

METODI MATEMATICI PER LA FISICA

APPELLO PRIMAVERILE - 18 GIUGNO 2025

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

PRIMO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Sapendo che la funzione arco-seno è polidroma con dominio di analiticità $D = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)\}$, ovvero ha tagli lungo le semirette reali $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$, con punti di diramazione al finito in $z = -1$ e $z = 1$, si dimostri l'identità

$$\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=\pi/2} \frac{z \cos(z)}{\sin(z) - x} dz,$$

$\forall x \in (-1, 1)$.

SOLUZIONE DEL PRIMO PROBLEMA

Possiamo usare il teorema di Cauchy. A tal fine, per avere una funzione integranda che abbia un polo semplice nel punto di valutazione, in questo caso il valore reale $x \in (-1, 1)$, facciamo la sostituzione $w = \sin(z)$, che dà il differenziale: $dw = \cos(z)dz$, mentre la variabile è $z = \operatorname{arcsen}(w)$. Chiamiamo $s(x)$ l'integrale che si ottiene con la suddetta sostituzione, cioè

$$s(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\operatorname{sen}[\{z : |z| = \pi/2\}]} \frac{\operatorname{arcsen}(w) dw}{w - x},$$

dove con $\operatorname{sen}[\{z : |z| = \pi/2\}]$ abbiamo indicato il percorso immagine, tramite la funzione seno della circonferenze di raggio $\pi/2$ centrata nell'origine. Vogliamo verificare che la funzione $s(x)$ coincide, nelle condizioni date, con la funzione arco-seno.

Come descritto nel testo del problema, la funzione arco-seno è polidroma e ha punti di diramazione al finito in $z = -1$ e $z = 1$. Il percorso, immagine tramite la funzione seno della circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\pi/2$, ha parametrizzazione

$$\gamma(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}e^{i\theta}\right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Le parti reale e immaginaria si ottengono usando la formula di Eulero per l'esponenziale e quella di somma della funzione seno, ovvero

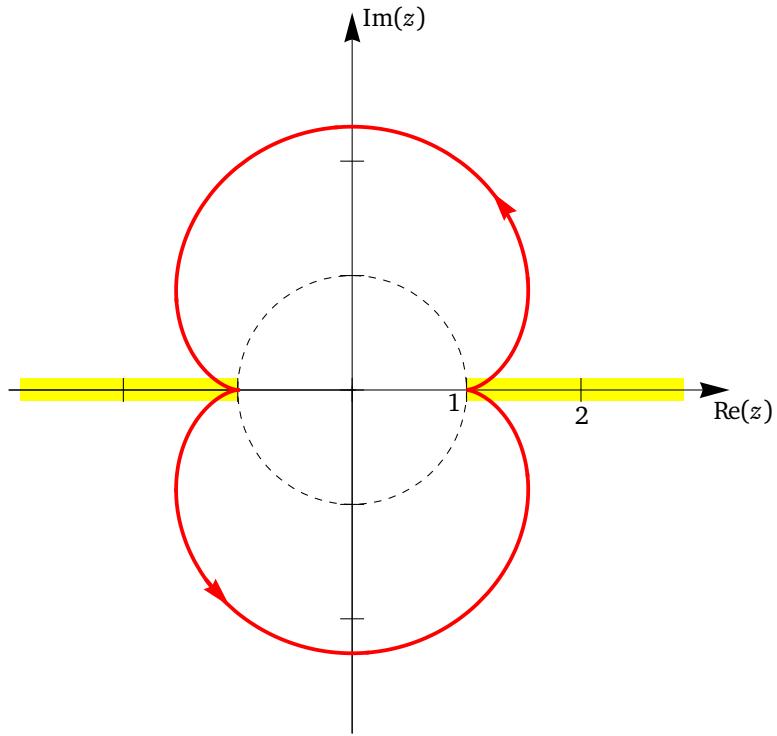
$$\gamma(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta) - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)\cosh\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)\operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right).$$

Si verifica che la curva è simmetrica rispetto a entrambi gli assi reale e immaginario. Per $\theta \in [0, \pi/2]$, cioè nel primo quadrante, sia la parte reale che quella immaginaria sono maggiori o uguali a zero. Per la parte reale $\operatorname{sen}((\pi/2)\cos(\theta))\cosh((\pi/2)\operatorname{sen}(\theta))$ si ha

$$\begin{aligned} \theta \in [0, \pi/2] &\Rightarrow \cos(\theta) \in [0, 1] \Rightarrow \frac{\pi}{2}\cos(\theta) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right) \in [0, 1], \\ \theta \in [0, \pi/2] &\Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) \in [0, 1] \Rightarrow \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\theta) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cosh\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\theta)\right) \in \left[1, \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right], \\ \theta \in [0, \pi/2] &\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right)\cosh\left(\frac{\pi}{2}\cos(\theta)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Per la parte immaginaria $\cos((\pi/2)\cos(\theta)) \sinh((\pi/2)\sin(\theta))$,

$$\begin{aligned} \theta \in [0, \pi/2] &\Rightarrow \cos(\theta) \in [0, 1] \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cos(\theta) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right) \in [0, 1], \\ \theta \in [0, \pi/2] &\Rightarrow \sin(\theta) \in [0, 1] \Rightarrow \frac{\pi}{2} \sin(\theta) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta)\right) \in \left[0, \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)\right], \\ \theta \in [0, \pi/2] &\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right) \geq 0. \end{aligned}$$



Ne consegue che, per valori di θ nel primo quadrante, cioè $\theta \in [0, \pi/2]$, anche la corrispondente porzione di curva $\gamma(\theta)$ appartiene al primo quadrante. Si ha quindi

$$\gamma(\theta) \in \{z : \operatorname{Re}(z) \geq 0\} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}, \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

Il percorso completo è rappresentato dalla curva rossa nella figura sopra, in cui la linea tratteggiata è la circonferenza unitaria e le aree gialle evidenziano i tagli lungo l'asse reale.

La porzione della curva nel secondo quadrante e la simmetrica a quella del primo rispetto all'asse immaginario, infatti, per $\theta \in [\pi/2, \pi]$, definiamo $\theta' = \theta - \pi/2$, cosicché $\theta' \in [0, \pi/2]$, si ha

$$\begin{aligned} \gamma(\theta) &= \gamma\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2} \sin\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sin\left(\theta' + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} \sin(\theta')\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta')\right) + i \cos\left(-\frac{\pi}{2} \sin(\theta')\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta')\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta')\right) \cosh\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta')\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin(\theta')\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta')\right). \end{aligned}$$

Usando gli argomenti del caso precedente, si ottiene che, per $\theta' \in [0, \pi/2]$, cioè per $\theta \in [\pi/2, \pi]$, la parte reale di $\gamma(\theta)$ è minore o uguale a zero, mentre la parte immaginare è ancora non negativa, si ha

$$\gamma(\theta) \in \{z : \operatorname{Re}(z) \leq 0\} \cap \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}, \quad \forall \theta \in [\pi/2, \pi].$$

Inoltre, per ogni punto della curva $\gamma(\theta)$ del primo quadrante, cioè per ogni $\theta \in [0, \pi/2]$, esiste un $\tilde{\theta} \in [\pi/2, \pi]$, tale che: $\operatorname{Re}(\gamma(\tilde{\theta})) = -\operatorname{Re}(\gamma(\theta))$ e $\operatorname{Im}(\gamma(\tilde{\theta})) = \operatorname{Im}(\gamma(\theta))$, ovvero esiste un punto della curva nel secondo quadrante,

$\gamma(\tilde{\theta})$ simmetrico al primo punto $\gamma(\theta)$ rispetto all'asse immaginario.

Infine, per il principio di riflessione di Schwarz si ha la simmetria rispetto all'asse reale, in generale

$$\gamma^*(\theta) = \operatorname{sen}^* \left(\frac{\pi}{2} e^{i\theta} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} e^{-i\theta} \right) = \gamma(-\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Alla luce di queste proprietà di simmetria, per capire come sia fatta la curva γ è sufficiente studiarla nel primo quadrante. Dimostriamo che in questo quadrante la curva è esterna alla circonferenza unitaria, usando il modulo quadro della parametrizzazione

$$\begin{aligned} |\gamma(\theta)|^2 &= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta) \right) \cosh^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\theta) \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta) \right) \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\theta) \right) \\ &= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta) \right) \left[1 + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\theta) \right) \right] + \left[1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta) \right) \right] \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\theta) \right) \\ &= \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta) \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\theta) \right). \end{aligned}$$

La funzione coseno nel primo quadrante è così limitata

$$\cos(\theta) \geq 1 - \frac{2}{\pi} \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \cos(\theta) \geq \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

Mentre la funzione seno nel stesso quadrante è monotona crescente, cioè, $\forall \alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, se $\alpha \geq \beta$, si ha

$$\operatorname{sen}(\alpha) \geq \operatorname{sen}(\beta).$$

Con i due risultati precedenti, il primo termine del modulo quadro $|\gamma(\theta)|^2$ verifica la diseguaglianza

$$\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta) \right) \geq \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos^2(\theta), \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

La funzione seno iperbolico con argomento reale è monotona crescente ed è sempre non minore dello stesso argomento quando questo è non negativo, cioè $\operatorname{senh}(x) \geq x$ per $x \geq 0$, come si evince dal fatto che la derivata prima, che coincide con la funzione coseno iperbolico, sia maggiore o uguale all'unità. Ne consegue che il secondo termine del modulo quadro $|\gamma(\theta)|^2$ è limitato come

$$\operatorname{senh}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\theta) \right) \geq \frac{\pi^2}{4} \operatorname{sen}^2(\theta) \geq \operatorname{sen}^2(\theta), \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

Considerando le due limitazioni si ha

$$|\gamma(\theta)|^2 = \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta) \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(\theta) \right) \geq \cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1, \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

Sfruttando la simmetria rispetto agli assi, questa limitazione può essere estesa agli altri tre quadranti ed è quindi valida per l'intera curva, per cui si ha

$$|\gamma(\theta)| \geq 1, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Questo implica che la curva γ avvolge il segmento reale $(-1, 1)$ e la funzione $s(x)$ coincide con la funzione arco-seno valutata in $x \in (-1, 1)$. Infatti, possiamo applicare il teorema di Cauchy, essendo il percorso d'integrazione chiuso, immerso nel dominio di analiticità $D = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)\}$ e, avvolgendo il segmento $(-1, 1)$, avvolge ogni x ad esso appartenente, cioè

$$s(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\operatorname{sen}[\{z:|z|=\pi/2\}]} \frac{\operatorname{arcsen}(w) dw}{w - x} = \operatorname{arcsen}(x), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

SECONDO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si ottenga lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\mathbb{Q}J(z) = \frac{1}{e^z + 3^{-z}}.$$

Curiosità. Il carattere $\mathbb{Q}J$ rappresenta la lettera “z” dell’alfabeto del Myanmar. Questo alfabeto, detto anche birmano dal precedente nome dello stato, è giudicato uno dei più belli e armonici. La maggior parte delle sue lettere è composta da forme circolari complete o parziali che, nell’atto della scrittura sono tracciate in senso orario. Queste forme furono dettate più che dall’estetica dalla praticità, infatti, le foglie di palma usate tradizionalmente come supporto per la scrittura, tendono a strapparsi con incisioni troppo rettilinee. L’alfabeto birmano annovera 33 consonanti e 8 vocali. Il suo uso è però poco frequente ed è sostituito da sistemi di scrittura *hindi* e latini.

SOLUZIONE DEL SECONDO PROBLEMA

La funzione è meromorfa, i poli coincidono con gli zeri della funzione a denominatore. Si ha

$$\frac{1}{\mathbb{Q}J(z)} = e^z + 3^{-z} = e^z + e^{-z \ln(3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^z = -e^{-z \ln(3)} = e^{-z \ln(3) + (2k+1)i\pi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

da cui si ottiene l’insieme dei poli

$$z_k = -z_k \ln(3) + (2k+1)i\pi \quad \Rightarrow \quad \left\{ z_k = \frac{(2k+1)i\pi}{1 + \ln(3)} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Sono poli semplici, infatti calcolando il residuo k -esimo, si ha

$$R_k = \lim_{z \rightarrow z_k} \mathbb{Q}J(z)(z - z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{1}{e^z - \ln(3)3^{-z}} = \frac{1}{e_k^z - \ln(3) \underbrace{3^{-z_k}}_{-e^{z_k}}} = \frac{e^{-z_k}}{1 + \ln(3)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Il comportamento asintotico è regolare, per verificarlo, studiamo il limite $z \rightarrow \infty$, considerando due casi. Il primo si ha per z che diverge al di fuori dell’asse immaginario, quindi con $\operatorname{Re}(z) = x \rightarrow \pm\infty$, allora il modulo della funzione è così limitato

$$0 \leq |\mathbb{Q}J(z)| \leq \frac{1}{e^x - 3^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Nel secondo caso, z diverge lungo l’asse immaginario che contiene i poli semplici, quindi, al fine di studiarne il comportamento non polare, consideriamo il valore limite su una successione che aggira i poli, ad esempio quella dei punti medi degli stessi, cioè $\{p_k = 2ki\pi/(1 + \ln(3))\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Su tali punti si ha: $e^{p_k} = 3^{-p_k}$, quindi

$$0 \leq |\mathbb{Q}J(z)| = \frac{1}{|e^{p_k} + 3^{-p_k}|} = \frac{|e^{-p_k}|}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2},$$

anche in questo caso la funzione è regolare all’infinito.

Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\mathbb{Q}J(z) = \phi(z) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{R_k}{z - z_k} = \phi_0 + \frac{1}{1 + \ln(3)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z_k}}{z - z_k},$$

dove, come conseguenza della regolarità all’infinito, la parte intera $\phi(z)$ è una costante, che indichiamo con ϕ_0 . Calcoliamo questo valore, valutando la funzione in un punto opportuno, usiamo l’origine $z = 0$, in cui $\mathbb{Q}J(0) = 1/2$, quindi

$$\mathbb{Q}J(0) = \frac{1}{2} = \phi_0 - \frac{1}{1 + \ln(3)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z_k}}{z_k} \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \ln(3)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z_k}}{z_k}.$$

Sostituendo nello sviluppo

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}J(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \ln(3)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-z_k} \left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{z - z_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \ln(3)} \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} e^{-z_k} \left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{z - z_k} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-z_k} \left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{z - z_k} \right) \right). \end{aligned}$$

Per ottenere una forma più compatta, nella prima serie poniamo $k' = -k - 1$,

$$\mathfrak{Q}(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \ln(3)} \left(\sum_{k'=0}^{\infty} e^{-z_{-k'-1}} \left(\frac{1}{z_{-k'-1}} + \frac{1}{z - z_{-k'-1}} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-z_k} \left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{z - z_k} \right) \right),$$

usiamo: $z_{-k'-1} = -z_{k'}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \ln(3)} \left(\sum_{k'=0}^{\infty} e^{z_{k'}} \left(-\frac{1}{z_{k'}} + \frac{1}{z + z_{k'}} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-z_k} \left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{z - z_k} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \ln(3)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-z_k} - e^{z_k}}{z_k} + \frac{(z - z_k) e^{z_k} + (z + z_k) e^{-z_k}}{z^2 - z_k^2} \right), \end{aligned}$$

infine, in termini delle funzioni seno e coseno iperbolico si arriva a

$$\mathfrak{Q}(z) = \frac{1}{2} + \frac{2}{1 + \ln(3)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\operatorname{senh}(z_k)}{z_k} + \frac{z \cosh(z_k) - z_k \operatorname{senh}(z_k)}{z^2 - z_k^2} \right).$$

TERZO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\mathfrak{N} = \operatorname{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^3(x)}{1 - x^2} dx.$$

Curiosità. Il carattere \mathfrak{N} rappresenta la lettera "n" dell'alfabeto birmano descritto nel secondo problema.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

La funzione integranda ha due poli semplici in $z = -1$ e $z = 1$, che appartengono al percorso d'integrazione, l'asse reale ed è rispetto a essi che va calcolato il valore principale. Usiamo per la funzione coseno la formula di Eulero,

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{8} \operatorname{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}}{(1-x)(1+x)} dx = J_3 + J_{-3} + 3J_1 + 3J_{-1},$$

dove abbiamo definito i quattro integrali in valore principale

$$J_a = \frac{1}{8} \operatorname{Pr} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixa}}{(1-x)(1+x)} dx,$$

con $a = \pm 1, \pm 3$.

Consideriamo i due percorsi Γ_+ e Γ_- , corrispondenti all'asse reale dentato intorno ai punti $z = -1$ e $z = 1$, rispettivamente nei semipiani delle parti immaginarie positive e negative, con semicirconferenze γ_{-1}^{\pm} , centrate in $z = -1$ e γ_1^{\pm} , centrate in $z = 1$. I percorsi sono rappresentati in rosso e blu nella figura.

Gli integrali J_1 e J_3 possono essere ottenuti integrando sul percorso Γ_+ e gli integrali J_{-1} e J_{-3} integrando sul percorso Γ_- , chiudendo i percorsi all'infinito e usando il lemma di Jordan unitamente al teorema dei residui. Con $a = 1, 3$ si ha

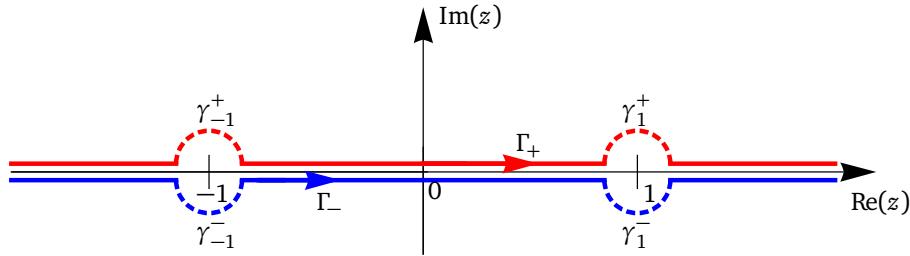
$$0 = \frac{1}{8} \oint_{\Gamma_+} \frac{e^{ixa}}{(1-x)(1+x)} dx = J_a - \frac{1}{8} \int_{\gamma_{-1}^+} \frac{e^{iaz}}{(1-z)(1+z)} dz - \frac{1}{8} \int_{\gamma_1^+} \frac{e^{iaz}}{(1-z)(1+z)} dz,$$

dove l'integrale è nullo poiché il percorso chiuso Γ_+ non avvolge nessuna singolarità della funzione integranda e i contributi sugli archi γ_{-1}^+ e γ_1^+ sono sottratti in quanto gli stessi percorsi sono orientati in senso orario. Calcoliamo gli integrali sugli archi

$$\int_{\gamma_{-1}^+} \frac{e^{iaz}}{(1-z)(1+z)} dz = i\pi \frac{e^{-ia}}{2}, \quad \int_{\gamma_1^+} \frac{e^{iaz}}{(1-z)(1+z)} dz = -i\pi \frac{e^{ia}}{2}, \quad a = 1, 3.$$

Usando questi risultati nell'espressione precedente si ha

$$J_a = \frac{1}{8} i \pi \frac{e^{-ia} - e^{ia}}{2} = \frac{\pi}{8} \sin(a), \quad a = 1, 3.$$



Con i valori negativi $a = -1, -3$, usiamo la stessa procedura con il percorso chiuso Γ_- , quindi

$$0 = \frac{1}{8} \oint_{\Gamma_-} \frac{e^{iax}}{(1-x)(1+x)} dx = J_a + \frac{1}{8} \int_{\gamma_{-1}^-} \frac{e^{iaz}}{(1-z)(1+z)} dz + \frac{1}{8} \int_{\gamma_1^-} \frac{e^{iaz}}{(1-z)(1+z)} dz,$$

dove, anche in questo caso, l'integrale è nullo poiché il percorso chiuso Γ_- non avvolge nessuna singolarità della funzione integranda, i contributi sugli archi γ_{-1}^- e γ_1^- sono sommati in quanto gli stessi percorsi sono orientati in senso antiorario. Calcoliamo gli integrali sugli archi

$$\int_{\gamma_{-1}^-} \frac{e^{iaz}}{(1-z)(1+z)} dz = i\pi \frac{e^{-ia}}{2}, \quad \int_{\gamma_1^-} \frac{e^{iaz}}{(1-z)(1+z)} dz = -i\pi \frac{e^{ia}}{2}, \quad a = -1, -3.$$

Usando questi risultati nell'espressione precedente si ha

$$J_a = -\frac{1}{8} i \pi \frac{e^{-ia} - e^{ia}}{2} = -\frac{\pi}{8} \sin(a), \quad a = -1, -3.$$

I quattro contributi sono

$$J_1 = \frac{\pi}{8} \sin(1), \quad J_{-1} = -\frac{\pi}{8} \sin(-1) = \frac{\pi}{8} \sin(1), \quad J_3 = \frac{\pi}{8} \sin(3), \quad J_{-3} = -\frac{\pi}{8} \sin(-3) = \frac{\pi}{8} \sin(3)$$

e il risultato finale è

$$\text{QO} = J_3 + J_{-3} + 3J_1 + 3J_{-1} = \frac{\pi}{4} (\sin(3) + 3 \sin(1)).$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Si determini in forma matriciale la rappresentazione spettrale dell'operatore \hat{Q} rispetto alla base canonica ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3$ dello spazio di Hilbert a tre dimensioni E_3 in cui l'operatore \hat{Q} è definito, conoscendone le azioni

$$\hat{Q}|e_1\rangle = |e_1\rangle + 2|e_3\rangle, \quad \hat{Q}|e_2\rangle = |e_2\rangle + 2|e_3\rangle, \quad \hat{Q}|e_3\rangle = 2|e_1\rangle + |e_2\rangle + |e_3\rangle.$$

Curiosità. Il carattere \hat{Q} rappresenta la lettera "j" dell'alfabeto birmano descritto nel secondo problema.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Le azioni sui tre vettori della base permettono di ottenere gli elementi della matrice che rappresenta l'operatore \hat{Q} , si ha

$$\hat{Q} \leftarrow \hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori si ottengono come soluzioni dell'equazione secolare

$$\begin{aligned} \det(I\lambda - \mathbf{Q}) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 - 2) - 4(\lambda - 1) &= 0 \\ (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 - 6) &= 0 \end{aligned}$$

e sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}, \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{6}.$$

Le componenti contro-varianti dei vettori dell'insieme $\{v_j\}_{j=1}^3$, che rappresentano gli autovettori rispetto alla base data, sono le soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{aligned} (I\lambda_j - \mathbf{Q})v_j &= 0 \\ \begin{pmatrix} \lambda_j - 1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda_j - 1 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda_j - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \\ v_j^3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

dove v_j^k è la k -esima componente contro-variante del j -esimo vettore dell'insieme $\{v_j\}_{j=1}^3$, con $k \in \{1, 2, 3\}$. Poniamo la prima componente dei tre vettori uguale al valore comune v , cioè: $v_j^1 = v$, con $j \in \{1, 2, 3\}$.

Per il primo vettore, con autovalore $\lambda_1 = 1$, dalla prima equazione si ottiene $v_1^3 = 0$ e dalla terza $v_1^2 = -v_1^1 = -v$. Per il secondo e il terzo vettore, con autovalori $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{6}$, dalla prima equazione: $v_{2,3}^3 = \pm v\sqrt{6}/2 = \pm v\sqrt{3/2}$, dalla seconda: $v_{2,3}^2 = \mp v_{2,3}^3/\sqrt{6} = v/2$. I tre vettori sono

$$v_1 = v \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = v \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = v \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -\sqrt{3/2} \end{pmatrix},$$

se li normalizziamo usando per v valori reali, si hanno

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{2}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{2}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -\sqrt{3/2} \end{pmatrix}.$$

Sono linearmente indipendenti ma non ortogonali. La matrice che indichiamo con V , che diagonalizza la matrice \mathbf{Q} non è unitaria e possiamo ottenerla allineando nelle tre colonne i tre vettori appena ottenuti, anche senza considerare i fattori normalizzanti, cioè

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{3/2} \end{pmatrix},$$

è invertibile, come si verifica dal determinante non nullo $\det(V) = -3\sqrt{3/2}$. L'inversa della matrice si calcola con il metodo classico e si ottiene

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Le relazioni di diagonalizzazione diretta e inversa sono

$$V^{-1} \mathbf{Q} V = \mathbf{Q}_d = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad V \mathbf{Q}_d V^{-1} = \mathbf{Q}.$$

La rappresentazione spettrale dell'operatore \hat{Q} è

$$\hat{Q} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \hat{P}_k,$$

dove $\{\hat{P}_k\}_{k=1}^3$ è un insieme di proiettori ortogonali e tali che

$$\sum_{k=1}^3 \hat{P}_k = \hat{I}.$$

Le rappresentazioni matriciali di quella spettrale, rispetto alla base canonica e a quella degli autovettori sono

$$\hat{Q} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k \hat{P}_k \quad \xleftrightarrow{e,v} \quad Q = \sum_{k=1}^3 \lambda_k P_k, \quad Q_d = \sum_{k=1}^3 \lambda_k P'_k,$$

dove $\{P_k\}_{k=1}^3$ e $\{P'_k\}_{k=1}^3$ sono gli insiemi delle matrici che rappresentano i proiettori rispetto alla base canonica e a quella degli autovettori. La forme delle matrici dell'insieme $\{P'_k\}_{k=1}^3$ sono note,

$$P'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da queste, con la relazione di diagonalizzazione inversa si ottengono le matrici dell'insieme $\{P_k\}_{k=1}^3$. Si hanno

$$\begin{aligned} P_1 &= VP'_1V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_2 &= VP'_2V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/6 & 1/6 & 1/(2\sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/2 \end{pmatrix}, \\ P_3 &= VP'_3V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \\ 1/6 & 1/6 & -1/(2\sqrt{6}) \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La rappresentazione richiesta è

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/6 & 1/6 & 1/(2\sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/2 \end{pmatrix} (1 + \sqrt{6}) \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \\ 1/6 & 1/6 & -1/(2\sqrt{6}) \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/2 \end{pmatrix} (1 - \sqrt{6}). \end{aligned}$$

I proiettori possono essere ottenuti con una procedura alternativa. Consideriamo l'insieme di polinomi $\{q_k(x)\}_{k=1}^3$ definiti come

$$q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Sono polinomi di secondo grado aventi come zeri gli autovalori con indici diversi da quello del dato polinomio, inoltre, il valore del polinomio sull'autovalore che ha lo stesso indice è unitario, si hanno cioè

$$q_k(\lambda_j) = \delta_{kj}, \quad \forall k, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Questi polinomi, per il teorema spettrale, se valutati sull'operatore \hat{Q} danno i proiettori omologhi, ovvero

$$\hat{P}_k = \widehat{q_k(\hat{Q})}, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Parimenti, per le rappresentazioni matriciali dei proiettori, si hanno

$$\hat{P}_k = \widehat{q_k(\hat{Q})} \quad \xleftarrow{e} \quad P_k = q_k(Q), \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Calcoliamo le matrici che rappresentano i proiettori,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(A - I\lambda_2)(A - I\lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} = \frac{A^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)A + \lambda_2\lambda_3 I}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} = \frac{A^2 - 2A - 5I}{-6} \\ &= -\frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 \\ -1/3 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ P_2 &= \frac{(A - I\lambda_1)(A - I\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} = \frac{A^2 - (\lambda_1 + \lambda_3)A + \lambda_1\lambda_3 I}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} = \frac{A^2 - (2 - \sqrt{6})A + (1 - \sqrt{6})I}{12} \\ &= \frac{1}{12} \left(\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} - (2 - \sqrt{6}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \sqrt{6}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2\sqrt{6} \\ 2 & 2 & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 2\sqrt{6} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/\sqrt{6} \\ 1/6 & 1/6 & 1/(2\sqrt{6}) \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

infine la terza matrice

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{(A - I\lambda_1)(A - I\lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 I}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{A^2 - (2 + \sqrt{6})A + (1 + \sqrt{6})I}{12} \\ &= \frac{1}{12} \left(\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} - (2 + \sqrt{6}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (1 + \sqrt{6}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2\sqrt{6} \\ 2 & 2 & -\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/\sqrt{6} \\ 1/6 & 1/6 & -1/(2\sqrt{6}) \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Coincidono con le precedenti.

QUINTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Dati due generici operatori diagonalizzabili $\hat{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{B}}$,

- si dimostrino le identità

$$\det(\exp(\hat{\mathcal{A}})) = \exp(\text{Tr}(\hat{\mathcal{A}})), \quad \ln(\det(\hat{\mathcal{A}})) = \text{Tr}(\ln(\hat{\mathcal{A}}));$$

- si ottenga la formula di somma della funzione seno, ovvero si calcoli l'operatore

$$\sin(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}}),$$

in termini degli operatori $\sin(\hat{\mathcal{A}})$, $\cos(\hat{\mathcal{A}})$, $\sin(\hat{\mathcal{B}})$, $\cos(\hat{\mathcal{B}})$, conoscendo il valore del commutatore

$$[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}] = \hbar \hat{I},$$

con $\hbar \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Curiosità. I caratteri $\hat{\mathcal{A}}$ e $\hat{\mathcal{B}}$ rappresentano le lettere “s” (con pronuncia aspirata) e “t” dell’alfabeto birmano descritto nel secondo problema.

SOLUZIONE DEL QUINTO PROBLEMA

L’operatore $\hat{\mathcal{A}}$ è diagonalizzabile, possiamo quindi usare la rappresentazione diagonale

$$\hat{\mathcal{A}} \leftrightarrow \mathcal{A} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2 \dots),$$

dove $\{\sigma_j\}_j$ è l’insieme degli autovalori, quindi il determinante e la traccia sono

$$\det(\hat{\mathcal{A}}) = \prod_j \sigma_j, \quad \text{Tr}(\hat{\mathcal{A}}) = \sum_j \sigma_j.$$

Rispetto alla stessa base, anche gli operatori $\exp(\hat{\mathcal{A}})$ e $\ln(\hat{\mathcal{A}})$ hanno rappresentazioni diagonali e sono

$$\exp(\hat{\mathcal{A}}) \leftrightarrow \text{diag}(e^{\sigma_1}, e^{\sigma_2}, \dots), \quad \ln(\hat{\mathcal{A}}) \leftrightarrow \text{diag}(\ln(\sigma_1), \ln(\sigma_2), \dots),$$

ne consegue che il determinante del primo operatore è

$$\det(\exp(\hat{\mathcal{A}})) = \det(\text{diag}(e^{\sigma_1}, e^{\sigma_2}, \dots)) = \prod_j e^{\sigma_j} = \exp\left(\underbrace{\sum_j \sigma_j}_{\text{Tr}(\hat{\mathcal{A}})}\right) = \exp(\text{Tr}(\hat{\mathcal{A}})),$$

questa è la prima identità del primo punto.

Calcoliamo il logaritmo naturale del determinante, si ha

$$\ln(\det(\hat{\mathcal{A}})) = \ln\left(\prod_j \sigma_j\right) = \sum_j \ln(\sigma_j) = \text{Tr}(\ln(\sigma_1), \ln(\sigma_2), \dots) = \text{Tr}(\ln(\hat{\mathcal{A}})),$$

che è la seconda identità del primo punto.

La formula Baker-Campbell-Hausdorff dà l’espressione del prodotto di due operatori esponenziali come $\exp(\hat{\mathcal{A}})$ e $\exp(\hat{\mathcal{B}})$, in particolare

$$\exp(\hat{\mathcal{A}}) \exp(\hat{\mathcal{B}}) = \exp\left(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \frac{1}{2} [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}] + \frac{1}{12} [\hat{\mathcal{A}}, [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}]] + \frac{1}{12} [\hat{\mathcal{B}}, [\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}]] + \dots\right),$$

dove i termini mancanti sono una serie di commutatori di ordine superiore. Nel caso in studio, però, il commutatore degli operatori è non nullo ma proporzionale all’operatore identità, ne consegue che i commutatori di ordine superiore

sono nulli, poiché ogni operatore commuta con l'operatore identità. La serie che compare a esponente del secondo membro si riduce alla somma dei soli primi tre termini, cioè

$$\exp(\hat{\mathcal{A}})\exp(\hat{\mathcal{Q}}) = \exp\left(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}} + \frac{1}{2}[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{Q}}]\right) = \exp\left(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}} + \frac{1}{2}\hbar\hat{I}\right).$$

Poiché, come già affermato, l'operatore identità commuta con ogni operatore, l'esponenziale a secondo membro può essere riscritto come prodotto di esponenziali

$$\exp(\hat{\mathcal{A}})\exp(\hat{\mathcal{Q}}) = \exp\left(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}} + \frac{1}{2}\hbar\hat{I}\right) = \exp(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}})\exp\left(\frac{1}{2}\hbar\hat{I}\right) = \exp(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}})e^{\hbar/2}.$$

Usando questo risultato e le formule di Eulero delle funzioni seno e coseno, calcoliamo le espressioni degli operatori prodotto: $\sin(\hat{\mathcal{A}})\cos(\hat{\mathcal{Q}})$, $\cos(\hat{\mathcal{A}})\sin(\hat{\mathcal{Q}})$, per il primo si ha

$$\begin{aligned} \sin(\hat{\mathcal{A}})\cos(\hat{\mathcal{Q}}) &= \frac{1}{4i}(\exp(i\hat{\mathcal{A}}) - \exp(-i\hat{\mathcal{A}}))(\exp(i\hat{\mathcal{Q}}) + \exp(-i\hat{\mathcal{Q}})) \\ &= \frac{1}{4i}\left(\exp(i\hat{\mathcal{A}})\exp(i\hat{\mathcal{Q}}) + \exp(i\hat{\mathcal{A}})\exp(-i\hat{\mathcal{Q}})\right. \\ &\quad \left.- \exp(-i\hat{\mathcal{A}})\exp(i\hat{\mathcal{Q}}) - \exp(-i\hat{\mathcal{A}})\exp(-i\hat{\mathcal{Q}})\right) \\ &= \frac{1}{4i}\left(\left(\exp(\hat{\mathcal{A}})\exp(\hat{\mathcal{Q}})\right)^i + \left(\exp(\hat{\mathcal{A}})\exp(-\hat{\mathcal{Q}})\right)^i\right. \\ &\quad \left.- \left(\exp(-\hat{\mathcal{A}})\exp(\hat{\mathcal{Q}})\right)^i - \left(\exp(-\hat{\mathcal{A}})\exp(-\hat{\mathcal{Q}})\right)^i\right) \\ &= \frac{e^{i\hbar/2}}{4i}\left(\exp\left(i(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}})\right) + \exp\left(i(\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{Q}})\right) - \exp\left(-i(\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{Q}})\right) - \exp\left(-i(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}})\right)\right) \\ &= \frac{e^{i\hbar/2}}{2}\left(\sin(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}}) + \sin(\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{Q}})\right). \end{aligned}$$

Il secondo lo otteniamo dal primo semplicemente cambiando il segno degli esponenziali con “ $-i$ ” a esponente e partendo del penultimo membro in cui cambiano i segni del secondo e del terzo esponenziale si ha

$$\begin{aligned} \cos(\hat{\mathcal{A}})\sin(\hat{\mathcal{Q}}) &= \frac{1}{4i}(\exp(i\hat{\mathcal{A}}) + \exp(-i\hat{\mathcal{A}}))(\exp(i\hat{\mathcal{Q}}) - \exp(-i\hat{\mathcal{Q}})) \\ &= \frac{e^{i\hbar/2}}{4i}\left(\exp\left(i(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}})\right) - \exp\left(i(\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{Q}})\right) + \exp\left(-i(\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{Q}})\right) - \exp\left(-i(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}})\right)\right) \\ &= \frac{e^{i\hbar/2}}{2}\left(\sin(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}}) - \sin(\hat{\mathcal{A}} - \hat{\mathcal{Q}})\right). \end{aligned}$$

Sommando membro a membro le due precedenti espressioni

$$\sin(\hat{\mathcal{A}})\cos(\hat{\mathcal{Q}}) + \cos(\hat{\mathcal{A}})\sin(\hat{\mathcal{Q}}) = e^{i\hbar/2}\sin(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}}),$$

da cui si arriva alla formula richiesta

$$\sin(\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{Q}}) = e^{-i\hbar/2}(\sin(\hat{\mathcal{A}})\cos(\hat{\mathcal{Q}}) + \cos(\hat{\mathcal{A}})\sin(\hat{\mathcal{Q}})).$$

SESTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 6/30)

Nello spazio funzionale $L^2(\mathbb{R})$, si calcoli, in funzione del parametro $n \in \mathbb{N}$, la norma

$$\left\| \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x^2 + 1} \right\|.$$

SOLUZIONE DEL SESTO PROBLEMA

Indichiamo la funzione con

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Sviluppiamo la norma al quadrato come prodotto scalare che, grazie all'equazione di Parseval, coincide con quello delle trasformate di Fourier, per le quali si usa la formula della derivata, si ha quindi

$$\left\| \frac{d^n f}{dx^n} \right\|^2 = \left(\frac{d^n f}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n} \right) = \left(\mathcal{F}_k \left[\frac{d^n f}{dx^n} \right], \mathcal{F}_k \left[\frac{d^n f}{dx^n} \right] \right) = \left((ik)^n \mathcal{F}_k[f], (ik)^n \mathcal{F}_k[f] \right) = \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n} |\mathcal{F}_k[f]|^2 dk.$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier integrando nel piano complesso, sfruttando il lemma di Jordan e il teorema dei residui,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{(x+i)(x-i)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{(z+i)(z-i)}, z = i \right] = 2i\pi \frac{e^k}{2i} = \pi e^k = \pi e^{-|k|} & k < 0 \\ -2i\pi \operatorname{Res} \left[\frac{e^{-ikz}}{(z+i)(z-i)}, z = -i \right] = -2i\pi \frac{e^k}{-2i} = \pi e^{-k} = \pi e^{-|k|} & k > 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

le due leggi possono essere unificate in

$$\mathcal{F}_k[f] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}.$$

Usiamo questo risultato nell'espressione precedente della norma al quadrato della derivata n -esima della funzione $f(x)$,

$$\left\| \frac{d^n f}{dx^n} \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n} |\mathcal{F}_k[f]|^2 dk = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2n} e^{-2|k|} dk = \pi \int_0^{\infty} k^{2n} e^{-2k} dk,$$

da cui si è sfruttata la parità della funzione integranda. Calcoliamo l'integrale per parti, integrando l'esponenziale e ripetendo la procedura $2n$ volte,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^n f}{dx^n} \right\|^2 &= \pi \int_0^{\infty} k^{2n} e^{-2k} dk = \pi \left(\underbrace{-\frac{k^{2n} e^{-2k}}{2} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \frac{2n}{2} \int_0^{\infty} k^{2n-1} e^{-2k} dk \right) \\ &= \pi \left(\underbrace{-(2n)! \frac{k e^{-2k}}{2^{2n}} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \frac{(2n)!}{2^{2n}} \int_0^{\infty} e^{-2k} dk \right) = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n+1}}, \end{aligned}$$

estraendo la radice quadrata si ottiene la norma richiesta

$$\left\| \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{x^2 + 1} \right\| = \sqrt{\pi \frac{(2n)!}{2^{2n+1}}}.$$