Metodi Matematici per la Fisica

Prova scritta - 18 gennaio 2018

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che verranno valutati:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo.

Primo problema (punteggio: 6/30)

Si calcoli l'integrale

$$N = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\left(\operatorname{sen}^2(\alpha)+1\right)^2}\,.$$

Soluzione del primo problema

Semplifichiamo l'integranda usando la formula di bisezione

$$\cos(2\alpha) = 1-2\operatorname{sen}^2(\alpha) \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$$

e facciamo la sostituzione $\theta = 2\alpha$, si ottiene

$$N = 4\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{(3-\cos(2\alpha))^2} = 2\int_0^{4\pi} \frac{d\theta}{(3-\cos(\theta))^2} = 4\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(3-\cos(\theta))^2}\,.$$

L'ultima identità segue dalla periodicità della funzione coseno e quindi dell'integranda.
Facendo l'ulteriore sostituzione $z = e^{i\theta}$ si arriva all'integrale sul cerchio unitario

$$N = 4\oint_{|z|=1} \frac{-idz/z}{\left(3-\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = -16i\oint_{|z|=1} \frac{zdz}{\left(z^2-6z+1\right)^2}\,.$$

In questa forma l'integranda ha due poli doppi nei punti

$$z_{1,2} = 3 \mp 2\sqrt{2}\,,$$

solo il primo, $z_1 = 3-2\sqrt{2}$, è interno alla circonferenza unitaria, quindi, applicando il teorema dei residui, si ha

$$N = 32\pi \operatorname{Res}\left[\frac{z}{\left(z^2-6z+1\right)^2}, z_1\right] = 32\pi \left.\frac{d}{dz}\frac{z}{\left(z-z_2\right)^2}\right|_{z=z_1} = 32\pi\frac{-z_1-z_2}{\left(z_1-z_2\right)^3} = 32\pi\frac{-6}{\left(-4\sqrt{2}\right)^3} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

Secondo problema (punteggio 6/30)

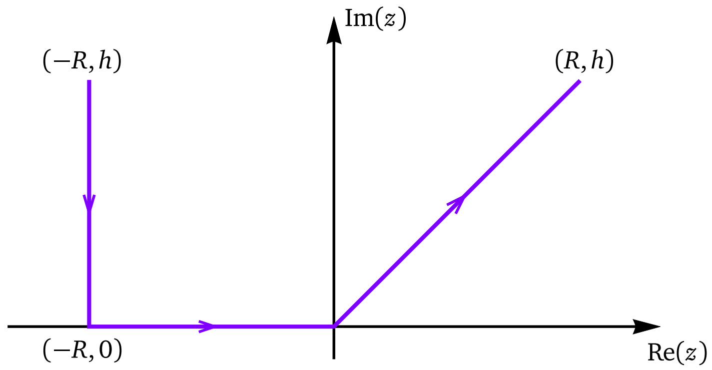
Si ottenga il valore dell'integrale

$$S = \operatorname{Re}\left[\int_\sigma e^{iz}\left(1+z^2\right)dz\right]\,,$$

dove il percorso di integrazione, mostrato in figura, ha la seguente definizione

$$\sigma = [-R+ih, -R] \cup [-R, 0] \cup [0, R+ih]\,,$$

con $R, h > 0$ e dove il simbolo $[z_1, z_2]$ rappresenta il segmento di estremi z_1 e z_2, orientato nel verso che va da z_1 a z_2.

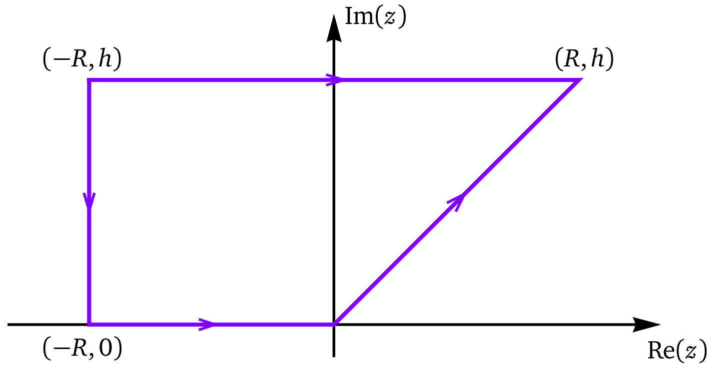


Soluzione del secondo problema

La funzione integranda

$$f(z) = e^{iz}\left(1+z^2\right),$$

è intera, ovvero analitica in $\mathbb{C}$, possiamo applicare il teorema di Cauchy per il quale l'integrale su un qualsiasi percorso differenziabile che unisce due punti è indipendente dal percorso stesso. Potremmo quindi scegliere come percorso il segmento $[-R+ih, R+ih]$, ovvero sfruttare l'identità



$$\int_\sigma f(z)dz = \int_{[-R+ih,R+ih]} f(z)dz\,.$$

Lungo il segmento $[-R+ih, R+ih]$ si ha $z = x+ih$, da cui $dz = dx$, con $x \in [-R, R]$, ne consegue che

$$S = \text{Re}\left[\int_{[-R+ih,R+ih]} f(z)dz\right] = \text{Re}\left[\int_{-R}^{R} f(x+ih)dx\right] = \int_{-R}^{R} \text{Re}\left[f(x+ih)\right]dx = \int_{-R}^{R} u(x,h)dx\,,$$

dove si è usata la consueta notazione

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)\,, \qquad u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R}\,.$$

La parte reale della funzione $f(z)$ è

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \text{Re}\left[f(z)\right] = \text{Re}\left[e^{iz}\left(1+z^2\right)\right] = \text{Re}\left[e^{-y+ix}\left(1+x^2-y^2+2ixy\right)\right] \\
&= e^{-y}\text{Re}\left[(\cos(x)+i\,\text{sen}(x))\left(1+x^2-y^2+2ixy\right)\right] \\
&= e^{-y}\text{Re}\left\{\cos(x)\left(1+x^2-y^2\right) - 2xy\,\text{sen}(x) + i\left[\text{sen}(x)\left(1+x^2-y^2\right)+2xy\cos(x)\right]\right\} \\
&= e^{-y}\left[\cos(x)\left(1+x^2-y^2\right) - 2xy\,\text{sen}(x)\right].
\end{aligned}$$

L'integrale assume la forma

$$S = e^{-h}\int_{-R}^{R}\left[\cos(x)\left(1+x^2-h^2\right) - 2hx\,\text{sen}(x)\right]dx = e^{-h}\left[c_0\left(1-h^2\right) + c_2 - 2hs_1\right],$$

dove abbiamo indicato con c_n e s_n, $n \in \mathbb{N}$, gli integrali

$$c_n = \int_{-R}^{R} x^n\cos(x)dx\,, \qquad s_n = \int_{-R}^{R} x^n\,\text{sen}(x)dx\,,$$

ovviamente $c_{2k+1} = s_{2m} = 0$, $\forall k, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.
I tre integrali che definiscono S, c_0, c_2 e s_1, sono

$$\begin{aligned}
c_0 &= \int_{-R}^{R}\cos(x)dx = 2\,\text{sen}(R) \\
c_2 &= \int_{-R}^{R}x^2\cos(x)dx = 2\left(R^2-2\right)\text{sen}(R) + 4R\cos(R) \\
s_1 &= \int_{-R}^{R}x\,\text{sen}(x)dx = 2\,\text{sen}(R) - 2R\cos(R)\,,
\end{aligned}$$

quindi il risultato finale è

$$\begin{aligned}
S &= 2e^{-h}\left[\left(1-h^2\right)\text{sen}(R) + \left(R^2-2\right)\text{sen}(R) + 2R\cos(R) - 2h\left(\text{sen}(R) - R\cos(R)\right)\right] \\
S &= 2e^{-h}\left\{\left[R^2-(h+1)^2\right]\text{sen}(R) + 2R(1+h)\cos(R)\right\}.
\end{aligned}$$

C'è un'altra possibilità, poiché la funzione integranda è intera, si può calcolare l'integrale in modo "classico", ovvero come se si trattasse di un integrale di linea con estremi complessi: $-R+ih$ e $R+ih$, si ha

$$
\begin{aligned}
S &= \mathrm{Re}\left[\int_{-R+ih}^{R+ih} e^{iz}\left(1+z^2\right) dz\right] = \mathrm{Re}\left[-ie^{iz}\Big|_{-R+ih}^{R+ih} - ie^{iz}z^2\Big|_{-R+ih}^{R+ih} + 2i\int_{-R+ih}^{R+ih} e^{iz} z dz\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[-ie^{iz}\Big|_{-R+ih}^{R+ih} - ie^{iz}z^2\Big|_{-R+ih}^{R+ih} + 2\, e^{iz}z\Big|_{-R+ih}^{R+ih} - 2\int_{-R+ih}^{R+ih} e^{iz} dz\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[-ie^{iz} - ie^{iz}z^2 + 2e^{iz}z + 2ie^{iz}\right]_{-R+ih}^{R+ih} \\
&= \mathrm{Re}\left[-\left(z^2+2iz-1\right) ie^{iz}\right]_{-R+ih}^{R+ih} \\
&= \mathrm{Re}\left[-(z+i)^2\, ie^{iz}\right]_{-R+ih}^{R+ih} \\
&= \mathrm{Re}\left\{-\left[R+i(1+h)\right]^2 ie^{iR-h} + \left[-R+i(1+h)\right]^2 ie^{-iR-h}\right\} \\
&= 2e^{-h}\left\{\left[R^2-(1+h)^2\right]\mathrm{sen}(R) + 2R(1+h)\cos(R)\right\}.
\end{aligned}
$$

Terzo problema (punteggio 8/30)

La funzione $h_n(w)$, con $n \in \mathbb{N}/\{1\}$, ha rappresentazione integrale

$$
h_n(w) = \int_0^\infty \frac{x^w}{x^n+1} dx\,.
$$

Dopo avere determinato il dominio della rappresentazione e aver ottenuto la forma analitica completa della funzione $h_n(w)$, si determini lo sviluppo di Mittag-Leffler.

Memento. L'integrale convergente della funzione polidroma $R(z)z^\alpha$, dove $R(z)$ è una funzione razionale che non ha poli in $(0,\infty)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, vale

$$
\int_0^\infty R(x)x^\alpha dx = -\frac{\pi\, e^{-i\pi\alpha}}{\mathrm{sen}(\pi\alpha)} \sum_{\text{tot}} \mathrm{Res}\left[R(z)z^\alpha, z_k\right].
$$

Soluzione del terzo problema

L'integranda è una funzione polidroma, che ha come punti di diramazione $z=0$ e $z=\infty$; possiede, inoltre, n poli semplici nelle n radici n-esime di -1,

$$
z_k = e^{(2k+1)i\pi/n}, \qquad k=0,1,\ldots,n-1\,.
$$

Poiché questi poli non appartengono al semi-asse reale positivo, ovvero al percorso di integrazione, possiamo usare la forma generale

$$
h_n(w) = \int_0^\infty \frac{x^w}{x^n+1} dx = -\frac{\pi e^{-i\pi w}}{\mathrm{sen}(\pi w)} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Res}\left[\frac{z^w}{z^n+1}, z_k\right],
$$

imponendo la condizione di convergenza

$$
-1-l < \mathrm{Re}(w) < -1-h\,,
$$

dove l e h sono le potenze di x che descrivono il comportamento della parte razionale dell'integranda nei limiti $x \to 0^+$ e $x \to \infty$, rispettivamente. Tali potenze sono

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^n+1} &= O\left(z^l\right) \quad \text{per: } x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad l = 0\,, \\
\frac{1}{x^n+1} &= O\left(z^h\right) \quad \text{per: } x \to \infty \quad \Rightarrow \quad h = -n
\end{aligned}
$$

e quindi il dominio di convergenza della rappresentazione integrale è

$$
D = \{w : -1 < \mathrm{Re}(w) < -1+n\}\,.
$$

La forma analitica di $h_n(w)$ si ottiene integrando, ovvero

$$h_n(w) = -\frac{\pi e^{-i\pi w}}{\operatorname{sen}(\pi w)} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{z^w}{z^n+1}, z_k\right] .$$

I residui sono

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^w}{z^n+1}, z_k\right] = \lim_{z\to z_k} \frac{z^w}{z^n+1}(z-z_k) = \frac{z_k^w}{n z_k^{n-1}} = \frac{z_k^{w-n+1}}{n} = \frac{e^{(2k+1)(w-n+1)i\pi/n}}{n} = -\frac{e^{(2k+1)(w+1)i\pi/n}}{n} ,$$

nell'ultima identità abbiamo usato $e^{-(2k+1)i\pi} = -1$. La somma degli n residui è

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{z^w}{z^n+1}, z_k\right] = -\frac{e^{(w+1)i\pi/n}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2k(w+1)i\pi/n} = -\frac{e^{(w+1)i\pi/n}}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2(w+1)i\pi/n}\right)^k ,$$

moltiplicando e dividendo per $1 - e^{2(w+1)i\pi/n}$ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{z^w}{z^n+1}, z_k\right] &= -\frac{e^{(w+1)i\pi/n}}{n} \frac{1-e^{2(w+1)i\pi}}{1-e^{2(w+1)i\pi/n}} = -\frac{e^{(w+1)i\pi}}{n} \frac{e^{-(w+1)i\pi}-e^{(w+1)i\pi}}{e^{-(w+1)i\pi/n}-e^{(w+1)i\pi/n}} \\
&= \frac{e^{i\pi w}}{n} \frac{-2i\operatorname{sen}((w+1)\pi)}{-2i\operatorname{sen}((w+1)\pi/n)} = \frac{e^{i\pi w}}{n} \frac{\operatorname{sen}((w+1)\pi)}{\operatorname{sen}((w+1)\pi/n)} = -\frac{e^{i\pi w}}{n} \frac{\operatorname{sen}(w\pi)}{\operatorname{sen}((w+1)\pi/n)} .
\end{aligned}$$

L'integrale completo e quindi l'espressione analitica della funzione $h_n(w)$ è

$$\begin{aligned}
h_n(w) &= -\frac{\pi e^{-i\pi w}}{\operatorname{sen}(\pi w)} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Res}\left[\frac{z^w}{z^n+1}, z_k\right] = \frac{\pi e^{-i\pi w}}{\operatorname{sen}(\pi w)} \frac{e^{i\pi w}}{n} \frac{\operatorname{sen}(w\pi)}{\operatorname{sen}((w+1)\pi/n)} \\
h_n(w) &= \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}((w+1)\pi/n)} .
\end{aligned}$$

La funzione ha infiniti poli semplici nei punti w_j tali che

$$\frac{(w_j+1)}{n} = j \qquad \Rightarrow \qquad w_j = n\cdot j - 1 , \qquad \forall\, j \in \mathbb{Z} .$$

Lo sviluppo di Mittag-Leffler ha l'espressione formale

$$h_n(w) = g(w) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{R_j}{w-w_j} ,$$

dove la funzione $g(w)$ rappresenta la parte intera della funzione $h_n(w)$, mentre i coefficienti R_j sono i residui nei poli w_j, e valgono

$$R_j = \lim_{w\to w_j} h_n(w)\left(w-w_j\right) = \lim_{w\to w_j} \frac{\pi/n}{(\pi/n)\cos((w+1)\pi/n)} = \frac{1}{\cos(j\pi)} = (-1)^j .$$

La funzione $h_n(w)$ non ha singolarità all'infinito, quindi $g(w) = g_0$ è costante, possiamo ottenerne il valore valutando $h_n(w)$ nell'origine, si ha

$$h_n(0) = g_0 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{-w_j} = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)} \qquad \Rightarrow \qquad g_0 = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^j}{w_j} .$$

In definitiva

$$\begin{aligned}
h_n(w) &= \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{w-w_j} + \frac{1}{w_j}\right) \\
h_n(w) &= \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(\pi/n)} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{w}{(n\cdot k-1)(w-n\cdot k+1)} .
\end{aligned}$$

Quarto problema (punteggio 6/30)

La funzione matriciale, 3×3, $F(z)$, con variabile complessa $z \in \mathbb{C}$, è definita come

$$F(z) = \left(z^2 I + zC + C^2\right)^{-1},$$

dove I è la matrice identità 3×3 e

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino: l'espressione esplicita della funzione $F(z)$, ovvero le 9 componenti $F_{ij}(z)$, con $i, j = 1, 2, 3$ e i punti di singolarità della stessa funzione $F(z)$.

Soluzione del quarto problema

Se la matrice C è diagonalizzabile, lo saranno simultaneamente anche le tre matrici $z^2 I$, zC e C^2, in quanto mutuamente commutanti. Gli autovalori della matrice C si ottengono come segue

$$\begin{aligned} \det(C - \alpha I) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 3 \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 3 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} &= 0 \\ (2-\alpha)\left[(1-\alpha)^2 - 9\right] &= 0, \end{aligned}$$

da cui

$$\alpha_1 = -2, \qquad \alpha_2 = 2, \qquad \alpha_3 = 4.$$

Calcoliamo gli autovettori nella forma

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{|x_j|^2 + |y_j|^2 + |z_j|^2}} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}, \qquad j = 1, 2, 3,$$

risolvendo le tre equazioni $C a_j = \alpha_j a_j$, si ha

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} &= \alpha_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_j(1-\alpha_j) + 3z_j \\ y_j(2-\alpha_j) \\ 3x_j + z_j(1-\alpha_j) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per $\alpha_j \neq 2$, ovvero per $j \neq 2$, $y_{1,3} = 0$, in questi casi poniamo $x_{1,3} = 1$ e otteniamo $z_{1,3}$ usando l'equazione ricavata dal primo elemento della precedente identità matriciale, ovvero

$$\begin{aligned} x_{1,3}(1-\alpha_{1,3}) + 3z_{1,3} &= 0 \\ 1 - \alpha_{1,3} + 3z_{1,3} &= 0 \\ z_{1,3} &= \frac{\alpha_{1,3} - 1}{3} = \mp 1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad a_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix}.$$

Il secondo autovettore si ottiene ponendo $y_2 = 1$ e $x_2 = z_2 = 0$,

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I tre autovettori formano un insieme ortonormale, ne consegue che la matrice unitaria diagonalizzante U ha elementi $U_{ij} = (a_j)_i$, $i, j = 1, 2, 3$, ovvero

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ed è tale che

$$C_d \equiv U^\dagger C U = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Con questa matrice si diagonalizza anche $F(z)$, in particolare

$$\begin{aligned} F_d(z) = U^\dagger F_d(z) U &= \begin{pmatrix} 1/\left(z^2 + z\alpha_1 + \alpha_1^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1/\left(z^2 + z\alpha_2 + \alpha_2^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\left(z^2 + z\alpha_3 + \alpha_3^2\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\left(z^2 - 2z + 4\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1/\left(z^2 + 2z + 4\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\left(z^2 + 4z + 16\right) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I punti singolari sono gli zeri dei tre polinomi $z^2 + z\alpha_j + \alpha_j^2$, $j = 1, 2, 3$, ovvero i 6 punti

$$z_j^\pm = \alpha_j \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha_j\, e^{\pm 2i\pi/3}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Infine, la forma esplicita della funzione matriciale $F(z)$ è

$$\begin{aligned} F(z) &= U F_d(z) U^\dagger \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & f_3(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(z)/\sqrt{2} & 0 & f_3(z)/\sqrt{2} \\ 0 & f_2(z) & 0 \\ -f_1(z)/\sqrt{2} & 0 & f_3(z)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(f_1(z) + f_3(z)\right)/2 & 0 & \left(-f_1(z) + f_3(z)\right)/2 \\ 0 & f_2(z) & 0 \\ \left(-f_1(z) + f_3(z)\right)/2 & 0 & \left(f_1(z) + f_3(z)\right)/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{z^2+z+10}{\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4z+16\right)} & 0 & \frac{3(z+2)}{\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4z+16\right)} \\ 0 & \frac{1}{z^2+2z+4} & 0 \\ \frac{3(z+2)}{\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4z+16\right)} & 0 & \frac{z^2+z+10}{\left(z^2-2z+4\right)\left(z^2+4z+16\right)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Quinto problema (punteggio 6/30)

L'operatore $\hat{A}$ è definito nello spazio di Hilbert di dimensione 3, E_3, come

$$\hat{A} = |a\rangle\langle e_1| + |e_1\rangle\langle a|,$$

in termini di $|e_1\rangle$, che è il primo vettore della base ortonormale $\{|e_k\rangle\}_{k=1}^3 \subset E_3$ e del vettore $|a\rangle \in E_3$, non ortogonale a nessuno dei tre vettori della base e tale che: $\langle e_1|a\rangle = \langle a|e_1\rangle$. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di $\hat{A}$ in notazione *bra-ket*.

Soluzione del quinto problema

L'operatore è hermitiano infatti, poiché in generale $\langle x|y\rangle^\dagger = \langle y|x\rangle$, si

$$\hat{A}^\dagger = \left(|a\rangle\langle e_1| + |e_1\rangle\langle a|\right)^\dagger = |a\rangle\langle e_1|^\dagger + |e_1\rangle\langle a|^\dagger = |e_1\rangle\langle a| + |a\rangle\langle e_1| = |a\rangle\langle e_1| + |e_1\rangle\langle a| = \hat{A}.$$

La rappresentazione matriciale dell'operatore $\hat{A}$ rispetto alla base $\{|r_k\rangle\}_{k=1}^{3} \subset E_3$ è

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_1|\hat{A}|e_3\rangle \\ \langle e_2|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_2|\hat{A}|e_3\rangle \\ \langle e_3|\hat{A}|e_1\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_2\rangle & \langle e_3|\hat{A}|e_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle e_1|a\rangle + \langle a|e_1\rangle & \langle a|e_2\rangle & \langle a|e_3\rangle \\ \langle e_2|a\rangle & 0 & 0 \\ \langle e_3|a\rangle & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^1 & a^{2*} & a^{3*} \\ a^2 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove abbiamo definito le componenti $a^j = \langle e_j|a\rangle$, con $a^1 = \langle e_1|a\rangle = \langle a|e_1\rangle \in \mathbb{R}$. Inoltre, poiché nessuno dei vettori della base è ortogonale al vettore $|a\rangle$, le componenti sono tutte diverse da zero.
Gli autovalori si ottengono con la procedura usuale, ovvero risolvendo l'equazione secolare

$$\det(A - I\lambda) = 0$$
$$\det \begin{pmatrix} 2a^1 - \lambda & a^{2*} & a^{3*} \\ a^2 & -\lambda & 0 \\ a^3 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\left(2a^1 - \lambda\right)\lambda^2 + \left(|a^2|^2 + |a^3|^2\right)\lambda = 0\,,$$

da cui

$$\lambda_1 = 0\,, \qquad \lambda_{2,3} = a^1 \pm \sqrt{(a^1)^2 + |a^2|^2 + |a^3|^2} = a^1 \pm \sqrt{\langle a|a\rangle} = a^1 \pm \|a\|\,.$$

L'autovettore relativo a λ_1 è, in rappresentazione matriciale,

$$\begin{pmatrix} 2a^1 & a^{2*} & a^{3*} \\ a^2 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2a^1 x + a^{2*}y + a^{3*}z \\ a^2 x \\ a^3 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dalle equazione per la seconda e terza componente si ha $x = 0$, posto $y = 1$ si ottiene $z = -a^{2*}/a^{3*}$, quindi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + |a^{2*}/a^{3*}|^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a^{2*}/a^{3*} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|a^2|^2 + |a^3|^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ a^{3*} \\ -a^{2*} \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori relativi agli autovalori $\lambda_{2,3}$ sono

$$\begin{pmatrix} 2a^1 & a^{2*} & a^{3*} \\ a^2 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,3} \\ y_{2,3} \\ z_{2,3} \end{pmatrix} = \lambda_{2,3} \begin{pmatrix} x_{2,3} \\ y_{2,3} \\ z_{2,3} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (2a^1 - \lambda_{2,3})x_{2,3} + a^{2*}y_{2,3} + a^{3*}z_{2,3} \\ a^2 x_{2,3} - \lambda_{2,3}y_{2,3} \\ a^3 x_{2,3} - \lambda_{2,3}z_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ponendo $x_{2,3} = 1$, dalle equazione per la seconda e terza componente si hanno le componenti

$$y_{2,3} = a^2/\lambda_{2,3}\,, \qquad z_{2,3} = a^3/\lambda_{2,3}\,,$$

i vettori sono

$$v_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{1 + |a^2/\lambda_{2,3}|^2 + |a^3/\lambda_{2,3}|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a^2/\lambda_{2,3} \\ a^3/\lambda_{2,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{2,3}^2 + |a^2|^2 + |a^3|^2}} \begin{pmatrix} \lambda_{2,3} \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\,\|a\|\left(\|a\| \pm 2a^1\right)}} \begin{pmatrix} a^1 \pm \|a\| \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}.$$

In notazione *bra-ket*, gli autovettori sono

$$|v_1\rangle = \frac{a^{3*}|e_2\rangle - a^{2*}|e_3\rangle}{\sqrt{|a^2|^2 + |a^3|^2}}\,, \qquad |v_{2,3}\rangle = \frac{|a\rangle \pm \|a\|\,|e_1\rangle}{\sqrt{2\,\|a\|\left(\|a\| \pm 2a^1\right)}}\,.$$

Sesto problema (punteggio 6/30)

Si determini la funzione $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, definita positiva, che verifica la seguente identità

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')f'(x')dx' = -2xe^{-x^2}\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Il primo membro dell'identità data rappresenta la convoluzione della funzione $f(x)$ con la sua derivata prima, la trasformata di Fourier è pari al prodotto delle trasformate di Fourier, avremo

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[f * f'\right] = \mathscr{F}_k\left[f\right]\mathscr{F}_k\left[f'\right] = \mathscr{F}_k\left[f\right] ik\mathscr{F}_k\left[f\right] = ik\tilde{f}^2(k)\,,$$

con $\tilde{f}(k) \equiv \mathscr{F}_k\left[f\right]$. La funzione che rappresenta il secondo membro è la derivata prima della gaussiana e^{-x^2}, ne consegue che la trasformata di Fourier vale

$$\mathscr{F}_k\left[-2xe^{-x^2}\right] = \mathscr{F}_k\left[\frac{d}{dx}e^{-x^2}\right] = ik\mathscr{F}_k\left[e^{-x^2}\right] = ik\frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}\,.$$

Dall'identità data si ottengono due espressione per $\tilde{f}(k)$

$$\tilde{f}_\pm(k) = \pm\frac{e^{-k^2/8}}{2^{1/4}}\,.$$

Le anti-trasformate di Fourier sono

$$\mathscr{F}_{-x}\left[\tilde{f}_\pm\right] = \pm\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-k^2/8+ikx}}{2^{1/4}}dk = \pm 2^{3/4}e^{-2x^2}\,,$$

La soluzione, alla luce della richiesta di positività, è

$$f(x) = 2^{3/4}e^{-2x^2}\,.$$