \frac{dz}{z^3}, \quad \chi_2 = \frac{i\pi}{4} \operatorname{Res} \left[\frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^3(z^2 - z + 1)}, z = 0 \right].$$

Calcoliamo χ_1 usando il lemma per l'integrazione sugli archi infinitesimi,

$$\chi_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8} \int_{\gamma_{1,2}} \frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^2 - z + 1} \frac{dz}{z^3} = \frac{i\pi A_{1,2}}{8},$$

dove $A_{1,2}$ rappresenta il valore limite

$$A_{1,2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^2 - z + 1} \frac{(z - z_{1,2})}{z^3} = \frac{(z_{1,2}^2 + 2iz_{1,2} - 1)^3}{\pm(z_1 - z_2)z_{1,2}^3}.$$

Per ottenerne il valore numerico usiamo le definizioni

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_{1,2} - \frac{1}{z_{1,2}} = 2i \operatorname{sen} \left(\pm \frac{\pi}{3} \right) = \pm i\sqrt{3},$$

da cui

$$A_{1,2} = \frac{(z_{1,2} - 1/z_{1,2} + 2i)^3}{\pm i\sqrt{3}} = \mp \frac{(2 \pm \sqrt{3})^3}{\sqrt{3}} = -15 \pm \frac{26}{\sqrt{3}},$$

quindi χ_1 , il primo termine della somma che dà l'integrale in valore principale χ , vale

$$\chi_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{8} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^2 - z + 1} \frac{dz}{z^3} = i\pi \frac{A_1 + A_2}{8} = -\frac{15i\pi}{4}.$$

Per calcolare il secondo termine χ_2 , ovvero il residuo nell'origine, usiamo gli sviluppi in serie noti dei tre fattori della funzione integranda per ottenere la serie di Laurent centrata nell'origine e convergente nella corona circolare centrata in essa con raggio interno nullo e da questa estraiamo il coefficiente della potenza z^{-1} . In particolare si ha

$$\begin{aligned} \frac{(z^2 + 2iz - 1)^3}{z^3(z^2 - z + 1)} &= \frac{1}{z^3} (z^2 + 2iz - 1)^3 [1 + (z - z^2) + (z - z^2)^2 + \mathcal{O}((z - z^2)^3)] \\ &= \frac{1}{z^3} (z^6 + 6iz^5 - 15z^4 - 20iz^3 + 15z^2 + 6iz - 1) [1 + (z - z^2) + (z - z^2)^2 + \mathcal{O}((z - z^2)^3)] \\ &= \frac{1}{z^3} (z^6 + 6iz^5 - 15z^4 - 20iz^3 + 15z^2 + 6iz - 1) (1 + z + \mathcal{O}(z^3)) \\ &= \frac{1}{z^3} [\dots + z^2(15 + 6i) + \dots] \\ &= \dots + \frac{1}{z} (15 + 6i) + \dots, \end{aligned}$$

ne consegue che

$$\chi_2 = \frac{i\pi}{4} (15 + 6i)$$

e il risultato finale è

$$\chi = \chi_1 + \chi_2 = -\frac{15i\pi}{4} + \frac{i\pi}{4} (15 + 6i) = -\frac{3\pi}{2}.$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga la serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)^4}{z^5(z^6 + z^3 + 1)},$$

con centro nell'origine e convergente nella corona circolare di raggio interno nullo.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione è meromorfa, ha un polo di ordine cinque nell'origine e sei poli semplici nei punti coincidenti con gli zeri del polinomio di sesto grado a denominatore. In particolare si ha che tale polinomio si annulla per $z^3 = z_{1,2}^3$, con

$$z_{1,2}^3 = e^{\pm 2i\pi/3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Ne consegue che la corona circolare di raggio interno nullo in cui converge la serie di Laurent centrata nell'origine ha raggio esterno

$$r_e = \min \{|z_1^3|^{1/3}, |z_2^3|^{1/3}\} = \min \{1, 1\} = 1,$$

e quindi la corona è definita come

$$C_0(0, 1) = \{z : 0 < |z| < 1\},$$

si tratta del cerchio unitario privato del centro, cioè dell'origine.

Alla luce di questo risultato, scriviamo la funzione come

$$f(z) = \frac{(z^2 + 1)^4}{z^5} \left(\frac{1}{z^3 - z_1^3} - \frac{1}{z^3 - z_2^3} \right) \frac{1}{z_1^3 - z_2^3} = \frac{(z^2 + 1)^4}{z^5} \left(\frac{1/z_2^3}{1 - z^3/z_2^3} - \frac{1/z_1^3}{1 - z^3/z_1^3} \right) \frac{1}{i\sqrt{3}},$$

poiché consideriamo $z \in C_0(0, 1)$, che implica: $|z^3/z_{1,2}^3| = |z|^3 < 1$, i due termini della differenza che compare nelle seconde parentesi tonde come proporzionali, tramite i coefficienti $1/z_{1,2}^3$, alle somme di due serie geometriche di ragioni $z^3/z_{1,2}^3$. Usando i valori espliciti: $z_{1,2}^3 = e^{\pm 2i\pi/3}$, si ha

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z^2 + 1)^4}{z^5} \left(\frac{1}{z_2^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^3}{z_2^3} \right)^k - \frac{1}{z_1^3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^3}{z_1^3} \right)^k \right) \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{i\sqrt{3}} (z^2 + 1)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z_2^{3(k+1)}} - \frac{1}{z_1^{3(k+1)}} \right) z^{3k-5} \\ &= \frac{1}{i\sqrt{3}} (z^2 + 1)^4 \sum_{k=0}^{\infty} (e^{2i\pi(k+1)/3} - e^{-2i\pi(k+1)/3}) z^{3k-5} = \frac{2}{\sqrt{3}} (z^2 + 1)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right) z^{3k-5}. \end{aligned}$$

Sviluppando la quarta potenza del binomio si arriva alla somma di cinque serie,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2}{\sqrt{3}} (1 + 4z^2 + 6z^4 + 4z^6 + z^8) \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right) z^{3k-5} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right) z^{3k-5} + \sum_{k=0}^{\infty} 4 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right) z^{3k-3} + \sum_{k=0}^{\infty} 6 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right) z^{3k-1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} 4 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right) z^{3k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(k+1)}{3} \right) z^{3k+3} \right), \end{aligned}$$

ciascuna delle quali può essere posta nella forma canonica

$$f(z) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sum_{n=-5}^{\infty} B_n^{(1)} z^n + \sum_{n=-3}^{\infty} B_n^{(2)} z^n + \sum_{n=-1}^{\infty} B_n^{(3)} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(4)} z^n + \sum_{n=3}^{\infty} B_n^{(5)} z^n \right),$$

ovvero nella forma in cui l'indice di somma coincide con la potenza della z , l'insieme $\{B_n^{(j)}\}_{n=-7+2j}^{\infty}$ contiene i coefficienti di Laurent della j -esima serie, con $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Dalle definizioni delle serie si evince che le potenze presenti in ciascuna di esse variano di tre in tre, ne consegue che non tutti i coefficienti di Laurent dei precedenti insiemi sono diversi da zero, in particolare si hanno le leggi multiple

$$\begin{aligned} B_n^{(1)} &= \begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi(k+1)/3) & \text{se } n+5 = 3k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \\ B_n^{(2)} &= \begin{cases} 4 \operatorname{sen}(2\pi(k+1)/3) & \text{se } n+3 = 3k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \\ B_n^{(3)} &= \begin{cases} 6 \operatorname{sen}(2\pi(k+1)/3) & \text{se } n+1 = 3k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \\ B_n^{(4)} &= \begin{cases} 4 \operatorname{sen}(2\pi(k+1)/3) & \text{se } n-1 = 3k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \\ B_n^{(5)} &= \begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi(k+1)/3) & \text{se } n-3 = 3k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \end{aligned}$$

che possono essere raccolte nell'unica definizione

$$B_n^{(j)} = \begin{cases} \binom{4}{j-1} \operatorname{sen}(2\pi(k+1)/3) & \text{se } n+7-2j = 3k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

La forma finale è

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m z^m,$$

con i coefficienti di Laurent

$$C_m = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^5 B_m^{(j)}.$$

In particolare si ha che il coefficiente non nullo con indice minore è il "-5" ed è uguale a uno, infatti

$$C_{-5} = \frac{2}{\sqrt{3}} B_{-5}^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1.$$

Il coefficiente "-1", che rappresenta il residuo della funzione nell'origine è invece

$$C_{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^5 B_{-1}^{(j)} = \frac{2}{\sqrt{3}} (B_{-1}^{(1)} + B_{-1}^{(2)} + B_{-1}^{(3)}),$$

i coefficienti $B_n^{(4)}$ e $B_n^{(5)}$, con $n = -1$, non sono presenti in quanto sono non nulli rispettivamente solo per $n \geq 1$ e $n \geq 3$. Inoltre $B_{-1}^{(1)} = B_{-1}^{(2)} = 0$ poiché né $n + 5 = 4$ né $n + 3 = 2$ sono multipli di 3, rimane solo $B_{-1}^{(3)}$, che è diverso dallo zero, infatti $n + 1 = 0 = 3k$ per $k = 0$, quindi

$$C_{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} B_{-1}^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{3}} 6 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6.$$

Si osserva che al più un coefficiente C_l è la somma di due coefficienti $B_l^{(j)}$, in quanto l'insieme $\{l - 3, l - 1, l + 1, l + 3, l + 5\}$, che contiene cinque interi ordinati che differiscono per due unità, può contenere al massimo due multipli di tre. Si consideri il caso più favorevole in cui $l - 3$ sia un multiplo di tre, allora i multipli successivi sarebbero: $l, l + 3, l + 6, l + 9, \dots$, solo $l + 3$ appartiene all'insieme. Se, invece, fosse $l - 1$ il multiplo di tre, avremmo che nessuno dei multipli precedenti $\dots, l - 5$ e $l - 2$ apparterebbe all'insieme, che ha come primo elemento $l - 3$, mentre dei successivi $l + 2, l + 5, l + 8, \dots$, solo $l + 5$ apparterebbe all'insieme. Infine se $l + 1$ fosse multiplo di tre, allora, nessuno dei multipli precedenti, $\dots, l - 5, l - 2$ e nessuno dei successivi, $l + 4, l + 7, \dots$, apparterebbero all'insieme. C'è solo un caso in cui, pur avendo $l \geq -5$, si ha $C_l = 0$, è quello del coefficiente con $l = -4$, infatti avremo

$$C_{-4} = \frac{2}{\sqrt{3}} B_{-4}^{(1)},$$

gli altri contributi $B_{-4}^{(2)}, B_{-4}^{(3)}, B_{-4}^{(4)}$ e $B_{-4}^{(5)}$ sono nulli in quanto non verificano le rispettive condizioni $l = -4 \geq -3$, $l = -4 \geq -1$, $l = -4 \geq 1$, $l = -4 \geq 3$. Il coefficiente $B_{-4}^{(1)}$ è nullo perché $l + 5 = 1$ non è un multiplo di tre, quindi $C_{-4} = 0$.

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Nello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 si consideri la base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ e i sei operatori di permutazione delle componenti rispetto a tale base, elementi dell'insieme $\{\hat{P}_{(j)}\}_{j=1}^6$, definiti, cioè, dalle azioni

$$\hat{P}_{(j)}|e_k\rangle = |e_{p_j(k)}\rangle, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad k = 1, 2, 3,$$

dove p_j rappresenta la j -esima permutazione. Ad esempio, la prima permutazione non banale, ovvero diversa dall'identità, potrebbe consistere nello scambio degli ultimi due indici, il secondo con il terzo. Usando il primo indice $j = 1$ per l'identità, ovvero: $p_1(1) = 1, p_1(2) = 2, p_1(3) = 3$, indichiamo con p_2 la permutazione precedentemente descritta, che scambia gli ultimi due indici, per cui si ha: $p_2(1) = 1, p_2(2) = 3, p_2(3) = 2$. Allora, l'azione dell'operatore corrispondente $\hat{P}_{(2)}$ su un generico vettore $|\nu\rangle \in E_3$, che ha la rappresentazione $|\nu\rangle = \nu^k|e_k\rangle$ rispetto alla base data, dà un vettore che ha la stessa prima componente, per seconda la terza e per terza la seconda del vettore originale $|\nu\rangle$, si ha cioè

$$\hat{P}_{(2)}|\nu\rangle = \hat{P}_{(2)}\nu^k|e_k\rangle = \nu^k|e_{p_2(k)}\rangle = \nu^1|e_1\rangle + \nu^3|e_2\rangle + \nu^2|e_3\rangle.$$

La rappresentazione matriciale dell'operatore $\hat{P}_{(2)}$, che agisce sui vettori della base come

$$\hat{P}_{(2)}|e_1\rangle = (P_{(2)})_1^k|e_k\rangle = |e_1\rangle, \quad \hat{P}_{(2)}|e_2\rangle = (P_{(2)})_2^k|e_k\rangle = |e_3\rangle, \quad \hat{P}_{(2)}|e_3\rangle = (P_{(2)})_3^k|e_k\rangle = |e_2\rangle,$$

dove $(P_{(j)})_m^k$ indica l'elemento della k -esima riga ed m -esima colonna della matrice che rappresenta il j -esimo operatore di permutazione, è, di conseguenza,

$$\hat{P}_{(2)} \stackrel{\epsilon}{\leftrightarrow} P_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver classificato i sei operatori di permutazione dell'insieme $\{\hat{P}_{(j)}\}_{j=1}^6$, se ne ottengono le rappresentazioni matriciali rispetto alla base data, gli spettri discreti, i determinanti e le tracce. Infine, per almeno due di essi, si determinino anche gli autovettori.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Le matrici che rappresentano i sei operatori di permutazione sono

$$P_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli operatori e quindi le matrici che li rappresentano sono invertibili, in primo luogo perché definiscono operazioni reversibili, in quanto si limitano a permutare le componenti senza portare ad alcuna perdita di informazione. Le matrici hanno tutte rango pari a tre, in particolare hanno determinanti uguali o all'unità, ovvero al suo opposto, infatti

$$\det(P_{(1)}) = \det(P_{(4)}) = \det(P_{(5)}) = 1, \quad \det(P_{(2)}) = \det(P_{(3)}) = \det(P_{(6)}) = -1.$$

Le tracce sono

$$\text{Tr}(P_{(1)}) = 3, \quad \text{Tr}(P_{(2)}) = \text{Tr}(P_{(3)}) = \text{Tr}(P_{(6)}) = 1, \quad \text{Tr}(P_{(4)}) = \det(P_{(5)}) = 0.$$

È immediato osservare come la permutazione inversa di una data permutazione è rappresentata dalla matrice trasposta di quella che rappresenta permutazione iniziale, ne consegue che

$$P_{(j)}P_{(j)}^T = P_{(j)}^T P_{(j)} = I, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

dove I rappresenta la matrice identità.

Poiché le matrici hanno elementi reali, la matrice trasposta coincide con la matrice aggiunta, da cui si evince che

le matrici e quindi gli operatori di permutazione da esse rappresentati sono unitari. Infatti, come visto, i moduli dei determinanti sono pari all'unità. L'unitarietà degli operatori di permutazione implica che essi abbiano come autovalori delle fasi pure, ovvero dei numeri complessi di modulo unitario. Indicando $\sigma_j = \{\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \lambda_3^{(j)}\}$ lo spettro discreto del j -esimo operatore di proiezione, con $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, avremo che: $\sigma_1 = \{1, 1, 1\}$. Per gli altri operatori risolviamo le equazioni secolari:

$$\det(P_{(2)} - I\lambda) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1^{(2)} = -1 \\ \lambda_2^{(2)} = 1 \\ \lambda_3^{(2)} = 1 \end{cases},$$

$$\det(P_{(3)} - I\lambda) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (\lambda^2-1)(1-\lambda) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1^{(3)} = -1 \\ \lambda_2^{(3)} = 1 \\ \lambda_3^{(3)} = 1 \end{cases},$$

$$\det(P_{(4)} - I\lambda) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies 1-\lambda^3 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1^{(4)} = 1 \\ \lambda_2^{(4)} = e^{-2i\pi/3} \\ \lambda_3^{(4)} = e^{2i\pi/3} \end{cases},$$

$$\det(P_{(5)} - I\lambda) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies 1-\lambda^3 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1^{(5)} = 1 \\ \lambda_2^{(5)} = e^{-2i\pi/3} \\ \lambda_3^{(5)} = e^{2i\pi/3} \end{cases},$$

$$\det(P_{(6)} - I\lambda) = 0 \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \implies (1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0 \implies \begin{cases} \lambda_1^{(6)} = -1 \\ \lambda_2^{(6)} = 1 \\ \lambda_3^{(6)} = 1 \end{cases},$$

ne consegue che gli spettri discreti sono: $\sigma_1 = \{1, 1, 1\}$, $\sigma_2 = \{-1, 1, 1\}$, $\sigma_3 = \{-1, 1, 1\}$, $\sigma_4 = \{1, e^{-2i\pi/3}, e^{2i\pi/3}\}$, $\sigma_5 = \{1, e^{-2i\pi/3}, e^{2i\pi/3}\}$ e $\sigma_6 = \{-1, 1, 1\}$. Indichiamo con $|u_k^{(j)}\rangle$ il k -esimo autovettore del j -esimo operatore permutazione $\hat{P}_{(j)}$ e con $u_k^{(j)}$ il vettore colonna che lo rappresenta rispetto alla base data, con $k = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Nel caso dell'identità, $\hat{P}_{(1)} = I$, avremo

$$u_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ovviamente, poiché si ha massima degenerazione, ogni combinazione lineare di questi autovettori è ancora un autovettore con lo stesso autovalore. Proprietà ben nota dell'operatore identità.

Nel caso del secondo operatore di permutazione le componenti degli autovettori si ottengono come soluzioni dei tre sistemi

$$P^{(2)}u_k^{(2)} = \lambda_k^{(2)}u_k^{(2)} \implies \begin{pmatrix} 1-\lambda_k^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_k^{(2)} & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda_k^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

con gli autovalori $(\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \lambda_3^{(2)}) = (-1, 1, 1)$ e dove, per economia di notazione, abbiamo indicato con x_k , y_k e z_k le componenti contro-varianti del k -esimo autovettore. La prima di esse, x_k , è nulla se l'autovalore è diverso dall'unità, in virtù della prima equazione, mentre, in tutti gli altri casi, non è determinata e può essere scelta arbitrariamente. La seconda e terza componente sono proporzionali tramite lo stesso autovalore. Ne consegue che una terna di autovettori ortonormali è

$$u_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In base a considerazioni simili, per il terzo operatore $\hat{P}^{(3)}$ si hanno gli autovettori

$$u_1^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'operatore $\hat{P}^{(4)}$ non è degenere, ha tre autovalori distinti, dai sistemi che hanno come soluzioni le componenti degli autovettori si ottengono le equazioni: $y_k = \lambda_k^{(4)} x_k$ e $z_k = (\lambda_k^{(4)})^2 x_k$, con $k = 1, 2, 3$, quindi, posto $x_k = 1$ per ogni k , si hanno

$$u_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2i\pi/3} \\ e^{-4i\pi/3} \end{pmatrix}, \quad u_3^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2i\pi/3} \\ e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}.$$

Anche l'operatore $\hat{P}^{(5)}$ non è degenere, ha, infatti, gli stessi autovalori distinti dell'operatore precedente. I sistemi che hanno come soluzioni le componenti degli autovettori danno le equazioni: $y_k = x_k / \lambda_k^{(5)}$ e $z_k = \lambda_k^{(5)} x_k$, con $k = 1, 2, 3$, quindi, posto anche in questo caso $x_k = 1$ per ogni k , avremo

$$u_1^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2i\pi/3} \\ e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix}, \quad u_3^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2i\pi/3} \\ e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}.$$

Infine, per $\hat{P}^{(6)}$, seguendo quanto fatto per il secondo e terzo operatore, con i quali $\hat{P}^{(6)}$ condivide lo spettro discreto, si hanno

$$u_1^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si dimostri l'identità

$$\Gamma(1-z) \operatorname{sen} \left(\frac{z\pi}{2} \right) = \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^z} dt,$$

con $\operatorname{Re}(z) \in (0, 1)$.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

La rappresentazione integrale della funzione Gamma di Eulero è

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s} s^{z-1} ds$$

e ha dominio di convergenza $D = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$, ovvero il semipiano delle parti reali positive. Sviluppamo l'integrale scrivendo la funzione coseno in termini degli esponenziali

$$\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{t^z} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{it} + e^{-it}}{t^z} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{it} t^{-z} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-it} t^{-z} dt = \frac{G_+ + G_-}{2},$$

dove si sono definiti i due integrali

$$G_\pm = \int_0^\infty e^{\pm it} t^{-z} dt.$$

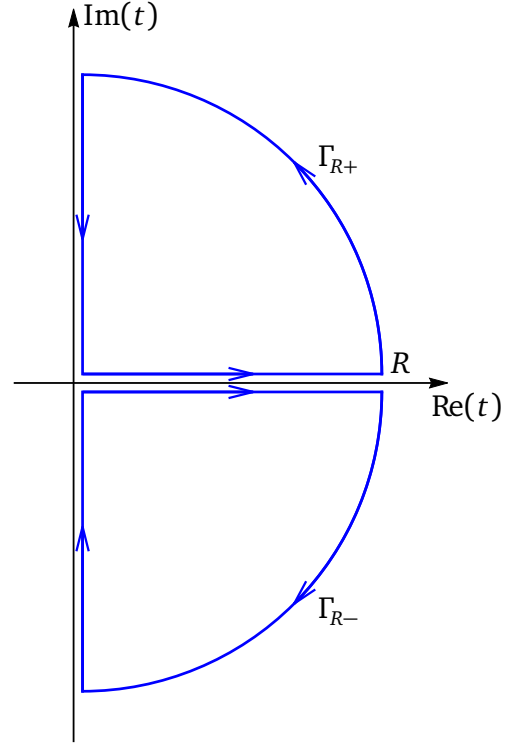
Consideriamo i due percorsi chiusi Γ_{R+} e Γ_{R-} mostrati in figura, immersi rispettivamente nel primo e quarto quadrante del piano complesso t e composti dall'unione di un arco e due tratti rettilinei sovrapposti ai semiasse reale positivo e immaginario positivo, Γ_{R+} , e negativo, Γ_{R-} . In particolare, indicando con $S[z_1, z_2]$ il tratto rettilineo di estremi z_1 e z_2 , orientato nel verso che va dal primo al secondo estremo, si hanno

$$\Gamma_{R+} = S[0, r] \cup \{t : t = Re^{i\theta}, \theta \in (0, \pi/2)\} \cup S[iR, 0],$$

$$\Gamma_{R-} = S[0, r] \cup (-\{t : t = Re^{i\theta}, \theta \in (-\pi/2, 0)\}) \cup S[-iR, 0],$$

l'arco di Γ_{R-} è orientato in verso negativo, da cui il segno meno. Inoltre, si è scelta la determinazione principale $(-\pi, \pi)$ al fine di mantenere la continuità sul semiasse reale positivo. Ciò implica che gli integrali sui tratti orizzontali dei due percorsi siano identici pur se calcolati su tratti appartenenti l'uno al bordo superiore e l'altro a quello inferiore dello stesso semiasse. Per il teorema di Cauchy e per ogni valore di $R > 0$, gli integrali sui percorsi Γ_{R+} e Γ_{R-} delle funzioni integrande di G_+ e G_- sono nulli, cioè

$$\oint_{\Gamma_{R\pm}} e^{\pm it} t^{-z} dt = 0.$$



D'altro canto, possiamo decomporre gli integrali nella somma dei tre contributi, due relativi ai tratti rettilinei e uno all'arco, si ha

$$0 = \oint_{\Gamma_{R\pm}} e^{\pm it} t^{-z} dt = \int_0^R e^{\pm it} t^{-z} dt + \int_{\pm\gamma_{R\pm}} e^{\pm it} t^{-z} dt + \int_{S[\pm iR, 0]} e^{\pm it} t^{-z} dt,$$

dove abbiamo indicato con $\gamma_{R\pm}$ l'arco appartenente al percorso chiuso $\Gamma_{R\pm}$, ovvero

$$\gamma_{R+} = \{t : t = Re^{i\theta}, \theta \in (0, \pi/2)\}, \quad \gamma_{R-} = \{t : t = Re^{i\theta}, \theta \in (-\pi/2, 0)\}.$$

Dimostriamo che nel limite $R \rightarrow \infty$ il primo integrale tende all'integrale G_{\pm} , il secondo si annulla, mentre il terzo tende ad una quantità proporzionale alla funzione Gamma di Eulero.

La verifica del primo risultato è immediata come conseguenza delle condizioni di convergenza, che è garantita dalla limitazione $\text{Re}(z) \in (0, 1)$, cioè

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{\pm it} t^{-z} dt = \int_0^{\infty} e^{\pm it} t^{-z} dt = G_{\pm}.$$

L'annullamento del limite del secondo integrale si può verificare usando gli stessi argomenti su cui si basa la dimostrazione del lemma di Jordan. In particolare, la funzione integranda è il prodotto di una fase, che è positiva nel caso in cui si integra sull'arco immerso nel semipiano delle parti immaginarie positive, negativa quando l'arco è invece immerso nel semipiano delle parti immaginarie negative e la funzione t^{-z} . Quest'ultima sugli archi γ_{R+} e γ_{R-} , al divergere del raggio R tende uniformemente allo zero. Lo verifichiamo considerando il limite del modulo della stessa funzione, poniamo $t = Re^{i\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi)$, così da trattare entrambi gli archi contemporaneamente, si ha

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |t^{-z}| = \lim_{R \rightarrow \infty} |(Re^{i\theta})^{-z}| = \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\text{Re}(z)} e^{\theta \text{Im}(z)} \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \underbrace{e^{\pi |\text{Im}(z)|} R^{-\text{Re}(z)}}_{=\mu_R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \mu_R = 0,$$

l'annullamento si ha come conseguenza della condizione $\text{Re}(z) \in (0, 1)$. L'esistenza della funzione μ_R , reale, infinitesima nel limite $R \rightarrow \infty$ e tale da minorare i valori del modulo della funzione t^{-z} sugli archi γ_{R+} e γ_{R-} , garantisce la convergenza uniforme richiesta dal lemma di Jordan.

Il terzo integrale può essere riscritto con la sostituzione $t = \pm ia$, ovvero $a = \mp it$, cosicché la nuova variabile

d'integrazione a sia reale, si hanno cioè

$$\int_{S[iR,0]} e^{it} t^{-z} dt = \{t = ia, a = -it\} = i \int_R^0 e^{-a} (ia)^{-z} da = -i^{1-z} \int_0^R e^{-a} a^{-z} da = -e^{i\pi(1-z)/2} \int_0^R e^{-a} a^{-z} da,$$

$$\int_{S[-iR,0]} e^{-it} t^{-z} dt = \{t = -ia, a = it\} = -i \int_R^0 e^{-a} (-ia)^{-z} da = -(-i)^{1-z} \int_0^R e^{-a} a^{-z} da = -e^{-i\pi(1-z)/2} \int_0^R e^{-a} a^{-z} da,$$

dove si è usata la determinazione principale scelta nel definire $-i = e^{-i\pi/2}$, anziché $-i = e^{3i\pi/2}$, che si avrebbe se la determinazione principale fosse $(0, 2\pi)$.

I limiti di questi integrali al divergere di R sono proporzionali alla funzione Gamma di Eulero, ovvero, tornando a una scrittura unica, con il doppio segno, avremo

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S[\pm iR,0]} e^{\pm it} t^{-z} dt = - \lim_{R \rightarrow \infty} e^{\pm i\pi(1-z)/2} \int_0^R e^{-a} a^{-z} da = -e^{\pm i\pi(1-z)/2} \int_0^{\infty} e^{-a} a^{-z} da = -e^{\pm i\pi(1-z)/2} \Gamma(1-z).$$

L'ultima identità vale se $\text{Re}(1-z) > 0$, cioè $\text{Re}(z) < 1$ e questa limitazione è verificata dalla condizione iniziale $\text{Re}(z) \in (0, 1)$.

In definitiva, abbiamo ottenuto che i limiti per $R \rightarrow \infty$ degli integrali sui percorsi chiusi Γ_{R+} e Γ_{R-} sono nulli e che tali integrali limite sono esprimibili come somma di tre contributi, quelli sugli archi sono nulli, mentre quelli sui tratti rettilinei sono scrivibili in termini degli integrali G_+ e G_- , ovvero

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_{R\pm}} e^{\pm it} t^{-z} dt = \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{\pm it} t^{-z} dt}_{=G_{\pm}} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R\pm}} e^{\pm it} t^{-z} dt}_{=0} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S[\pm iR,0]} e^{\pm it} t^{-z} dt}_{=-e^{\pm i\pi(1-z)/2} \Gamma(1-z)},$$

da cui si hanno i valori degli stessi integrali G_+ e G_-

$$G_{\pm} = e^{\pm i\pi(1-z)/2} \Gamma(1-z) = \pm i e^{\mp i\pi z/2} \Gamma(1-z).$$

L'integrale cercato è la metà della somma di G_+ e G_- , ovvero

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^z} dt = \frac{G_+ + G_-}{2} = i \frac{e^{-i\pi z/2} - e^{i\pi z/2}}{2} \Gamma(1-z) = \frac{e^{-i\pi z/2} - e^{i\pi z/2}}{2i} \Gamma(1-z)$$

usando la formula di Eulero per la funzione seno si arriva all'identità richiesta

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^z} dt = \text{sen}\left(\frac{z\pi}{2}\right) \Gamma(1-z).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si verifichi che la funzione

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ik} |k|^{\sigma-1}}{\cos(\pi\sigma/2) \Gamma(\sigma)},$$

è la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{|x+1|^{\sigma}},$$

con $0 < \sigma < 1$.

Suggerimento. Potrebbe essere utile l'identità del problema precedente.

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Scriviamo esplicitamente la trasformata di Fourier della funzione $f(x)$, cioè

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x+1|^{-\sigma} e^{-ikx} dx,$$

con la sostituzione $w = x + 1$, si ha

$$\tilde{f}(k) = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |w|^{-\sigma} e^{-ikw} dx.$$

La funzione $|w|^{-\sigma}$ è simmetrica rispetto all'origine, in quanto dipende solo dal modulo della variabile w , quindi all'integrale contribuisce solo la parte pari della fase e^{-ikw} , ovvero $\cos(kw)$, infatti

$$\tilde{f}(k) = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |w|^{-\sigma} e^{-ikw} dw = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |w|^{-\sigma} (\cos(kw) - i \operatorname{sen}(kw)) dw = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |w|^{-\sigma} \cos(kw) dw,$$

dove l'ultima identità è conseguenza dell'annullamento dell'integrale con la funzione seno, essendo, infatti l'integrale di una funzione integranda dispari su un percorso d'integrazione simmetrico.

Poiché la funzione integranda così ottenuta è pari, possiamo limitarci ad integrare lungo la sola semiretta dei valori positivi

$$\tilde{f}(k) = \frac{e^{ik}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |w|^{-\sigma} \cos(kw) dw = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ik} \int_0^{\infty} w^{-\sigma} \cos(kw) dw = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ik} \int_0^{\infty} w^{-\sigma} \cos(|k|w) dw,$$

nell'ultimo membro abbiamo inserito il modulo della variabile k , si tratta di una operazione lecita poiché la funzione coseno è pari e la variabile di integrazione w è maggiore o uguale di zero. Facciamo la sostituzione $t = |k|w$, la nuova variabile d'integrazione è anch'essa maggiore o uguale di zero poiché tali sono il modulo $|k|$ e la precedente variabile d'integrazione w , si ha

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ik} \int_0^{\infty} w^{-\sigma} \cos(|k|w) dw = \{w = t/|k|\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ik} |k|^{\sigma-1} \int_0^{\infty} t^{-\sigma} \cos(t) dt.$$

Usando il risultato ottenuto nel problema precedente, ovvero

$$\int_0^{\infty} t^{-\sigma} \cos(t) dt = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\sigma}{2}\right) \Gamma(1-\sigma),$$

otteniamo

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ik} |k|^{\sigma-1} \int_0^{\infty} t^{-\sigma} \cos(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ik} |k|^{\sigma-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\sigma}{2}\right) \Gamma(1-\sigma).$$

Per arrivare all'espressione richiesta, si sfrutta, infine, la formula di riflessione della funzione Gamma di Eulero, assieme a quella di duplicazione della funzione seno, cioè

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen}(\pi z/2) \cos(\pi z/2)} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{2 \cos(\pi z/2) \Gamma(z)},$$

sostituendo questa espressione in quella per la funzione $\tilde{f}(k)$ si ha

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ik} |k|^{\sigma-1} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\sigma}{2}\right) \Gamma(1-\sigma)}_{=\pi/(2 \cos(\pi\sigma/2) \Gamma(\sigma))} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ik} |k|^{\sigma-1}}{\cos(\pi\sigma/2) \Gamma(\sigma)}.$$