Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 18 gennaio 2019

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh^3(x)} \, .$$

Soluzione del primo problema

Descriviamo due possibili procedure risolutive.

Prima procedura

L'integranda ha singolarità polari nei punti in cui si azzera la funzione coseno iperbolico, si tratta dei multipli dispari di $i\pi/2$, che possiamo anche porre nella forma

$$z_k^{\pm} = i\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) , \qquad k \in \mathbb{Z} \, .$$

Per stabilire l'ordine dei poli consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor dell'inversa dell'integranda in $z_k^{\pm}$. Per la funzione coseno iperbolico si ha

$$\begin{aligned}
\cosh(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \, \frac{d^j}{dz^j} \cosh(z)\Big|_{z=z_k^{\pm}} \left(z - z_k^{\pm}\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} \cosh(z_k^{\pm}) \left(z - z_k^{\pm}\right)^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} \operatorname{senh}(z_k^{\pm}) \left(z - z_k^{\pm}\right)^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pm i}{(2j+1)!} \left(z - z_k^{\pm}\right)^{2j+1} \\
&= \pm i \left\{ \left(z - z_k^{\pm}\right) + \frac{1}{3!} \left(z - z_k^{\pm}\right)^3 + O\left[\left(z - z_k^{\pm}\right)^5\right] \right\} .
\end{aligned}$$

Infatti le derivate pari della funzione coseno iperbolico coincidono con la stessa funzione, mentre quelle dispari con la funzione seno iperbolico. Quindi, poiché in $z = z_k^{\pm}$ le funzione seno e coseno iperbolico sono rispettivamente uguali ad $\pm i$ e a zero, si ottiene che la serie di Taylor della funzione coseno iperbolico centrata in $z_k^{\pm}$ possiede le sole potenze dispari e che i coefficienti assumono i soli valori $\pm i$. Da ciò si evince che la funzione integranda, essendo l'inverso del cubo della funzione coseno iperbolico, ha in $z_k^{\pm}$ un polo di ordine tre. Per ottenerne il residuo consideriamo la serie di Laurent di $1/\cosh(z)$ centrata in $z_k^\pm$ che, nel limite $z \to z_k^\pm$, può essere scritta come

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh(z)} &= \mp \frac{i}{\left(z-z_k^\pm\right)+\left(z-z_k^\pm\right)^3/3!+O\left[\left(z-z_k^\pm\right)^5\right]}\\
&= \mp \frac{i}{\left(z-z_k^\pm\right)\left\{1+\left(z-z_k^\pm\right)^2/3!+O\left[\left(z-z_k^\pm\right)^4\right]\right\}}\\
&= \mp \frac{i}{z-z_k^\pm}\left\{1-\left[\frac{1}{3!}\left(z-z_k^\pm\right)^2+\frac{1}{5!}\left(z-z_k^\pm\right)^4+\ldots\right]+\left[\frac{1}{3!}\left(z-z_k^\pm\right)^2+\frac{1}{5!}\left(z-z_k^\pm\right)^4\ldots\right]^2+\ldots\right\}\\
&= \mp i\left\{\frac{1}{z-z_k^\pm}-\frac{1}{3!}\left(z-z_k^\pm\right)+\left(-\frac{1}{5!}+\frac{1}{(3!)^2}\right)\left(z-z_k^\pm\right)^3+O\left[\left(z-z_k^\pm\right)^5\right]\right\}\\
&= \mp i\left\{\frac{1}{z-z_k^\pm}-\frac{1}{6}\left(z-z_k^\pm\right)+\frac{7}{360}\left(z-z_k^\pm\right)^3+O\left[\left(z-z_k^\pm\right)^5\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

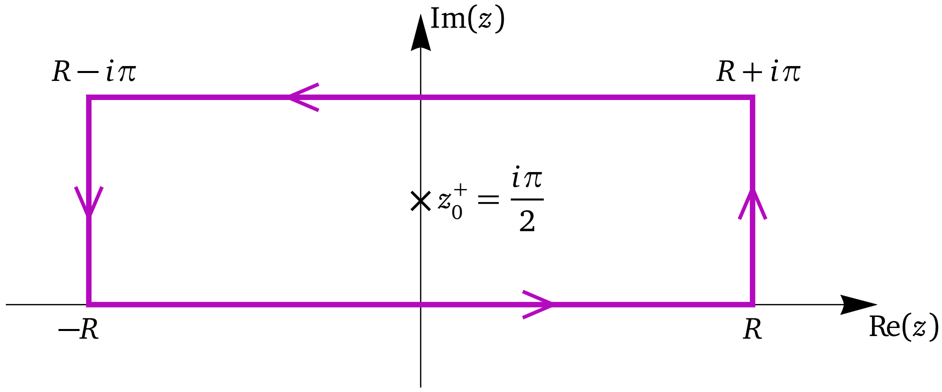
Eleviamo al cubo, per ottenere la funzione integranda, e consideriamo solo il termine che va come $1/(z-z_k^\pm)$. Quest'ultimo può essere ottenuto solo dal prodotto di due volte lo stesso termine di ordine -1, $1/(z-z_k^\pm)$, per il termine di ordine 1, $(z-z_k^\pm)$, con il coefficiente 3 (trattandosi di un elevamento alla terza), si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cosh^3(z)} &= (\mp i)^3\left\{\frac{1}{z-z_k^\pm}-\frac{1}{6}\left(z-z_k^\pm\right)+\frac{7}{360}\left(z-z_k^\pm\right)^3+O\left[\left(z-z_k^\pm\right)^5\right]\right\}^3\\
&= \pm i\left[\ldots+3\frac{1}{(z-z_k^\pm)^2}\left(-\frac{1}{6}(z-z_k^\pm)\right)+\ldots\right]\\
&= \pm i\left(\ldots-\frac{1}{2}\frac{1}{z-z_k^\pm}+\ldots\right).
\end{aligned}
$$

Ne consegue che i residui dei poli tripli $z_k^\pm$ sono

$$
\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, z_k^\pm\right] = \mp\frac{i}{2}.
$$

Per calcolare l'integrale usiamo il percorso di integrazione rettangolare, Γ_R, mostrato in figura, contenente il solo polo $z^+0 = i\pi/2$.



L'integrale su Γ_R si calcola con il teorema dei residui, non dipende da R e vale

$$
\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{\cosh^3(z)} = 2i\pi\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\cosh^3(z)}, z_0^+\right] = 2i\pi\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi.
$$

Tale integrale può essere scritto come la somma dei quattro contributi relativi ai quattro tratti rettilinei che costituiscono il rettangolo, ovvero

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{\cosh^3(z)} &= \int_{-R}^{R}\frac{dx}{\cosh^3(x)}+\int_{R}^{-R}\frac{dx}{\cosh^3(x+i\pi)}+i\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^3(R+iy)}+i\int_{\pi}^{0}\frac{dy}{\cosh^3(-R+iy)}\\ &= \int_{-R}^{R}\frac{dx}{\cosh^3(x)}-\int_{R}^{-R}\frac{dx}{\cosh^3(x}+i\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^3(R+iy)}+i\int_{\pi}^{0}\frac{dy}{\cosh^3(-R+iy)}\\ &= 2\int_{-R}^{R}\frac{dx}{\cosh^3(x)}+i\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^3(R+iy)}+i\int_{\pi}^{0}\frac{dy}{\cosh^3(-R+iy)}\,.\end{aligned}$$

Nel limite $R\to\infty$ i contributi sui tratti verticali si annullano. Si può dimostrare sfruttando le limitazioni

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{dy}{\cosh^3(\pm R+iy)}\right|\le\int_0^{\pi}\frac{dy}{\left|\cosh^3(\pm R+iy)\right|}=8\int_0^{\pi}\frac{dy}{|e^{\pm R+iy}+e^{\mp R-iy}|^3}\le 8\int_0^{\pi}\frac{dy}{|e^{\pm R}-e^{\mp R}|^3}=\frac{\pi}{\operatorname{senh}^3(R)}\xrightarrow[R\to\infty]{}0\,.$$

Considerando il risultato ottenuto con il teorema dei residui ed il precedente, nel limite $R\to\infty$ si ottiene l'integrale cercato

$$\begin{cases}\lim\limits_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\dfrac{dz}{\cosh^3(z)}=\pi\\ \lim\limits_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R}\dfrac{dz}{\cosh^3(z)}=2\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh^3(x)}=2S\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad S=\frac{\pi}{2}\,.$$

Seconda procedura

Un secondo metodo consiste nel fare la sostituzione $w=e^x$, ottenere quindi l'integrale di una funzione razionale e usare il lemma di Jordan. Con la sostituzione si ha

$$S=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh^3(x)}=8\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(e^x+e^{-x})^3}=8\int_0^{\infty}\frac{dw/w}{(w+1/w)^3}=8\int_0^{\infty}\frac{w^2dw}{(w^2+1)^3}=4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w^2dw}{(w^2+1)^3}\,,$$

dove, l'ultima identità è conseguenza della simmetria della funzione integranda. Applichiamo il lemma di Jordan, chiudendo il percorso nel semipiano $\operatorname{Im}(w)>0$

$$S=\lim_{R\to\infty}4\oint_{\partial G_R}\frac{w^2dw}{(w^2+1)^3}=8i\pi\sum_{w_j\in G_R}\operatorname{Res}\left[\frac{w^2}{(w^2+1)^3},w_j\right]\,,\tag{1}$$

il nuovo percorso di integrazione è la frontiera del semicerchio G_R, centrato nell'origine di raggio R ed immerso nel semipiano $\operatorname{Im}(w)>0$, ovvero

$$G_R=\left\{w:w=re^{i\theta},(r,\theta)\in(0,R)\times[0,\pi]\right\}\,,\qquad \partial G_R=\left\{w:w=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\right\}\cup[-R,R]\,.$$

L'identità di Eq. (1) deriva dal fatto che, nel limite $R\to\infty$ il contributo sull'arco $\left\{w:w=Re^{i\theta},\theta\in[0,\pi]\right\}$ tende a zero, poiché, per valori di w appartenenti all'arco stesso, la funzione integranda moltiplicata per la w verifica il limite uniforme

$$\lim_{R\to\infty}\frac{w^2}{(w^2+1)^3}w\overset{\text{unif.}}{=}0\,,$$

che, a sua volta, è conseguenza della limitazione, uniforme sull'arco,

$$0\le\left|\frac{w^2}{(w^2+1)^3}w\right|=\frac{R^3}{|w^2+1|^3}\le\frac{R^3}{(R^2-1)^3}\xrightarrow[R\to\infty]{}0\,.$$

La funzione integranda ha due poli tripli nei punti $w_\pm = \pm i$, quindi dall'identità di Eq. (1) segue il risultato finale

$$
\begin{aligned}
S &= 8i\pi \,\mathrm{Res}\left[\frac{w^2}{(w^2+1)^3}, i\right] = 8i\pi\, \frac{1}{2}\frac{d^2}{dw^2}\frac{w^2}{(w+i)^3}\bigg|_{w=i} \\
&= 4i\pi\left[\left(\frac{d^2}{dw^2}w^2\right)\frac{1}{(w+i)^3} + w^2\left(\frac{d^2}{dw^2}\frac{1}{(w+i)^3}\right) + 2\left(\frac{d}{dw}w^2\right)\left(\frac{d}{dw}\frac{1}{(w+i)^3}\right)\right]_{w=i} \\
&= 4i\pi\left[\frac{2}{(w+i)^3} + \frac{12w^2}{(w+i)^5} - \frac{12w}{(w+i)^4}\right]_{w=i} = 4i\pi\,\frac{2w^2-8iw-2}{(w+i)^5}\bigg|_{w=i} = 4i\pi\frac{-2+8-2}{(2i)^5} \\
S &= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

Si determini la serie di Laurent della funzione

$$
b(z) = \frac{1}{z^4+1}\,,
$$

con centro in $z_0 = e^{i\pi/4}$ e convergente nell'origine. È richiesta l'espressione completa solo dei primi tre coefficienti non nulli, per gli altri è sufficiente l'espressione formale.
Suggerimento. Potrebbe essere utile usare lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione, sviluppo contenente solo quattro termini.

Soluzione del secondo problema

La funzione $b(z)$ è meromorfa, ha quattro poli semplici nelle quattro radici quarte di -1, ovvero

$$
z_0 = e^{i\pi/4}\,, \qquad z_1 = e^{3i\pi/4}\,, \qquad z_2 = e^{4i\pi/4}\,, \qquad z_3 = e^{7i\pi/4}\,.
$$

Considerando questi poli si deduce che ci sono tre serie di Laurent centrate in z_0 convergenti in altrettante corone circolari, che sono, ovviamente, disgiunte. La prima corona C_{r_1,R_1}, ha raggio interno nullo, $r_1 = 0$, e raggio esterno, R_1, pari alla distanza dal punto z_0 del polo ad esso più vicino, cioè

$$
R_1 = \min_{j=1,2,3}\left\{|z_0 - z_j|\right\} = |z_0 - z_1| = |z_0 - z_3| = \left|e^{i\pi/4} - e^{3i\pi/4}\right| = \left|e^{i\pi/2}\left(e^{-i\pi/4} - e^{i\pi/4}\right)\right| = |2i\mathrm{sen}(\pi/4)| = \sqrt{2}\,,
$$

quindi la prima corona è

$$
C_{0,\sqrt{2}} = \left\{z : 0 < |z - z_0| < \sqrt{2}\right\}\,.
$$

La seconda corona circolare ha raggio interno pari al raggio esterno della prima, $r_2 = R_1 = \sqrt{2}$, e raggio esterno

$$
R_2 = |z_0 - z_2| = \left|e^{i\pi/4} - e^{5i\pi/4}\right| = \left|e^{3i\pi/4}\left(e^{-i\pi/2} - e^{i\pi/2}\right)\right| = |2i\mathrm{sen}(\pi/2)| = 2\,,
$$

ovvero

$$
C_{\sqrt{2},2} = \left\{z : \sqrt{2} < |z - z_0| < 2\right\}\,.
$$

Infine, la terza corona ha raggio interno $r_3 = R_2 = 2$ e raggio esterno infinito, $R_3 = \infty$, si ha

$$
C_{2,\infty} = \{z : |z - z_0| > 2\}\,.
$$

È immediato osservare che l'origine, $z = 0$, appartiene (solo, le corone sono disgiunte) alla prima corona, infatti

$$
0 < |0 - z_0| = |z_0| = 1 < \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad 0 \in C_{0,\sqrt{2}}\,,
$$

ne consegue che dovremmo calcolare i coefficienti di Laurent della serie convergente in $C_{0,\sqrt{2}}$. Visto che la funzione $b(z)$ è meromorfa ed ha solamente quattro poli, possiamo scriverne lo sviluppo di Mittag-Leffler

$$
b(z) = \beta(z) + \sum_{j=0}^{3}\frac{R_j}{z - z_j}\,,
$$

dove $\left\{R_j\right\}_{j=0}^{3}$ è l'insieme dei residui e la funzione $\beta(z)$ è la parte intera, che ha lo stesso comportamento asintotico della funzione $b(z)$. In quanto la funzione $b(z)$ è regolare all'infinito e si annulla asintoticamente, la funzione $\beta(z)$ deve essere nulla. Lo sviluppo di Mittag-Leffler è quindi

$$b(z) = \sum_{j=0}^{3} \frac{R_j}{z - z_j},$$

ed i residui, essendo i poli tutti semplici, si ottengono come

$$R_j = \lim_{z \to z_j} b(z)(z - z_j) = \frac{1}{4z_j^3}, \qquad j = 0, 1, 2, 3.$$

Riscriviamo la somma in modo da evidenziare il termine dello sviluppo $z - z_0$,

$$b(z) = \frac{R_0}{z - z_0} + \sum_{j=1}^{3} \frac{R_j}{z_0 - z_j + z - z_0}.$$

Poiché $z \in C_{0,\sqrt{2}}$, si ha $|z - z_0| < |z_0 - z_j|$ per $j = 1, 2, 3$, quindi

$$\left| \frac{z - z_0}{z_0 - z_j} \right| < 1.$$

Alla luce di questa disuguaglianza, possiamo considerare le serie geometriche convergenti, di ragioni $(z{-}z_0)/(z_j{-}z_0)$, con $j = 1, 2, 3$, e si ha

$$\begin{aligned}
b(z) &= \frac{R_0}{z - z_0} + \sum_{j=1}^{3} \frac{R_j}{\left(z_0 - z_j\right)\left(1 - \frac{z - z_0}{z_j - z_0}\right)} \\
&= \frac{R_0}{z - z_0} + \sum_{j=1}^{3} \frac{R_j}{z_0 - z_j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z_j - z_0} \right)^k \\
&= \frac{R_0}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \frac{-R_j}{\left(z_j - z_0\right)^{k+1}} \left(z - z_0\right)^k.
\end{aligned}$$

Quest'ultima espressione rappresenta la serie di Laurent cercata. I coefficienti possono essere dati in forma di legge multipla

$$C_k = \begin{cases} 0 & k \leq -2 \\ R_0 & k = -1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{-R_j}{\left(z_j - z_0\right)^{k+1}} & k \geq 0 \end{cases}.$$

Per ottenere la forma esplicita dei primi tre, è necessario calcolare le differenze

$$\begin{aligned}
z_1 - z_0 &= e^{3i\pi/4} - e^{i\pi/4} = e^{i\pi/2}\left(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}\right) = -2\mathrm{sen}(\pi/4) = -\sqrt{2}, \\
z_2 - z_0 &= e^{5i\pi/4} - e^{i\pi/4} = e^{3i\pi/4}\left(e^{i\pi/2} - e^{-i\pi/2}\right) = e^{3i\pi/4} 2i\mathrm{sen}(\pi/2) = 2e^{5i\pi/4}, \\
z_3 - z_0 &= e^{7i\pi/4} - e^{i\pi/4} = e^{i\pi}\left(e^{3i\pi/4} - e^{-3i\pi/4}\right) = e^{i\pi} 2i\mathrm{sen}(3\pi/4) = -i\sqrt{2},
\end{aligned}$$

e i residui

$$R_0 = \frac{z_0^{-3}}{4} = \frac{e^{-3i\pi/4}}{4}, \qquad R_1 = \frac{z_1^{-3}}{4} = \frac{e^{-i\pi/4}}{4}, \qquad R_2 = \frac{z_2^{-3}}{4} = \frac{e^{i\pi/4}}{4}, \qquad R_3 = \frac{z_4^{-3}}{4} = \frac{e^{3i\pi/4}}{4}.$$

Quindi i primi tre coefficienti non nulli sono

$$
\begin{aligned}
C_{-1} &= R_0 = \frac{e^{-3i\pi/4}}{4}\,,\\
C_0 &= -\frac{R_1}{z_1 - z_0} - \frac{R_2}{z_2 - z_0} - \frac{R_3}{z_3 - z_0} = -\frac{R_1(z_2-z_0)(z_3-z_0) + R_2(z_1-z_0)(z_3-z_0) + R_3(z_1-z_0)(z_2-z_0)}{(z_1-z_0)(z_2-z_0)(z_3-z_0)}\\
&= R_0\left[R_1(z_0-z_2)(z_0-z_3) + R_2(z_0-z_1)(z_0-z_3) + R_3(z_0-z_1)(z_0-z_2)\right]\\
&= \frac{e^{-3i\pi/4}}{16}\left[-e^{-i\pi/4}2i\sqrt{2}e^{5i\pi/4} + e^{i\pi/4}2i - e^{3i\pi/4}2\sqrt{2}e^{5i\pi/4}\right]\\
&= \frac{e^{-3i\pi/4}}{16}\left[2i\sqrt{2} + e^{i\pi/4}2i - 2\sqrt{2}\right] = \frac{e^{-3i\pi/4}}{16}\left[2i\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right]\\
&= \frac{e^{-3i\pi/4}}{16}\left[3i\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\right] = \frac{e^{-3i\pi/4}}{16}6e^{3i\pi/4}\\
C_0 &= \frac{3}{8}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_1 &= -\frac{R_1}{(z_1-z_0)^2} - \frac{R_2}{(z_2-z_0)^2} - \frac{R_3}{(z_3-z_0)^2}\\
&= -R_0^2\left[R_1(z_0-z_2)^2(z_0-z_3)^2 + R_2(z_0-z_1)^2(z_0-z_3)^2 + R_3(z_0-z_1)^2(z_0-z_2)^2\right]\\
&= -\frac{e^{-3i\pi/2}}{64}\left[-e^{-i\pi/4}8e^{5i\pi/2} - e^{i\pi/4}4 + e^{3i\pi/4}8e^{5i\pi/2}\right] = -\frac{e^{-3i\pi/2}}{16}\left[-e^{i\pi/4}2 - e^{i\pi/4} + e^{5i\pi/4}2\right]\\
&= -\frac{e^{-3i\pi/2}}{16}\left[-3e^{i\pi/4} + 2e^{5i\pi/4}\right] = \frac{e^{-3i\pi/2}}{16}\left[3e^{i\pi/4} + 2e^{i\pi/4}\right] = \frac{5}{16}e^{-5i\pi/4}\\
C_1 &= \frac{5}{16}e^{3i\pi/4}\,.
\end{aligned}
$$

In definitiva la serie di Laurent è

$$
b(z) = \frac{e^{-3i\pi/4}}{4}(z-z_0)^{-1} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16}e^{3i\pi/4}(z-z_0) + O\left[(z-z_0)^2\right]\,, \qquad \forall z \in C_{0,\sqrt{2}}\,.
$$

Terzo problema (punteggio 6/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$
M = \mathrm{Pr}\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{sen}(1/z)}{z^2+1}dz\,.
$$

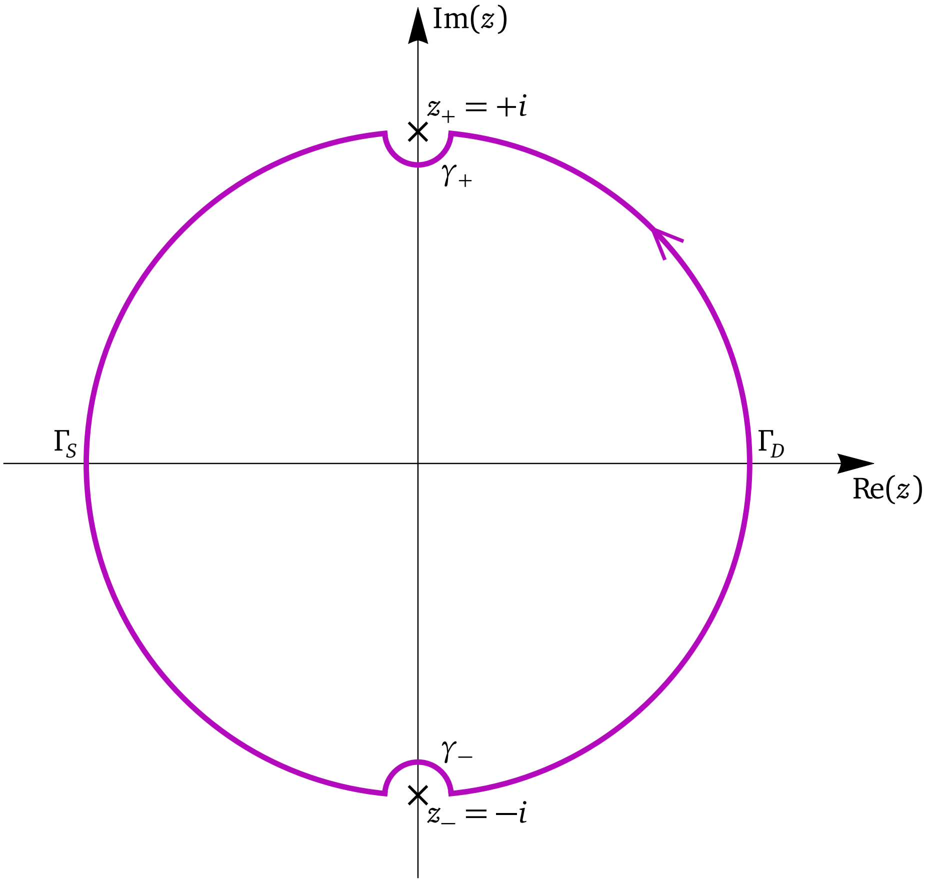
Soluzione del terzo problema

Descriviamo due possibili procedure risolutive.

Prima procedura

La funzione integranda ha una singolarità essenziale nell'origine, dovuta alla funzione $\mathrm{sen}(1/z)$ e due poli semplici nei punti $z_\pm = \pm i$, che appartengono al percorso di integrazione, ovvero la circonferenza unitaria.
Consideriamo il percorso dentato mostrato in figura, che è l'unione di quattro archi: $\gamma_\pm$, centrati rispettivamente in $z_\pm = \pm i$ e di raggio ϵ, e $\Gamma_{S,D}$, centrati nell'origine, di raggio unitario. L'integrale in valore principale si ottiene sottraendo all'integrale sul percorso chiuso $G \equiv \Gamma_S \cup (-\gamma_-) \cup \Gamma_D \cup (-\gamma_+)$ i contributi degli archi $\gamma_\pm$ e facendo il limite $\epsilon \to 0^+$, ovvero

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\oint_G \frac{\mathrm{sen}(1/z)}{z^2+1}dz - \int_{-\gamma_+}\frac{\mathrm{sen}(1/z)}{z^2+1}dz - \int_{-\gamma_-}\frac{\mathrm{sen}(1/z)}{z^2+1}dz\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\oint_G \frac{\mathrm{sen}(1/z)}{z^2+1}dz + \int_{\gamma_+}\frac{\mathrm{sen}(1/z)}{z^2+1}dz + \int_{\gamma_-}\frac{\mathrm{sen}(1/z)}{z^2+1}dz\right)\\
&= 2i\pi\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{sen}(1/z)}{z^2+1}, z=0\right] + i\pi\left(A_+ + A_-\right)\,,
\end{aligned}
$$



dove i valori $A_\pm$ sono dati dai limiti

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\text{sen}(1/z)}{z^2+1}(z \mp i) \overset{\text{unif.}}{=} A_\pm \,.$$

Con il segno alto e basso consideriamo i valori della funzione sugli archi centrati in $z = \pm i$ e con angoli sottesi $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$, rispettivamente,

$$A_\pm = \lim_{z\to\pm i} \frac{\text{sen}(1/z)}{z \pm i} = \pm\frac{\text{sen}(-i)}{\pm 2i} = \frac{\text{senh}(1)/i}{2i} = -\frac{\text{senh}(1)}{2} \,.$$

Il residuo nella singolarità essenziale si ottiene calcolando il coefficiente -1 della serie di Laurent centrata nell'origine. Sfruttando la serie di Taylor della funzione seno e la somma della serie geometrica di ragione $-z^2$, nel limite $z \to 0$,

$$\frac{\text{sen}(1/z)}{z^2+1} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j+1)!} z^{-2j-1+2k} \,,$$

da cui si ottiene

$$C_{-1} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j+1)!} \delta_{k,j} \,,$$

infatti la delta di Kronecker seleziona solo i coefficienti della potenza z^{-1}. Si tratta della serie di Taylor della funzione seno iperbolico e vale

$$C_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \text{senh}(1) \,.$$

In definitiva l'integrale cercato vale

$$
\begin{aligned}
M &= 2i\pi \text{Res}\left[\frac{\text{sen}(1/z)}{z^2+1}, z=0\right] + i\pi\left(A_+ + A_-\right) \\
&= i\pi\left(2\,\text{senh}(1) - \frac{\text{senh}(1)}{2} - \frac{\text{senh}(1)}{2}\right) \\
M &= i\pi\,\text{senh}(1)\,.
\end{aligned}
$$

Seconda procedura

Il secondo metodo consiste nel fare la sostituzione $w = 1/z$, per cui si ottiene

$$
M = -\text{Pr}\int_{-|w|=1} \frac{\text{sen}(w)}{1/w^2+1}\frac{dw}{w^2}\,,
$$

dove il segno meno è quello del differenziale $dz = -dw/w^2$, mentre il percorso d'integrazione è ancora la circonferenza unitaria nel piano complesso w ma, in virtù della sostituzione, è orientato in senso orario, ovvero negativo. Con semplici passaggi algebrici si arriva all'espressione

$$
M = \text{Pr}\int_{|w|=1} \frac{\text{sen}(w)}{w^2+1}dw\,,
$$

l'integranda ha, al finito, solo due poli semplici nei punti $w_\pm = \pm i$. Considerando il percorso chiuso, G', del caso precedente, ora nel piano complesso w (indichiamo questa evenienza con il "primo"), si ha

$$
M = i\pi\left(A'_+ + A'_-\right)\,,
$$

dove i valori $A'_\pm$ sono dati dai limiti

$$
A'_\pm = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\text{sen}(w)}{w^2+1}(w \mp i) \overset{\text{unif.}}{=} \frac{\text{sen}(\pm i)}{\pm 2i} = -i\frac{\text{sen}(i)}{2} = \frac{\text{senh}(1)}{2}\,.
$$

In definitiva

$$
M = i\pi\left(A'_+ + A'_-\right) = i\pi\text{senh}(1)\,.
$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

Si ottengano gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$
C(x^2,y^2,z^2) = \begin{pmatrix} y^2 & z^2 & 0 & 0 \\ x^2 & y^2 & z^2 & 0 \\ 0 & x^2 & y^2 & z^2 \\ 0 & 0 & x^2 & y^2 \end{pmatrix}\,,
$$

con $x, y, z > 0$. Si determinino, inoltre, i valori dei tre parametri reali e positivi, x, y e z, per i quali la matrice C è normale.

Soluzione del quarto problema

Otteniamo gli autovalori risolvendo l'equazione caratteristica

$$
\begin{aligned}
\det\left[C\left(x^2,y^2,z^2\right) - \lambda I\right] &= 0 \\
\det\begin{pmatrix} y^2-\lambda & z^2 & 0 & 0 \\ x^2 & y^2-\lambda & z^2 & 0 \\ 0 & x^2 & y^2-\lambda & z^2 \\ 0 & 0 & x^2 & y^2-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
\left(y^2-\lambda\right)\left\{\left(y^2-\lambda\right)\left[\left(y^2-\lambda\right)^2 - x^2z^2\right] - x^2z^2\left(y^2-\lambda\right)\right\} - x^2z^2\left[\left(y^2-\lambda\right)^2 - x^2z^2\right] &= 0 \\
\left(y^2-\lambda\right)^4 - 3x^2z^2\left(y^2-\lambda\right)^2 + x^4z^4 &= 0\,,
\end{aligned}
$$

da cui, risolvendo per $\left(y^2-\lambda\right)^2$,

$$\left(y^2-\lambda\right)^2_{1,2}=\frac{3x^2z^2\pm\sqrt{9x^4z^4-4x^4z^4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\,x^2z^2=\frac{\left(1\pm\sqrt{5}\right)^2}{4}\,x^2z^2\,.$$

Ne consegue che i quattro autovalori si ottengono, una volta estratta la radice quadrata, considerando tutte le combinazioni dei due segni oscillanti, si hanno

$$\lambda_1=y-\frac{1-\sqrt{5}}{2}xz\,,\quad \lambda_2=y-\frac{1+\sqrt{5}}{2}xz\,,\quad \lambda_3=y+\frac{1-\sqrt{5}}{2}xz\,,\quad \lambda_4=y+\frac{1+\sqrt{5}}{2}xz\,,$$

non ci sono ambiguità per i segni dei parametri, in quanto sono reali e positivi. Gli autovettori possono essere ottenuti "direttamente" dall'equazione agli autovalori, osservando che gli elementi della matrice $C(x^2,y^2,z^2)$ possono essere espressi in termini di tre delta di Kronecker, infatti, omettendo la dipendenza dai parametri,

$$C_{ij}=x^2\delta_{i,j+1}+y^2\delta_{i,j}+z^2\delta_{i,j-1}\,,\qquad i,j=1,2,3,4\,.$$

Ne consegue che l'i-esimo elemento dell'equazione agli autovalori, indicando con u l'autovettore relativo al generico autovalore λ, è

$$(Cu)_i=\sum_{j=1}^{4}C_{ij}u_j=x^2u_{i-1}+y^2u_i+z^2u_{i+1}=\lambda u_i\,,\qquad i=1,2,3,4\,,$$

dove si assume, ovviamente, $u_0=u_5=0$. Dalle precedenti si ottengono le equazioni

$$x^2u_{i-1}+\left(y^2-\lambda\right)u_i+z^2u_{i+1}=0\,,\qquad i=1,2,3,4\,,$$

che, posto $u_1=1$, permettono di ricavare le componenti dell'autovettore in funzione del autovalore corrispondente. Infatti, con $i=1$ si ha

$$x^2u_0+\left(y^2-\lambda\right)u_1+z^2u_2\underbrace{=}_{u_0=0,u_1=1}\left(y^2-\lambda\right)+z^2u_2=0\qquad\Longrightarrow\qquad u_2=\frac{\lambda-y^2}{z^2}\,.$$

Dall'equazione con $i=2$ si ottiene, invece, la componente u_3,

$$x^2u_1+\left(y^2-\lambda\right)u_2+z^2u_3=0\qquad\Longrightarrow\qquad u_3=-\frac{x^2}{z^2}u_1+\frac{\lambda-y^2}{z^2}u_2=-\frac{x^2}{z^2}+\left(\frac{\lambda-y^2}{z^2}\right)^2\,.$$

Infine, la quarta componente si ricava con $i=3$,

$$x^2u_2+\left(y^2-\lambda\right)u_3+z^2u_4=0\qquad\Longrightarrow\qquad u_4=-\frac{x^2}{z^2}u_2+\frac{\lambda-y^2}{z^2}u_3=-2\frac{x^2\left(\lambda-y^2\right)}{z^4}+\left(\frac{\lambda-y^2}{z^2}\right)^3\,.$$

Usando le espressioni esplicite degli autovalori, si hanno i quattro autovettori non normalizzati

$$u'_{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{x}{z}\\\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{x^2}{z^2}\\-\frac{x^3}{z^3}\end{pmatrix},\qquad u'_{(2)}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{x}{z}\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{x^2}{z^2}\\-\frac{x^3}{z^3}\end{pmatrix},\qquad u'_{(3)}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{x}{z}\\\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{x^2}{z^2}\\\frac{x^3}{z^3}\end{pmatrix},\qquad u'_{(4)}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{x}{z}\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{x^2}{z^2}\\\frac{x^3}{z^3}\end{pmatrix}.$$

Posto $x/z=\rho$, otteniamo gli autovettori normalizzati

$$u_{(1)}=\frac{1}{N_-}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\rho\\\frac{1-\sqrt{5}}{2}\rho^2\\-\rho^3\end{pmatrix},\ u_{(2)}=\frac{1}{N_+}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\rho\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}\rho^2\\-\rho^3\end{pmatrix},\ u_{(3)}=\frac{1}{N_-}\begin{pmatrix}1\\\frac{1-\sqrt{5}}{2}\rho\\\frac{1-\sqrt{5}}{2}\rho^2\\\rho^3\end{pmatrix},\ u_{(4)}=\frac{1}{N_+}\begin{pmatrix}1\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}\rho\\\frac{1+\sqrt{5}}{2}\rho^2\\\rho^3\end{pmatrix},$$

dove le due costanti di normalizzazione sono

$$N_\pm=\sqrt{\rho^6+\rho^2\left(\rho^2+1\right)\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}+1}\,.$$

Al fine di verificare le condizioni di normalità della matrice calcoliamo il commutatore $\left[C, C^\dagger\right]$, l'aggiunto della matrice C, in quanto reale, coincide con il trasposto. Il prodotto CC^T è simmetrico, infatti, poiché la trasposizione è data semplicemente dallo scambio $x^2 \longleftrightarrow z^2$, ovvero

$$C(x^2, y^2, z^2)^T = C(z^2, y^2, x^2)\,,$$

si ha che, indicando il prodotto CC^T con

$$T(x^2, y^2, z^2) = C(x^2, y^2, z^2)C(x^2, y^2, z^2)^T = C(x^2, y^2, z^2)C(z^2, y^2, x^2)\,,$$

vale la relazione di simmetria

$$\begin{aligned}
T(x^2, y^2, z^2)^T &= \left(C(x^2, y^2, z^2)C(x^2, y^2, z^2)^T\right)^T \\
&= \left(C(x^2, y^2, z^2)C(z^2, y^2, x^2)\right)^T \\
&= C(z^2, y^2, x^2)^T C(x^2, y^2, z^2)^T \\
&= C(x^2, y^2, z^2)C(z^2, y^2, x^2) \\
&= T(x^2, y^2, z^2)\,.
\end{aligned}$$

È quindi semplice calcolare il prodotto

$$\begin{aligned}
CC^T &= \begin{pmatrix} y^2 & z^2 & 0 & 0 \\ x^2 & y^2 & z^2 & 0 \\ 0 & x^2 & y^2 & z^2 \\ 0 & 0 & x^2 & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & x^2 & 0 & 0 \\ z^2 & y^2 & x^2 & 0 \\ 0 & z^2 & y^2 & x^2 \\ 0 & 0 & z^2 & y^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y^4 + z^4 & x^2y^2 + y^2z^2 & x^2z^2 & 0 \\ x^2y^2 + y^2z^2 & x^4 + y^4 + z^4 & x^2y^2 + y^2z^2 & x^2z^2 \\ x^2z^2 & x^2y^2 + y^2z^2 & x^4 + y^4 + z^4 & x^2y^2 + y^2z^2 \\ 0 & x^2z^2 & x^2y^2 + y^2z^2 & x^4 + y^4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il prodotto C^TC si ottiene dal precedente con lo scambio $x^2 \longleftrightarrow z^2$,

$$C^TC = \begin{pmatrix} y^4 + x^4 & x^2y^2 + y^2z^2 & x^2z^2 & 0 \\ x^2y^2 + y^2z^2 & x^4 + y^4 + z^4 & x^2y^2 + y^2z^2 & x^2z^2 \\ x^2z^2 & x^2y^2 + y^2z^2 & x^4 + y^4 + z^4 & x^2y^2 + y^2z^2 \\ 0 & x^2z^2 & x^2y^2 + y^2z^2 & z^4 + y^4 \end{pmatrix},$$

cambiano solo gli elementi $(1,1)$ ed $(4,4)$. Il commutatore è

$$\left[C, C^T\right] = \begin{pmatrix} z^4 - x^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 - z^4 \end{pmatrix},$$

affinché sia nullo è necessario che valga l'identità $x^4 = z^4$, che, in quanto x e z sono numeri reali positivi, ha la sola soluzione $x = z$. Quindi, tutte le matrici $C(x^2, y^2, x^2)$ sono normali. In questo caso, infatti, si ha $\rho = 1$ e gli autovettori diventano

$$u_{(1)} = \frac{1}{N_-}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 \end{pmatrix},\quad u_{(2)} = \frac{1}{N_+}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 \end{pmatrix},\quad u_{(3)} = \frac{1}{N_-}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\quad u_{(4)} = \frac{1}{N_+}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

con le costanti di normalizzazione

$$N_\pm = \sqrt{5 \pm \sqrt{5}}\,,$$

questi autovettori formano, evidentemente, un sistema ortonormale.

Quinto problema (punteggio 6/30)

Si ottenga la rappresentazione spettrale, ovvero gli autovalori e i proiettori corrispondenti, della matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avvertenza. La matrice non è normale.

Soluzione del quinto problema

Descriviamo due possibili procedure risolutive.

Prima procedura

Otteniamo gli autovalori come soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\begin{aligned} \det(T - xI) &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} &= 0 \\ (1-x)^2(2-x) - 4(2-x) &= 0 \\ (2-x)\left[(1-x)^2 - 4\right] &= 0\,, \end{aligned}$$

si hanno

$$x_1 = -1\,, \qquad x_2 = 2\,, \qquad x_3 = 3\,.$$

Per il generico autovettore non normalizzato di componenti a, b, c e autovalore x si ha

$$\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} (1-x)a + 2c = 0 \\ (2-x)b + c = 0 \\ 2a + (1-x)c = 0 \end{cases},$$

che per $x = x_1 = -1$ diventa

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{posto } a = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1/3 \\ c = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Le componenti del secondo autovettore si ottengono dal sistema con $x = x_2 = 2$,

$$\begin{cases} -a + 2c = 0 \\ c = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{posto } c = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il terzo autovettore ha le componenti date dalla soluzione del sistema con $x = x_3 = 3$,

$$\begin{cases} -a + c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{posto } a = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che gli autovettori siano linearmente indipendenti, consideriamo la combinazione lineare che coincide con il vettore nullo

$$\sum_{j=1}^{3} c_j v_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

e ricaviamo i valori dei coefficienti

$$\begin{cases} 3c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -3c_1 + c_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases} .$$

Poiché l'unica combinazione è quella banale, ovvero con tutti i coefficienti nulli, gli autovettori sono linearmente indipendenti, la matrice T è diagonalizzabile e ammette la rappresentazione spettrale

$$T = \sum_{j=1}^{3} x_j P_j .$$

Le matrici dell'insieme $\left\{P_j\right\}_{j=1}^{3}$ sono proiettori ortogonali, ovvero

$$P_j P_k = \delta_{j,k} P_k , \qquad j,k = 1,2,3 ,$$

in quanto proiettori, sono matrici idempotenti, cioè

$$P_j^m = P_j , \ \forall\, m \in \mathbb{N} , \qquad j = 1,2,3 .$$

Inoltre, la loro somma coincide con la matrice identità,

$$\sum_{j=1}^{3} P_j = I .$$

In virtù di queste proprietà, dato un generico polinomio di grado $n \in \mathbb{N}$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k , \qquad a_n \neq 0 ,$$

la matrice che si ottiene valutando il polinomio sulla matrice T è

$$p(T) = \sum_{j=1}^{3} p(x_j) P_j ,$$

ovvero ha gli stessi autovettori di T, ma gli autovalori sono i numeri $p(x_j)$, $j = 1,2,3$. Se definissimo un polinomio di secondo grado, $t_1(x)$, in modo che avesse gli zeri coincidenti con il secondo ed il terzo autovalore della matrice T, x_2 e x_3, allora si avrebbe $t_1(x_j) = \delta_{1,j} t_1(x_1)$, quindi

$$t_1(T) = \sum_{j=1}^{3} t_1(x_j) P_j = t_1(x_1) P_1 .$$

Cioè potremmo ottenere il primo proiettore valutando questo polinomio sulla matrice data. Ovviamente, ripetendo la procedura per il primo e secondo e, secondo e terzo autovalore otterremmo anche il secondo e terzo proiettore. Possiamo definire i polinomi di secondo grado $t_j(x)$ come segue

$$t_j(x) = \prod_{k \neq j} (x - x_k) , \qquad j = 1,2,3 ,$$

è evidente che $t_1(x)=(x-x_2)(x-x_3)$ ha zeri in x_2 e x_3, così come $t_2(x)=(x-x_1)(x-x_3)$ li ha in x_1 e x_3, e $t_3(x)=(x-x_1)(x-x_2)$ in x_1 e x_2. Con questo metodo, il primo proiettore può essere calcolato come

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{(T-x_2I)(T-x_3I)}{t_1(x_1)} = \frac{(T-x_2I)(T-x_3I)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(T-2I)(T-3I)}{(-3)(-4)} = \frac{T^2-5T+6I}{(-3)(-4)} \\
&= \frac{1}{12}\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 5 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right] \\
P_1 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Verifichiamone l'idempotenza

$$\begin{aligned}
P_1^2 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4+1/4 & 0 & -1/4-1/4 \\ 1/12+1/12 & 0 & -1/12-1/12 \\ -1/4-1/4 & 0 & 1/4+1/4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = P_1.
\end{aligned}$$

Il secondo proiettore è

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{(T-x_1I)(T-x_3I)}{t_2(x_2)} = \frac{(T-x_1I)(T-x_3I)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(T+I)(T-3I)}{3(-1)} = \frac{-T^2+2T+3I}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left[-\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right] \\
P_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ed è anch'esso idempotente, infatti

$$P_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_2.$$

Infine, il terzo proiettore

$$\begin{aligned}
P_3 &= \frac{(T-x_1I)(T-x_2I)}{t_3(x_3)} = \frac{(T-x_1I)(T-x_2I)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(T+I)(T-2I)}{4} = \frac{T^2-T-2I}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \\
P_3 &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

è idempotente

$$P_3^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = P_3.$$

Si verifica che la somma dei tre proiettori è la matrice identità,

$$P_1+P_2+P_3=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e che si tratta di matrici ortogonali, infatti

$$P_1P_2=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_1P_3=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2P_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La rappresentazione spettrale è

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3}x_jP_j&=-\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=T\,.\end{aligned}$$

Seconda procedura

Un'altra possibile procedura risolutiva consiste nel definire la matrice diagonalizzante D e calcolare la sua inversa. Gli elementi di tale matrice sono le componenti degli autovettori, indicando con $(v_j)^k$ la k-esima componente controvariante del j-esimo autovettore, con $k,j=1,2,3$, si ha

$$D=\begin{pmatrix} (v_1)^1 & (v_2)^1 & (v_3)^1 \\ (v_1)^2 & (v_2)^2 & (v_3)^2 \\ (v_1)^3 & (v_2)^3 & (v_3)^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché gli autovettori non sono ortogonali, questa matrice non è unitaria, è, comunque invertibile, infatti ha determinante non nulle, in particolare

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}=6\,.$$

Calcoliamo la matrice inversa

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix},$$

imponendo la condizione $DD^{-1}=\mathrm{diag}\,(1,1,1)$

$$DD^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3a+g & 3b+h & 3c+j \\ a+d+g & b+e+h & c+f+j \\ -3a+g & -3b+h & -3c+j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si hanno 9 equazioni, sommando le equazioni (1,1) e (3,1) si ha

$$g=1/2 \qquad\Rightarrow\qquad a=1/6\,;$$

sommando le equazioni (1,2) e (3,2)

$$h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 0\,;$$

sommando le equazioni (1,3) e (3,3)

$$j = 1/2 \qquad \Rightarrow \qquad c = -1/6\,;$$

dall'equazione (2,1)

$$a + d + g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d = -a - g = -1/6 - 1/2 = -2/3$$

dall'equazione (2,2)

$$b + e + h = 1 \qquad \Rightarrow \qquad e = -b - h + 1 = 1\,;$$

dall'equazione (2,3)

$$c + f + j = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f = -c - j = 1/6 - 1/2 = -1/3\,.$$

In definitiva

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice T può essere diagonalizzata come

$$T_d \equiv \text{diag}\,(-1, 2, 3) = D^{-1} T D\,.$$

Moltiplicando ambo i membri della rappresentazione spettrale per D^{-1} da sinistra e D da destra si ha

$$D^{-1} T D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D^{-1} \left(\sum_{j=1}^{3} x_j P_j \right) = \sum_{j=1}^{3} x_j D^{-1} P_j D = -D^{-1} P_1 D + 2 D^{-1} P_2 D + 3 D^{-1} P_3 D\,,$$

ovvero

$$D^{-1} P_1 D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} P_2 D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} P_3 D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Invertendo le precedenti relazioni si hanno le rappresentazioni dei proiettori

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & -1/6 \\ -2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Addendum

La matrice T rappresenta un operatore hermitiano $\hat{T}$ rispetto ad una base non ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^{3}$. Infatti, in questo caso, la matrice che rappresenta l'aggiunto dell'operatore $\hat{T}^\dagger$ non è la complessa coniugata della trasposta di T, bensì, detta $T^\dagger$ tale matrice, si ha

$$T^\dagger = G^{-1} T^{T*} G\,,$$

dove G è la matrice dei prodotti scalari dei vettori della base, ovvero ha elementi

$$G_k^j = \langle e_j | e_k \rangle\,, \qquad j,k = 1,2,3\,.$$

La matrice G si ottiene dall'identità $GT^\dagger = T^{T*}G$, che, assumendo $T^\dagger = T$, diventa $GT = T^{T*}G$,

$$G = \begin{pmatrix} x & 2(z-x) & y \\ 2(z-x) & -3(z-x) & z-x \\ y & z-x & z \end{pmatrix}, \qquad \forall x,y,z \in \mathbb{R}\,, \text{tali che: } x,z \neq 0\,, z \neq x\,.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si ottenga la funzione $f(x)$ che verifica l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x-y)}{y} dy + e^{iax}\,, \qquad a > 0\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Facciamo la trasformata di Fourier di ambo i membri usando per i due integrali il teorema della convoluzione, si ha

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k[f]\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right] = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k[f']\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right] + \mathscr{F}_k\left[e^{iax}\right] = ik\sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k[f]\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right] + \mathscr{F}_k\left[e^{iax}\right],$$

nella seconda identità si è usata la relazione tra la trasformata di Fourier della funzione e quella della sua derivata prima, ovvero

$$\mathscr{F}_k[f'] = ik\mathscr{F}_k[f]\,.$$

Possiamo ottenere la trasformata di Fourier della funzione incognita come

$$\mathscr{F}_k[f] = \frac{\mathscr{F}_k\left[e^{iax}\right]}{\sqrt{2\pi}\,\mathscr{F}_k[1/x](1-ik)}\,.$$

Calcoliamo le trasformate di Fourier delle funzioni e^{iax} e $1/x$

$$\mathscr{F}_k\left[e^{iax}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(k-a)} dx = \sqrt{2\pi}\,\delta(k-a)\,,$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x+i\epsilon} dx + i\pi\, e^{-ikx}\Big|_{x=0} \right) \\
&= i\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 0 & k<0 \\ -2i\pi \operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{-ikx}}{x+i\epsilon}, -i\epsilon\right] = -2i\pi & k>0 \end{cases} \\
&= i\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \begin{cases} 0 & k<0 \\ -i2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & k>0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & k<0 \\ -i\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & k>0 \end{cases} \\
\mathscr{F}_k\left[\frac{1}{x}\right] &= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{segno}(k)\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo utilizzato la rappresentazione integrale della delta di Dirac

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixw}dw\,,$$

e la formula di Sokhotsky-Plemelj per l'integrale in valore principale

$$\mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{x-x_0}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x)}{x-x_0\pm i\epsilon}\pm i\pi g(x_0)\,,$$

dove $g(z)$ è una funzione analitica in un intorno dell'asse reale e tale che $g(z) = O(1)$ per $|z| \to \infty$. Alla luce di questi risultati si ha

$$\mathscr{F}_k[f] = \frac{\mathscr{F}_k\left[e^{iax}\right]}{\sqrt{2\pi}\mathscr{F}_k[1/x](1-ik)} = \frac{i\sqrt{2\pi}\,\delta(k-a)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi/2}\,\mathrm{segno}(k)(1-ik)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\delta(k-a)}{\mathrm{segno}(k)(k+i)}\,,$$

e quindi

$$f(x) = \mathscr{F}_{-x}[\mathscr{F}_k[f]] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(k-a)}{\mathrm{segno}(k)(k+i)}e^{ikx}dk = -\frac{1}{\pi}\frac{e^{iax}}{a+i}\,.$$