Metodi Matematici per la Fisica

Appello straordinario autunnale - 18 dicembre 2024

Si risolvano cortesemente i seguenti problemi, sapendo che il punteggio assegnato a ciascuna procedura di risoluzione può variare tra lo zero e il massimo indicato ed è stabilito valutando:

1. la correttezza del risultato ottenuto e della procedura utilizzata;
2. la completezza dei passaggi riportati;
3. il livello di esemplificazione con cui sono espressi i risultati (ad esempio un risultato numerico reale non deve contenere l'unità immaginaria);
4. la correttezza del formalismo utilizzato;
5. la chiarezza dell'esposizione e la leggibilità del testo;
6. la bellezza e l'armonia del tutto.

Primo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si ottenga l'espressione analitica della funzione

$$\asymp(k,z) = \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikt}}{t-z}dt\,,$$

definita per ogni $(k,z) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{C}$.

Curiosità. Il simbolo $\asymp$ rappresenta il primo carattere, corrisponde alla lettera "a", dell'alfabeto *aurebesh*, la rappresentazione grafica della lingua *Basic Galattico* o semplicemente *Basic* parlata dai personaggi dell'universo fantascientifico di *Guerre Stellari*. La parola *aurebesh*, così come la parola alfabeto, è la combinazione dei nomi delle prime due lettere, cioè, *Aurek* ($\asymp$) e *Besh* ($\ominus$).

Soluzione del primo problema

Il valore principale è effettivo solo per valori reali di z. Consideriamo il caso in cui $z \notin \mathbb{R}$, in questa eventualità l'integrale in valore principale coincide con l'integrale ordinario. Possiamo usare il lemma di Jordan, "chiudendo" il percorso nel semipiano delle parti immaginarie positive o negative se, rispettivamente $k < 0$ o $k > 0$, ricordando che i valori di k sono reali e non nulli. Usando il teorema dei residui, si ha

$$\asymp(k,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikt}}{t-z}dt = 2i\pi \left\{ \begin{array}{ll} 0 & k<0\,,\ \mathrm{Im}(z)<0 \\ e^{-ikz} & k<0\,,\ \mathrm{Im}(z)>0 \\ -e^{-ikz} & k>0\,,\ \mathrm{Im}(z)<0 \\ 0 & k>0\,,\ \mathrm{Im}(z)<0 \end{array} \right\} = -2i\pi\,\mathrm{Segno}[k]\theta(-k\,\mathrm{Im}(z))e^{-ikz}\,.$$

Se, invece, $z = x \in \mathbb{R}$, calcoliamo il valore principale avvalendoci della formula di Sokhotski-Plemelj con il polo nel semipiano delle parti immaginarie positive, si ha

$$\begin{aligned}\asymp(k,x) = \mathrm{Pr}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikt}}{t-x}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikt}}{t-(x+i\epsilon)}dt - i\pi e^{-ikx} = i\pi \left\{ \begin{array}{ll} 2e^{-ikx} - e^{-ikx} = e^{-ikx} & k<0 \\ -e^{-ikx} & k>0 \end{array} \right. \\ &= -i\pi\,\mathrm{Segno}[k]e^{-ikx}\,.\end{aligned}$$

La soluzione completa è

$$\asymp(k,z) = -2i\pi \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{Segno}[k]\theta(-k\,\mathrm{Im}(z))\,e^{-ikz} & \mathrm{Im}(z) \neq 0 \\ \mathrm{Segno}[k]\dfrac{e^{-ikz}}{2} & \mathrm{Im}(z) = 0 \end{array} \right. .$$

È interessante notare come si possa scrivere con una legge unica usando per la funzione theta di Heaviside il valore in zero $\theta(0) = 1/2$, cioè la media dei limiti sinistro e destro,

$$\theta(0) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\theta(0^-)}_{=0} + \underbrace{\theta(0^+)}_{=1}\Big) = \frac{1}{2}\,.$$

Secondo problema (punteggio massimo: 5/30)

Si calcoli l'integrale in valore principale

$$\mathfrak{b}_a = \Pr\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-a}\,,$$

$\forall\, a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Curiosità. Il simbolo $\mathfrak{b}$ rappresenta la lettera "b" dell'alfabeto *aurebesh*.

Soluzione del secondo problema

Poiché $a \notin \mathbb{R}$, la funzione integranda non ha singolarità al finito lungo il percorso d'integrazione. È il comportamento all'infinito che va considerato in termini del valore principale, ovvero possiamo definire

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_a &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x-a} = \lim_{R\to\infty} \left(\ln(R-a) - \ln(-R-a)\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\ln|R-a| - \ln|-R-a| + i\arg(R-a) - i\arg(-R-a)\right) \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\ln\left(\frac{|R-a|}{|-R-a|}\right) + i\arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(a)}{R-\operatorname{Re}(a)}\right) - i\arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(a)}{-R-\operatorname{Re}(a)}\right)\right) \\
&= i\lim_{R\to\infty} \left(\arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(a)}{R-\operatorname{Re}(a)}\right) - \arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(a)}{-R-\operatorname{Re}(a)}\right)\right),
\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto dell'annullamento del limite del logaritmo del rapporto dei moduli. Per valutare la differenza delle funzioni arcotangente assumiamo, senza perdita di generalità, la determinazione principale $[0, 2\pi]$ e $\operatorname{Im}(a) > 0$, in questo caso, nel limite $R \to \infty$, l'argomento della prima funzione arcotangente si annulla nel quarto quadrante, la fase tende a 2π, mentre quello della seconda funzione lo fa nel terzo, cosicché la fase tende a π. Ne consegue che, per $\operatorname{Im}(a) > 0$,

$$\mathfrak{b}_a = i\lim_{R\to\infty}\Bigg(\underbrace{\arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(a)}{R-\operatorname{Re}(a)}\right)}_{\to 2\pi} - \underbrace{\arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(a)}{-R-\operatorname{Re}(a)}\right)}_{\to\pi}\Bigg) = i\pi\,.$$

Lo stesso risultato si ottiene con la determinazione principale $[-\pi, \pi]$, per cui avremmo

$$\mathfrak{b}_a = i\lim_{R\to\infty}\Bigg(\underbrace{\arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(a)}{R-\operatorname{Re}(a)}\right)}_{\to 0} - \underbrace{\arctan\left(\frac{-\operatorname{Im}(a)}{-R-\operatorname{Re}(a)}\right)}_{\to -\pi}\Bigg) = i\pi\,.$$

Il caso in cui $\operatorname{Im}(a) < 0$, poiché a è l'unico numero non reale dell'espressione, si ottiene facendo il complesso coniugato del risultato precedente, cioè

$$\mathfrak{b}_a = -i\pi\,.$$

In definitiva si ha

$$\mathfrak{b}_a = \operatorname{Segno}[\operatorname{Im}(a)]\, i\pi\,.$$

Terzo problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli lo sviluppo di Mittag-Leffler della funzione

$$\mathfrak{f}(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)} - \frac{1}{\operatorname{senh}(z)}\,.$$

Curiosità. Il simbolo $\mathfrak{f}$ rappresenta la lettera "f" dell'alfabeto *aurebesh*.

SOLUZIONE DEL TERZO PROBLEMA

Le singolarità della funzione di $f(z)$ corrispondono agli zeri delle funzioni seno e seno iperbolico, rispettivamente i punti degli insiemi $\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\{ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. L'intersezione dei due ha solo un elemento, l'origine. Verifichiamo che $z=0$ è una singolarità eliminabile, calcolando il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} f(z) &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z-z^3/3!+z^5/5!+\mathcal{O}(z^7)}-\frac{1}{z+z^3/3!+z^5/5!+\mathcal{O}(z^7)}\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-(z^2/3!-z^4/5!+\mathcal{O}(z^6))}-\frac{1}{1+(z^2/3!+z^4/5!+\mathcal{O}(z^6))}\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^6)\right)^k-\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^6)\right)^j\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^6)\right)^k-\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\mathcal{O}(z^6)\right)^j\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(2\frac{z^2}{3!}+\cdots\right)=0\,,
\end{aligned}$$

è finto, quindi, come volevasi dimostrare, la singolarità è eliminabile.
Le altre singolarità sono poli semplici e hanno residui

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\left[f(z),k\pi\right] &= \lim_{z\to k\pi} f(z)(z-k\pi)=\lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{\mathrm{sen}(z)}=(-1)^k\,,\\
\mathrm{Res}\left[f(z),ik\pi\right] &= \lim_{z\to ik\pi} f(z)(z-ik\pi)=-\lim_{z\to ik\pi}\frac{z-ik\pi}{\mathrm{senh}(z)}=(-1)^{k+1}\,,
\end{aligned}$$

$\forall\, k\in\mathbb{Z}$. Lo sviluppo di Mittag-Leffler è

$$\begin{aligned}
f(z) &= \phi(z)+\sum_{k\neq 0}(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}-\frac{1}{z-ik\pi}\right)\\
&= \phi(z)+2z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z^2-k^2\pi^2}-\frac{1}{z^2+k^2\pi^2}\right)\\
&= \phi(z)+4\pi^2 z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^2}{z^2-k^4\pi^4}\,,
\end{aligned}$$

dove la funzione $\phi(z)$ è la parte intera di $f(z)$ e ha lo stesso comportamento asintotico. Poiché la $f(z)$ è regolare all'infinito, la funzione $\phi(z)$ è costante e per calcolarne il valore valutiamo l'espressione in $z=0$. Si ha $f(0)=0$ e, poiché grazie al fattore z la serie si annulla nell'origine, è identicamente nulla anche la $\phi(z)$. Quindi la soluzione è

$$f(z)=4\pi^2 z\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^2}{z^4-k^4\pi^4}\,.$$

QUARTO PROBLEMA (PUNTEGGIO MASSIMO: 5/30)

Si ottengano gli autovalori e le rappresentazioni matriciali rispetto alla base ortonormale $\{|z_k\rangle\}_{k=1}^2$, dell'operatore $\hat{B}=\exp\left(\vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right)$ e dei suoi autovettori, con $\vec{a}=(1,1,1)$ e $\hat{\vec{\sigma}}=(\hat{\sigma}_1,\hat{\sigma}_2,\hat{\sigma}_3)$, dove $\left\{\hat{\sigma}_j\right\}_{j=1}^3$ è l'insieme dei tre operatori di Pauli e la base ortonormale $\{|z_k\rangle\}_{k=1}^2$ ha come elementi gli autovettori del terzo operatore di Pauli $\hat{\sigma}_3$.

SOLUZIONE DEL QUARTO PROBLEMA

Sfruttando l'algebra degli operatori di Pauli, si ha

$$\left(\vec{a}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right)^2=\sum_{j,k=1}^{3}a_j a_k\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k=\sum_{j,k,m=1}^{3}a_j a_k\left(i\epsilon_{jkm}\hat{\sigma}_m+\hat{I}\delta_{jk}\right)=3\hat{I}\,,$$

dove $\hat{I}$ è l'operatore identità. Il termine che dipende dal simbolo di Levi-Civita ϵ_{jkm}, con $j,k,m \in \{1,2,3\}$, è nullo poiché il prodotto $a_j a_k$ è simmetrico rispetto allo scambio degli indici. Usando la serie di Taylor dell'esponenziale per l'operatore $\hat{B}$ e separando potenze pari e dispari si ha

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\right)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(2k)!} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1/2}}{(2k+1)!} \\ &= \hat{I}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}^{2k}}{(2k)!} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}^{2k+1}}{(2k+1)!},\end{aligned}$$

da cui, avvalendosi delle serie di Taylor delle funzioni iperboliche e la definizione del vettore $\vec{a}$, si ottiene

$$\hat{B} = \hat{I}\cosh\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2 + \hat{\sigma}_3}{\sqrt{3}} \operatorname{senh}\left(\sqrt{3}\right).$$

Usando le rappresentazioni matriciali degli operatori di Pauli si ricava quella dell'operatore

$$\hat{B} \overset{z}{\longleftrightarrow} B = \begin{pmatrix} \cosh\left(\sqrt{3}\right) + \operatorname{senh}\left(\sqrt{3}\right)/\sqrt{3} & (1-i)\operatorname{senh}\left(\sqrt{3}\right)/\sqrt{3} \\ (1+i)\operatorname{senh}\left(\sqrt{3}\right)/\sqrt{3} & \cosh\left(\sqrt{3}\right) - \operatorname{senh}\left(\sqrt{3}\right)/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Applicando il teorema spettrale, gli autovalori dell'operatore esponenziale possono essere ottenuti da quelli dell'operatore $\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}$, che, rispetto alla base $\{|z_k\rangle\}_{k=1}^2$, ha rappresentazione

$$\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}} \overset{z}{\longleftrightarrow} \vec{a}\cdot\vec{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica è

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1-i \\ 1+i & -1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ 1-\lambda^2+2 &= 0,\end{aligned}$$

le soluzioni e quindi gli autovalori dell'operatore $\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}$ sono

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}.$$

Di conseguenza, gli autovalori dell'operatore $\hat{B}$ sono

$$\beta_{1,2} = e^{\lambda_{1,2}} = e^{\pm\sqrt{3}}.$$

Gli autovettori degli operatori $\hat{B}$ e $\vec{a}\cdot\vec{\hat{\sigma}}$ sono gli stessi, poiché, commutando, sono diagonalizzabili simultaneamente. Indichiamo con v_j^k la k-esima componente contro-variante del j-esimo autovettore, rappresentato rispetto alla base data, con $k,j \in \{1,2\}$. Queste componenti si ottengono come soluzioni dei sistemi omogenei

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_j & 1-i \\ 1+i & -1-\lambda_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_j^1 \\ v_j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1,2.$$

Poniamo $v_{1,2}^1 = v$, per entrambi gli autovettori, dalla prima riga si ottiene

$$v_j^2 = -\frac{1-\lambda_j}{1-i} v \quad\Rightarrow\quad v_{1,2}^2 = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{1-i} v.$$

Ne consegue che la rappresentazioni cercate sono

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} 1-i \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} 1-i \\ -1-\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Quinto problema (punteggio massimo: 6/30)

Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione generalizzata

$$\mathcal{J}(x) = x^{n-2}\frac{d^n\delta(x)}{dx^n}\,,$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 2$.

Curiosità. Il simbolo $\mathcal{J}$ rappresenta la lettera "j" dell'alfabeto *aurebesh*.

Soluzione del quinto problema

Usiamo il teorema della convoluzione, per cui si ha

$$\mathscr{F}_k[\,\mathcal{J}\,] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}_k\left[x^{n-2}\right] * \mathscr{F}_k\left[\frac{d^n\delta(x)}{dx^n}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_{k-k'}\left[x^{n-2}\right] * \mathscr{F}_{k'}\left[\frac{d^n\delta(x)}{dx^n}\right]dk'\,.$$

La trasformata di Fourier della derivata n-esima della delta di Dirac è

$$\mathscr{F}_k\left[\frac{d^n\delta(x)}{dx^n}\right] = (ik)^n\mathscr{F}_k[\delta(x)] = \frac{(ik)^n}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

La trasformata di Fourier della potenza intera $m \in \mathbb{N}$ è

$$\mathscr{F}_k[x^m] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^m e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}i^m\frac{d^m}{dk^m}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx = i^m\sqrt{2\pi}\frac{d^m\delta(k)}{dk^m}\,,$$

dove abbiamo usato la rappresentazione della delta di Dirac

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}dx\,.$$

La trasformata di Fourier richiesta, quindi la convoluzione si calcola come

$$\mathscr{F}_k[\,\mathcal{J}\,] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}_{k-k'}\left[x^{n-2}\right] * \mathscr{F}_{k'}\left[\frac{d^n\delta(x)}{dx^n}\right]dk' = \frac{i^{2n-2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{n-2}\delta(k-k')}{dk'^{n-2}}k'^n dk'\,.$$

Si procede integrando per parti, la prima integrazione dà

$$\mathscr{F}_k[\,\mathcal{J}\,] = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{-\frac{d^{n-3}\delta(k-k')}{dk'^{n-3}}k'^n\bigg|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^{n-3}\delta(k-k')}{dk'^{n-3}}k'^{n-1}dk'\right).$$

Ripetendo l'integrazione per parti $n-2$ volte, si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_k[\,\mathcal{J}\,] &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{-\delta(k-k')k'^3\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + n(n-1)\cdots 4\cdot 3\int_{-\infty}^{\infty}\delta(k-k')k'^2 dk'\right)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}n(n-1)\cdots 4\cdot 3\,k^2\,.\end{aligned}$$

Per avere una forma più compatta, moltiplichiamo e dividiamo per 2, così da avere a numeratore $n!$ e quindi il risultato finale è

$$\mathscr{F}_k[\,\mathcal{J}\,] = \frac{(-1)^{n-1}n!}{2\sqrt{2\pi}}k^2\,.$$

Sesto problema (punteggio massimo: 5/30)

Dati gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$, definiti nello spazio di Hilbert a N dimensioni E_N, tali che, cioè, $\hat{A}, \hat{B} : E_N \to E_N$, si ottengano le relazioni, qualora ve ne siano, tra gli spettri discreti $\sigma_{AB} = \{\mu_k\}_{k=1}^N$, $\sigma_{BA} = \{\nu_k\}_{k=1}^N$ e gli insiemi di autovettori $\{|x_k\rangle\}_{k=1}^N$, $\{|y_k\rangle\}_{k=1}^N \subset E_N$ dei due operatori prodotto $\hat{A}\hat{B}$ e $\hat{B}\hat{A}$, che hanno quindi equazioni agli autovalori

$$\hat{A}\hat{B}|x_k\rangle = \mu_k|x_k\rangle\,,\qquad \hat{B}\hat{A}|y_k\rangle = \nu_k|y_k\rangle\,,\qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,.$$

Soluzione del sesto Problema

Applicando da sinistra l'operatore $\hat{B}$ su ambo i membri dell'equazione agli autovalori dell'operatore $\hat{A}\hat{B}$, si ha

$$\hat{B}\hat{A}\hat{B}|x_k\rangle = \mu_k \hat{B}|x_k\rangle\,, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,.$$

Questa è l'equazione agli autovalori dell'operatore $\hat{B}\hat{A}$, con l'insieme di autovettori $\big\{\hat{B}|x_k\rangle\big\}_{k=1}^{N}$. Ne consegue che gli insiemi di autovalori coincidono, ovvero i due operatori $\hat{A}\hat{B}$ e $\hat{B}\hat{A}$ hanno lo stesso spettro discreto, $\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$. Riordiniamo, ad esempio, gli autovettori dell'operatore $\hat{B}\hat{A}$, in modo tale che le equazioni agli autovalori si "armonizzino", ovvero si abbiano

$$\hat{A}\hat{B}|x_k\rangle = \mu_k|x_k\rangle\,, \qquad \hat{B}\hat{A}|y_k\rangle = \mu_k|y_k\rangle\,, \qquad\qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,.$$

In questo modo le relazioni che legano gli autovettori sono

$$\hat{B}|x_k\rangle \propto |y_k\rangle\,, \qquad \hat{A}|y_k\rangle \propto |x_k\rangle\,, \qquad\qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,.$$

Si ha la proporzionalità e non l'identità, poiché gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa. Introducendo delle costanti di proporzionalità, i cui insiemi sono $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$ e $\{\beta_k\}_{k=1}^{N}$, si hanno

$$\hat{B}|x_k\rangle = \alpha_k|y_k\rangle\,, \qquad \hat{A}|y_k\rangle = \beta_k|x_k\rangle\,, \qquad\qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,.$$

Applichiamo da sinistra l'operatore $\hat{A}$ alla prima equazione e l'operatore $\hat{B}$ alla seconda

$$\hat{A}\hat{B}|x_k\rangle = \alpha_k\hat{A}|y_k\rangle = \alpha_k\beta_k|x_k\rangle\,, \qquad \hat{B}\hat{A}|y_k\rangle = \beta_k\hat{B}|x_k\rangle = \beta_k\alpha_k|y_k\rangle\,, \qquad\qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,,$$

confrontando queste equazioni con quelle agli autovalori degli operatori prodotto $\hat{A}\hat{B}$ e $\hat{B}\hat{A}$, si evince che il prodotto delle costanti di proporzionalità coincide con l'autovalore comune, cioè

$$\alpha_k\beta_k = \mu_k\,, \qquad\qquad k \in \{1, 2, \ldots, N\}\,.$$